Inference Rules for Constructive Logic

Akshina Gupta, Avery Cowan, and Karl Crary

December 2021

Contents

Natural Deduction

Conjunction

$$\frac{A\ \mathsf{true} \quad B\ \mathsf{true}}{A \wedge B\ \mathsf{true}}\ \wedge I \qquad \frac{A \wedge B\ \mathsf{true}}{A\ \mathsf{true}}\ \wedge E1 \qquad \frac{A \wedge B\ \mathsf{true}}{B\ \mathsf{true}}\ \wedge E2$$

Disjunction

$$\frac{A\ \mathsf{true}}{A \vee B\ \mathsf{true}}\ \vee I1 \qquad \frac{B\ \mathsf{true}}{A \vee B\ \mathsf{true}}\ \vee I2 \qquad \frac{A \vee B\ \mathsf{true} \quad \begin{array}{c}[A\ \mathsf{true}]_u \\ \vdots \\ C\ \mathsf{true}\end{array} \quad \begin{array}{c}[B\ \mathsf{true}]_v \\ \vdots \\ C\ \mathsf{true}\end{array}}{C\ \mathsf{true}}\ \vee E^{u,v}$$

Implication

$$\frac{\begin{array}{c}[A\ \mathsf{true}]_u \\ \vdots \\ B\ \mathsf{true}\end{array}}{A \supset B\ \mathsf{true}}\ \supset I^u \qquad \frac{A \supset B\ \mathsf{true} \quad A\ \mathsf{true}}{B\ \mathsf{true}}\ \supset E$$

Truth and Falsehood

$$\frac{}{T\ \mathsf{true}}\ TI \qquad \frac{F\ \mathsf{true}}{C\ \mathsf{true}}\ FE$$

Natural Deduction with Contexts

Hypothesis

$$\frac{A\ \mathsf{true} \in \Gamma}{\Gamma \vdash A\ \mathsf{true}}\ hyp$$

Conjunction

$$\frac{\Gamma \vdash A\ \mathsf{true} \quad \Gamma \vdash B\ \mathsf{true}}{\Gamma \vdash A \wedge B\ \mathsf{true}}\ \wedge I \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B\ \mathsf{true}}{\Gamma \vdash A\ \mathsf{true}}\ \wedge E1 \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B\ \mathsf{true}}{\Gamma \vdash B\ \mathsf{true}}\ \wedge E2$$

Disjunction

$$\frac{\Gamma \vdash A\ \mathsf{true}}{\Gamma \vdash A \vee B\ \mathsf{true}}\ \vee I1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B\ \mathsf{true}}{\Gamma \vdash A \vee B\ \mathsf{true}}\ \vee I2$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B\ \mathsf{true} \quad \Gamma, A\ \mathsf{true} \vdash C\ \mathsf{true} \quad \Gamma, B\ \mathsf{true} \vdash C\ \mathsf{true}}{\Gamma \vdash C\ \mathsf{true}}\ \vee E$$

Implication

$$\frac{\Gamma, A\ \mathsf{true} \vdash B\ \mathsf{true}}{\Gamma \vdash A \supset B\ \mathsf{true}}\ \supset I \qquad \frac{\Gamma \vdash A \supset B\ \mathsf{true} \quad \Gamma \vdash A\ \mathsf{true}}{\Gamma \vdash B\ \mathsf{true}}\ \supset E$$

Truth and Falsehood

$$\frac{}{\Gamma \vdash T\ \mathsf{true}}\ TI \qquad \frac{\Gamma \vdash F\ \mathsf{true}}{\Gamma \vdash C\ \mathsf{true}}\ FE$$

Proof Terms

Conjunction

$$\frac{M : A \quad N : B}{\langle M, N \rangle : A \wedge B}\ \wedge I \qquad \frac{M : A \wedge B}{\mathsf{fst}\, M : A}\ \wedge E1 \qquad \frac{M : A \wedge B}{\mathsf{snd}\, M : B}\ \wedge E2$$

