

Sur le platonisme dans les mathématiques (Über den Platonismus in der Mathematik[†]) (1935)

Platonism in mathematics

(*L'enseignement mathématique* 24, S. 52–69;
repr. in *Abhandlungen*, S. 62–78)

Comments: Edited by Dirk Schlimm and proof read by Pierre-Luc Bacon.

Editorial comments:

- On page 55 in the original document, variables P and T in “que tous les nombres réels aient une certaine propriété P ou encore. . . la propriété T .” are not put in italic whereas they are in the \LaTeX version.
- Same thing on page 62: “S’il est prouvé que chaque nombre n possède la propriété . . . alors B ”,
- And page 67: “de déduire deux formules contradictoires A et A .”
- On page 68, 3rd paragraph in “. . . les dfinitions récurrentes de la somme $a + b$ et du produit $a.b$ ”, the original document uses a simple ‘dot’ in ‘ $a.b$ ’ whereas ‘ \cdot ’ is used in the latex version.
- Finally, the footnote at the bottom of page 68 is numbered ‘1’ in the original document, and ‘2’ in the latex version.

Permettez-moi de vous entretenir à mon tour de la situation présente des recherches sur les fondements des mathématiques.

[†]Conférence faite le 18 juin 1934 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l’Université de Genève; série consacrée à la Logique mathématique.

Comme il y a dans ce domaine des questions qui restent ouvertes je ne suis pas à même de vous en brosser un tableau définitif. Mais il faut relever que la situation n'est pas si critique qu'on pourrait le croire en écoutant ceux qui parlent d'une crise des fondements. Cette expression peut se justifier à certains points de vue mais elle pourrait faire naître l'opinion que la science mathématique se trouve ébranlée par ses bases.

En vérité les sciences mathématiques croissent en pleine sécurité et harmonie. Les idées de DEDEKIND, de POINCARÉ et de M. HILBERT ont été développées systématiquement et avec un grand succès sans qu'il y ait aucune discordance dans les résultats.

C'est seulement au point de vue philosophique que des objections ont été faites. Elles portent sur certaines manières de raisonner propres à l'analyse infinitésimale et à la théorie des ensembles. Ces modes ont été appliqués pour la première fois systématiquement, quand on a donné une forme rigoureuse aux méthodes du calcul infinitésimal. On envisage les objets d'une théorie comme les éléments d'une totalité, de sorte qu'on peut raisonner ainsi : pour
53 chaque propriété, s'exprimant au moyen | des notions de la théorie, il est déterminé objectivement s'il y a un élément dans la totalité qui possède cette propriété ou s'il n'y en a point. De même de la dite conception découle l'alternative suivante : ou tous les éléments d'un ensemble possèdent une propriété donnée ou il y en a au moins un qui ne la possède pas.

On trouve, dans l'axiomatique de la géométrie, sous la forme que M. HILBERT lui a donnée, un exemple de cette façon de fonder une théorie. Si nous comparons l'axiomatique de M. HILBERT à celle d'Euclide, en faisant abstraction de ce qu'il manque encore plusieurs postulats chez le géomètre grec, nous remarquons qu'Euclide parle des figures à construire alors que pour M. HILBERT les systèmes des points, des droites et des plans existent dès le commencement. EUCLIDE postule : on peut relier deux points par une droite ; tandis que M. HILBERT énonce l'axiome : deux points quelconques étant donnés, il existe une droite sur laquelle ils sont tous les deux situés. « Existe » vise ici le système des droites.

Cet exemple montre déjà que la tendance dont nous parlons consiste à envisager les objets comme détachés de tout lien avec le sujet réfléchissant.

Cette tendance s'étant faite valoir surtout dans la philosophie de PLATON, qu'il me soit permis de la qualifier du nom de « platonisme ».

La valeur des conceptions mathématiques inspirées du platonisme vient de ce qu'elles fournissent