Disjunction

$$\frac{M : A}{\mathsf{inl}\, M : A \vee B}\ \vee I1 \qquad \frac{M : B}{\mathsf{inr}\, M : A \vee B}\ \vee I2 \qquad \frac{M : A \vee B \quad \begin{array}{c}[x : A]\\ \vdots \\ M_1 : C\end{array} \quad \begin{array}{c}[y : B]\\ \vdots \\ M_2 : C\end{array}}{\mathsf{case}(M, x.M_1, y.M_2) : C}\ \vee E$$

Implication

$$\frac{\begin{array}{c}[x : A]\\ \vdots \\ M : B\end{array}}{\lambda x.M : A \supset B}\ \supset I \qquad \frac{M : A \supset B \quad N : A}{M\, N : B}\ \supset E$$

Truth and Falsehood

$$\frac{}{\langle\rangle : T}\ TI \qquad \frac{M : F}{\mathsf{abort}\, M : C}\ FE$$

Verifications and Uses

Conjunction

$$\frac{A\uparrow \quad B\uparrow}{A\wedge B\uparrow}\wedge\!\uparrow \qquad \frac{A\wedge B\downarrow}{A\downarrow}\wedge\!\downarrow\!1 \qquad \frac{A\wedge B\downarrow}{B\downarrow}\wedge\!\downarrow\!2$$

Disjunction

$$\frac{A\uparrow}{A\vee B\uparrow}\vee\!\uparrow\!1 \qquad \frac{B\uparrow}{A\vee B\uparrow}\vee\!\uparrow\!2 \qquad \frac{A\vee B\downarrow \quad \begin{array}{c}[A\downarrow]_u\\ \vdots \\ C\uparrow\end{array} \quad \begin{array}{c}[B\downarrow]_v\\ \vdots \\ C\uparrow\end{array}}{C\uparrow}\vee\!\downarrow^{u,v}$$

Implication

$$\frac{\begin{array}{c}[A\downarrow]_u\\ \vdots \\ B\uparrow\end{array}}{A\supset B\uparrow}\supset\!\uparrow^{u} \qquad \frac{A\supset B\downarrow \quad A\uparrow}{B\downarrow}\supset\!\downarrow$$

Truth and Falsehood

$$\frac{}{T\uparrow}T\!\uparrow \qquad \frac{F\downarrow}{C\uparrow}F\!\downarrow$$

Shift

$$\frac{A\downarrow \quad A\ \mathsf{atomic}}{A\uparrow}\downarrow\!\uparrow$$

Quantification

Universal Quantification

$$\dfrac{\begin{array}{c}[a : \tau] \\ \vdots \\ A(a)\ \mathsf{true}\end{array}}{\forall x{:}\tau.A(x)\ \mathsf{true}}\ \forall I^a \qquad \dfrac{\forall x{:}\tau.A(x)\ \mathsf{true} \quad m : \tau}{A(m)\ \mathsf{true}}\ \forall E$$

Existential Quantification

$$\dfrac{m : \tau \quad A(m)\ \mathsf{true}}{\exists x{:}\tau.A(x)\ \mathsf{true}}\ \exists I \qquad \dfrac{\exists x{:}\tau.A(x)\ \mathsf{true} \quad \begin{array}{c}[a : \tau] \quad [A(a)\ \mathsf{true}]_u \\ \vdots \\ C\ \mathsf{true}\end{array}}{C\ \mathsf{true}}\ \exists E^{a,u}$$

Heyting Arithmetic

Natural Numbers

$$\frac{}{0 : \mathsf{nat}}\ \mathsf{nat}I_0 \qquad \frac{n : \mathsf{nat}}{s\,n : \mathsf{nat}}\ \mathsf{nat}I_s \qquad \frac{n : \mathsf{nat} \quad C(0)\ \mathsf{true} \quad \begin{array}{c}[x : \mathsf{nat}] \quad [C(x)\ \mathsf{true}]_u \\ \vdots \\ C(s\,x)\ \mathsf{true}\end{array}}{C(n)\ \mathsf{true}}\ \mathsf{nat}E^{x,u}$$

Equality

$$\frac{}{0 = 0\ \mathsf{true}}\ {=}I_{00} \qquad \frac{m = n\ \mathsf{true}}{s\,m = s\,n\ \mathsf{true}}\ {=}I_{ss}$$

$$\frac{s\,m = s\,n\ \mathsf{true}}{m = n\ \mathsf{true}}\ {=}E_{ss} \qquad \frac{0 = s\,n\ \mathsf{true}}{C\ \mathsf{true}}\ {=}E_{0s} \qquad \frac{s\,n = 0\ \mathsf{true}}{C\ \mathsf{true}}\ {=}E_{s0}$$

Primitive Recursion

$$\frac{n : \mathsf{nat} \quad t_0 : \tau \quad \begin{array}{c}[x : \mathsf{nat}] \quad [r : \tau] \\ \vdots \\ t_s : \tau\end{array}}{R(n, t_0, x\,r.t_s) : \tau}\ \mathsf{nat}E^{x,r}$$

$$\begin{array}{lcl} R(0, t_0, x\,r.t_s) & = & t_0 \\ R(s\,n, t_0, x\,r.t_s) & = & [R(n, t_0, x\,r.t_s)/r][n/x]t_s \end{array}$$

Sequent Calculus

Conjunction

$$\frac{\Delta \Longrightarrow A \quad \Delta \Longrightarrow B}{\Delta \Longrightarrow A \wedge B} \wedge R \qquad \frac{\Delta, A \wedge B, A \Longrightarrow C}{\Delta, A \wedge B \Longrightarrow C} \wedge L1 \qquad \frac{\Delta, A \wedge B, B \Longrightarrow C}{\Delta, A \wedge B \Longrightarrow C} \wedge L2$$

Disjunction

$$\frac{\Delta \Longrightarrow A}{\Delta \Longrightarrow A \vee B} \vee R1 \qquad \frac{\Delta \Longrightarrow B}{\Delta \Longrightarrow A \vee B} \vee R2 \qquad \frac{\Delta, A \vee B, A \Longrightarrow C \quad \Delta, A \vee B, B \Longrightarrow C}{\Delta, A \vee B \Longrightarrow C} \vee L$$

Implication

$$\frac{\Delta, A \Longrightarrow B}{\Delta \Longrightarrow A \supset B} \supset R \qquad \frac{\Delta, A \supset B \Longrightarrow A \quad \Delta, A \supset B, B \Longrightarrow C}{\Delta, A \supset B \Longrightarrow C} \supset L$$

Truth and Falsehood

$$\frac{}{\Delta \Longrightarrow T}\ TR \qquad \frac{}{\Delta, F \Longrightarrow C}\ FL$$

Initial

$$\frac{A \text{ atomic}}{\Delta, A \Longrightarrow A}\ init$$

Classical Logic

Conjunction

$$\frac{A\ \mathsf{true} \quad B\ \mathsf{true}}{A \wedge B\ \mathsf{true}}\ \wedge T \qquad \frac{A\ \mathsf{false}}{A \wedge B\ \mathsf{false}}\ \wedge F1 \qquad \frac{B\ \mathsf{false}}{A \wedge B\ \mathsf{false}}\ \wedge F2$$

Disjunction

$$\frac{A\ \mathsf{true}}{A \vee B\ \mathsf{true}}\ \vee T1 \qquad \frac{B\ \mathsf{true}}{A \vee B\ \mathsf{true}}\ \vee T2 \qquad \frac{A\ \mathsf{false} \quad B\ \mathsf{false}}{A \vee B\ \mathsf{false}}\ \vee F$$

Implication

$$\frac{\begin{array}{c}[A\ \mathsf{true}]_u \\ \vdots \\ B\ \mathsf{true}\end{array}}{A \supset B\ \mathsf{true}}\ \supset T^u \qquad \frac{A\ \mathsf{true} \quad B\ \mathsf{false}}{A \supset B\ \mathsf{false}}\ \supset F$$

Truth and Falsehood

$$\frac{}{T\ \mathsf{true}}\ TT \qquad \frac{}{F\ \mathsf{false}}\ FF$$

Negation

$$\frac{A\ \mathsf{false}}{\neg A\ \mathsf{true}}\ \neg T \qquad \frac{A\ \mathsf{true}}{\neg A\ \mathsf{false}}\ \neg F$$

Contradiction

$$\frac{\begin{array}{c}[A\ \mathsf{false}]_u \\ \vdots \\ \#\end{array}}{A\ \mathsf{true}}\ T\#^u \qquad \frac{\begin{array}{c}[A\ \mathsf{true}]_u \\ \vdots \\ \#\end{array}}{A\ \mathsf{false}}\ F\#^u \qquad \frac{A\ \mathsf{true} \quad A\ \mathsf{false}}{\#}\ \#$$

Reduced Sequent Calculus

Conjunction

$$\frac{\Delta \longrightarrow A \quad \Delta \longrightarrow B}{\Delta \longrightarrow A \wedge B}\ \wedge R \qquad \frac{\Delta, A, B \longrightarrow C}{\Delta, A \wedge B \longrightarrow C}\ \wedge L$$

Disjunction

$$\frac{\Delta \longrightarrow A}{\Delta \longrightarrow A \vee B}\ \vee R1 \qquad \frac{\Delta \longrightarrow B}{\Delta \longrightarrow A \vee B}\ \vee R2 \qquad \frac{\Delta, A \longrightarrow C \quad \Delta, B \longrightarrow C}{\Delta, A \vee B \longrightarrow C}\ \vee L$$

Implication

$$\frac{\Delta, A \longrightarrow B}{\Delta \longrightarrow A \supset B}\ \supset R \qquad \frac{\Delta, A \supset B \longrightarrow A \quad \Delta, B \longrightarrow C}{\Delta, A \supset B \longrightarrow C}\ \supset L$$

Truth and Falsehood

$$\frac{}{\Delta \longrightarrow T}\ TR \qquad \frac{\Delta \longrightarrow C}{\Delta, T \longrightarrow C}\ TL \qquad \frac{}{\Delta, F \longrightarrow C}\ FL$$

Initial

$$\frac{A \ \textsf{atomic}}{\Delta, A \longrightarrow A}\ init$$

Inversion Calculus

$$\begin{array}{ll} \text{right inversion} & \Delta; \Omega \xrightarrow{R} A \\ \text{left inversion} & \Delta; \Omega \xrightarrow{L} C^+ \end{array}$$

Right Inversion

$$\frac{\Delta; \Omega \xrightarrow{R} A \quad \Delta; \Omega \xrightarrow{R} B}{\Delta; \Omega \xrightarrow{R} A \wedge B} \wedge R \qquad \frac{}{\Delta; \Omega \xrightarrow{R} T} TR \qquad \frac{\Delta; \Omega, A \xrightarrow{R} B}{\Delta; \Omega \xrightarrow{R} A \supset B} \supset R$$

Switch

$$\frac{\Delta; \Omega \xrightarrow{L} P}{\Delta; \Omega \xrightarrow{R} P} LR_P \qquad \frac{\Delta; \Omega \xrightarrow{L} A \vee B}{\Delta; \Omega \xrightarrow{R} A \vee B} LR_\vee \qquad \frac{\Delta; \Omega \xrightarrow{L} F}{\Delta; \Omega \xrightarrow{R} F} LR_F$$

Left Inversion

$$\frac{\Delta; \Omega, A, B \xrightarrow{L} C^+}{\Delta; \Omega, A \wedge B \xrightarrow{L} C^+} \wedge L \qquad \frac{\Delta; \Omega \xrightarrow{L} C^+}{\Delta; \Omega, T \xrightarrow{L} C^+} TL \qquad \frac{\Delta; \Omega, A \xrightarrow{L} C^+ \quad \Delta; \Omega, B \xrightarrow{L} C^+}{\Delta; \Omega, A \vee B \xrightarrow{L} C^+} \vee L$$

$$\frac{}{\Delta; \Omega, F \xrightarrow{L} C^+} FL$$

Shift

$$\frac{\Delta, P; \Omega \xrightarrow{L} C^+}{\Delta; \Omega, P \xrightarrow{L} C^+} \mathit{shift}_P \qquad \frac{\Delta, A \supset B; \Omega \xrightarrow{L} C^+}{\Delta; \Omega, A \supset B \xrightarrow{L} C^+} \mathit{shift}_\supset$$

Search

$$\frac{P \in \Delta}{\Delta; \cdot \xrightarrow{L} P} \mathit{init} \qquad \frac{\Delta; \cdot \xrightarrow{R} A}{\Delta; \cdot \xrightarrow{L} A \vee B} \vee R1 \qquad \frac{\Delta; \cdot \xrightarrow{R} B}{\Delta; \cdot \xrightarrow{L} A \vee B} \vee R2$$

$$\frac{\Delta, A \supset B; \cdot \xrightarrow{R} A \quad \Delta; B \xrightarrow{L} C^+}{\Delta, A \supset B; \cdot \xrightarrow{L} C^+} \supset L$$

Focused Logic

$$
\begin{array}{lcl}
A^-, B^- & ::= & P^- \mid {\uparrow}A^+ \mid A^+ \supset B^- \mid A^- \wedge^- B^- \mid T^- \\
A^+, B^+ & ::= & P^+ \mid {\downarrow}A^- \mid A^+ \wedge^+ B^+ \mid T^+ \mid A^+ \vee B^+ \mid F \\
\rho & ::= & A^+ \mid P^- \\
\Delta & ::= & \cdot \mid \Delta, A^- \mid \Delta, P^+ \\
\Omega^+ & ::= & \cdot \mid \Delta, A^+
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{right inversion} & \Delta; \Omega^+ \xrightarrow{R} A^- \\
\text{left inversion} & \Delta; \Omega^+ \xrightarrow{L} \rho \\
\text{stable sequent} & \Delta \longrightarrow \rho \\
\text{left focus} & \Delta; [A^-] \longrightarrow \rho \\
\text{right focus} & \Delta \longrightarrow [A^+]
\end{array}
$$

Right Inversion

$$
\frac{\Delta; \Omega^+ \xrightarrow{L} P^-}{\Delta; \Omega^+ \xrightarrow{R} P^-}\ PR
\qquad
\frac{\Delta; \Omega^+ \xrightarrow{L} A^+}{\Delta; \Omega^+ \xrightarrow{R} {\uparrow}A^+}\ {\uparrow}R
\qquad
\frac{\Delta; \Omega^+, A^+ \xrightarrow{R} B^-}{\Delta; \Omega^+ \xrightarrow{R} A^+ \supset B^-}\ {\supset}R
$$

$$
\frac{\Delta; \Omega^+ \xrightarrow{R} A^- \quad \Delta; \Omega^+ \xrightarrow{R} B^-}{\Delta; \Omega^+ \xrightarrow{R} A^- \wedge^- B^-}\ \wedge^- R
\qquad
\frac{}{\Delta; \Omega^+ \xrightarrow{R} T^-}\ T^- R
$$

Left Inversion

$$
\frac{\Delta, P^+; \Omega^+ \xrightarrow{L} \rho}{\Delta; \Omega^+, P^+ \xrightarrow{L} \rho}\ PL
\qquad
\frac{\Delta, A^-; \Omega^+ \xrightarrow{L} \rho}{\Delta; \Omega^+, {\downarrow}A^- \xrightarrow{L} \rho}\ {\downarrow}L
\qquad
\frac{\Delta; \Omega^+, A^+, B^+ \xrightarrow{L} \rho}{\Delta; \Omega^+, A^+ \wedge^+ B^+ \xrightarrow{L} \rho}\ \wedge^+ L
$$

$$
\frac{\Delta; \Omega^+ \xrightarrow{L} \rho}{\Delta; \Omega^+, T^+ \xrightarrow{L} \rho}\ T^+ L
\qquad
\frac{\Delta; \Omega^+, A^+ \xrightarrow{L} \rho \quad \Delta; \Omega^+, B^+ \xrightarrow{L} \rho}{\Delta; \Omega^+, A^+ \vee B^+ \xrightarrow{L} \rho}\ \vee L
\qquad
\frac{}{\Delta; \Omega^+, F \xrightarrow{L} \rho}\ FL
$$

$$
\frac{\Delta \longrightarrow \rho}{\Delta; \cdot \xrightarrow{L} \rho}\ \mathit{stable}
$$

Stable Sequent

$$\frac{A^- \in \Delta \quad \Delta; [A^-] \longrightarrow \rho}{\Delta \longrightarrow \rho}\ focusL \qquad \frac{\Delta \longrightarrow [A^+]}{\Delta \longrightarrow A^+}\ focusR$$

Left Focus

$$\frac{}{\Delta; [P^-] \longrightarrow P^-}\ init^- \qquad \frac{\Delta; A^+ \xrightarrow{L} \rho}{\Delta; [\uparrow A^+] \longrightarrow \rho}\ \uparrow L \qquad \frac{\Delta \longrightarrow [A^+] \quad \Delta; [B^-] \longrightarrow \rho}{\Delta; [A^+ \supset B^-] \longrightarrow \rho}\ \supset L$$

$$\frac{\Delta; [A^-] \longrightarrow \rho}{\Delta; [A^- \wedge^- B^-] \longrightarrow \rho}\ \wedge^- L1 \qquad \frac{\Delta; [B^-] \longrightarrow \rho}{\Delta; [A^- \wedge^- B^-] \longrightarrow \rho}\ \wedge^- L2$$

No left rule for $[T^-]$.

Right Focus

$$\frac{P^+ \in \Delta}{\Delta \longrightarrow [P^+]}\ init^+ \qquad \frac{\Delta; \cdot \xrightarrow{R} A^-}{\Delta \longrightarrow [\downarrow A^-]}\ \downarrow R \qquad \frac{\Delta \longrightarrow [A^+] \quad \Delta \longrightarrow [B^+]}{\Delta \longrightarrow [A^+ \wedge^+ B^+]}\ \wedge^+ R \qquad \frac{}{\Delta \longrightarrow [T^+]}\ T^+ R$$

$$\frac{\Delta \longrightarrow [A^+]}{\Delta \longrightarrow [A^+ \vee B^+]}\ \vee R1 \qquad \frac{\Delta \longrightarrow [B^+]}{\Delta \longrightarrow [A^+ \vee B^+]}\ \vee R2$$

No right rule for $[F]$.

Linear Logic

Hypothesis

$$\frac{}{\Delta; A\ \mathsf{true} \Vdash A\ \mathsf{true}}\ hyp \qquad \frac{}{\Delta, A\ \mathsf{valid}; \cdot \Vdash A\ \mathsf{true}}\ hypv$$

Multiplicative Conjunction

$$\frac{\Delta; \Gamma_1 \Vdash A\ \mathsf{true} \quad \Delta; \Gamma_2 \Vdash B\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma_1, \Gamma_2 \Vdash A \otimes B\ \mathsf{true}}\ \otimes I \qquad \frac{\Delta, \Gamma_1 \Vdash A \otimes B\ \mathsf{true} \quad \Delta, \Gamma_2, A\ \mathsf{true}, B\ \mathsf{true} \Vdash C\ \mathsf{true}}{\Delta, \Gamma_1, \Gamma_2 \Vdash C\ \mathsf{true}}\ \otimes E$$

Additive Conjunction

$$\frac{\Delta; \Gamma \Vdash A\ \mathsf{true} \quad \Delta; \Gamma \Vdash B\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma \Vdash A \,\&\, B\ \mathsf{true}}\ \&I \qquad \frac{\Delta; \Gamma \Vdash A \,\&\, B\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma \Vdash A\ \mathsf{true}}\ \&E1 \qquad \frac{\Delta; \Gamma \Vdash A \,\&\, B\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma \Vdash B\ \mathsf{true}}\ \&E2$$

Disjunction

$$\frac{\Delta; \Gamma \Vdash A\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma \Vdash A \oplus B\ \mathsf{true}}\ \oplus I1 \qquad \frac{\Delta; \Gamma \Vdash B\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma \Vdash A \oplus B\ \mathsf{true}}\ \oplus I2$$

$$\frac{\Delta; \Gamma_1 \Vdash A \oplus B\ \mathsf{true} \quad \Delta; \Gamma_2, A\ \mathsf{true} \Vdash C\ \mathsf{true} \quad \Delta; \Gamma_2, B\ \mathsf{true} \Vdash C\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma_1, \Gamma_2 \Vdash C\ \mathsf{true}}\ \oplus E$$

Implication

$$\frac{\Delta; \Gamma, A\ \mathsf{true} \Vdash B\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma \Vdash A \multimap B\ \mathsf{true}}\ \multimap I \qquad \frac{\Delta; \Gamma_1 \Vdash A \multimap B\ \mathsf{true} \quad \Delta; \Gamma_2 \Vdash A\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma_1, \Gamma_2 \Vdash B\ \mathsf{true}}\ \multimap E$$

Units

$$\frac{}{\Delta; \cdot \Vdash 1\ \mathsf{true}}\ 1I \qquad \frac{\Delta; \Gamma_1 \Vdash 1\ \mathsf{true} \quad \Delta; \Gamma_2 \Vdash C\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma_1, \Gamma_2 \Vdash C\ \mathsf{true}}\ 1E$$

$$\frac{}{\Delta; \Gamma \Vdash \top\ \mathsf{true}}\ \top I \qquad \frac{\Delta; \Gamma_1 \Vdash 0\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma_1, \Gamma_2 \Vdash C\ \mathsf{true}}\ 0E$$

Exponential

$$\frac{\Delta; \cdot \Vdash A\ \mathsf{true}}{\Delta; \cdot \Vdash !A\ \mathsf{true}}\ !I \qquad \frac{\Delta; \Gamma_1 \Vdash !A\ \mathsf{true} \quad \Delta, A\ \mathsf{valid}; \Gamma_2 \Vdash C\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma_1, \Gamma_2 \Vdash C\ \mathsf{true}}\ !E$$

Ordered Logic

Hypothesis

$$\frac{}{A\ \mathsf{true} \Vdash A\ \mathsf{true}}\ hyp$$

Multiplicative Conjunction

$$\frac{\Gamma_1 \Vdash A\ \mathsf{true} \quad \Gamma_2 \Vdash B\ \mathsf{true}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Vdash A \bullet B\ \mathsf{true}}\ \bullet I \qquad \frac{\Gamma_2 \Vdash A \bullet B\ \mathsf{true} \quad \Gamma_1, A\ \mathsf{true}, B\ \mathsf{true}, \Gamma_3 \Vdash C\ \mathsf{true}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \Vdash C\ \mathsf{true}}\ \bullet E$$

Additive Conjunction

$$\frac{\Gamma \Vdash A\ \mathsf{true} \quad \Gamma \Vdash B\ \mathsf{true}}{\Gamma \Vdash A \,\&\, B\ \mathsf{true}}\ \& I \qquad \frac{\Gamma \Vdash A \,\&\, B\ \mathsf{true}}{\Gamma \Vdash A\ \mathsf{true}}\ \& E1 \qquad \frac{\Gamma \Vdash A \,\&\, B\ \mathsf{true}}{\Gamma \Vdash B\ \mathsf{true}}\ \& E2$$

Disjunction

$$\frac{\Gamma \Vdash A\ \mathsf{true}}{\Gamma \Vdash A \oplus B\ \mathsf{true}}\ \oplus I1 \qquad \frac{\Gamma \Vdash B\ \mathsf{true}}{\Gamma \Vdash A \oplus B\ \mathsf{true}}\ \oplus I2$$

$$\frac{\Gamma_2 \Vdash A \oplus B\ \mathsf{true} \quad \Gamma_1, A\ \mathsf{true}, \Gamma_3 \Vdash C\ \mathsf{true} \quad \Gamma_1, B\ \mathsf{true}, \Gamma_3 \Vdash C\ \mathsf{true}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \Vdash C\ \mathsf{true}}\ \oplus E$$

Implication

$$\frac{A\ \mathsf{true}, \Gamma \Vdash B\ \mathsf{true}}{\Gamma \Vdash A \rightarrowtail B\ \mathsf{true}}\ \rightarrowtail I \qquad \frac{\Gamma_1 \Vdash A\ \mathsf{true} \quad \Gamma_2 \Vdash A \rightarrowtail B\ \mathsf{true}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Vdash B\ \mathsf{true}}\ \rightarrowtail E$$

$$\frac{\Gamma, A\ \mathsf{true} \Vdash B\ \mathsf{true}}{\Gamma \Vdash A \twoheadrightarrow B\ \mathsf{true}}\ \twoheadrightarrow I \qquad \frac{\Gamma_1 \Vdash A \twoheadrightarrow B\ \mathsf{true} \quad \Gamma_2 \Vdash A\ \mathsf{true}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Vdash B\ \mathsf{true}}\ \twoheadrightarrow E$$

Units

$$\frac{}{\cdot \Vdash 1\ \mathsf{true}}\ 1I \qquad \frac{\Gamma_2 \Vdash 1\ \mathsf{true} \quad \Gamma_1, \Gamma_3 \Vdash C\ \mathsf{true}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \Vdash C\ \mathsf{true}}\ 1E$$

$$\frac{}{\Gamma \Vdash \top\ \mathsf{true}}\ \top I \qquad \frac{\Gamma_2 \Vdash 0\ \mathsf{true}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \Vdash C\ \mathsf{true}}\ 0E$$

Modal Logic

Hypothesis

$$\frac{A \text{ true} \in \Gamma}{\Delta; \Gamma \vdash A \text{ true}}\ hyp \qquad \frac{A \text{ valid} \in \Delta}{\Delta; \Gamma \vdash A \text{ true}}\ hypv$$

Conjunction

$$\frac{\Delta; \Gamma \vdash A \text{ true} \quad \Delta; \Gamma \vdash B \text{ true}}{\Delta; \Gamma \vdash A \wedge B \text{ true}}\ \wedge I \qquad \frac{\Delta; \Gamma \vdash A \wedge B \text{ true}}{\Delta; \Gamma \vdash A \text{ true}}\ \wedge E1 \qquad \frac{\Delta; \Gamma \vdash A \wedge B \text{ true}}{\Delta; \Gamma \vdash B \text{ true}}\ \wedge E2$$

Disjunction

$$\frac{\Delta; \Gamma \vdash A \text{ true}}{\Delta; \Gamma \vdash A \vee B \text{ true}}\ \vee I1 \qquad \frac{\Delta; \Gamma \vdash B \text{ true}}{\Delta; \Gamma \vdash A \vee B \text{ true}}\ \vee I2$$

$$\frac{\Delta; \Gamma \vdash A \vee B \text{ true} \quad \Delta; \Gamma, A \text{ true} \vdash C \text{ true} \quad \Delta; \Gamma, B \text{ true} \vdash C \text{ true}}{\Delta; \Gamma \vdash C \text{ true}}\ \vee E$$

Implication

$$\frac{\Delta; \Gamma, A \text{ true} \vdash B \text{ true}}{\Delta; \Gamma \vdash A \supset B \text{ true}}\ \supset I \qquad \frac{\Delta; \Gamma \vdash A \supset B \text{ true} \quad \Delta; \Gamma \vdash A \text{ true}}{\Delta; \Gamma \vdash B \text{ true}}\ \supset E$$

Truth and Falsehood

$$\frac{}{\Delta; \Gamma \vdash T \text{ true}}\ TI \qquad \frac{\Delta; \Gamma \vdash F \text{ true}}{\Delta; \Gamma \vdash C \text{ true}}\ FE$$

Necessity

$$\frac{\Delta; \cdot \vdash A \text{ true}}{\Delta; \Gamma \vdash \Box A \text{ true}}\ \Box I \qquad \frac{\Delta; \Gamma \vdash \Box A \text{ true} \quad \Delta, A \text{ valid}; \Gamma \vdash C \text{ true}}{\Delta; \Gamma \vdash C \text{ true}}\ \Box E$$

$$\frac{\Delta; \Gamma \vdash \Box A \text{ true} \quad \Delta, A \text{ valid}; \Gamma \vdash C \text{ poss}}{\Delta; \Gamma \vdash C \text{ poss}}\ \Box E_p$$

Possibility

$$\frac{\Delta; \Gamma \vdash A \text{ poss}}{\Delta; \Gamma \vdash \Diamond A \text{ true}}\ \Diamond I \qquad \frac{\Delta; \Gamma \vdash A \text{ true}}{\Delta; \Gamma \vdash A \text{ poss}}\ here \qquad \frac{\Delta; \Gamma \vdash \Diamond A \text{ true} \quad \Delta; A \text{ true} \vdash C \text{ poss}}{\Delta; \Gamma \vdash C \text{ poss}}\ \Diamond E$$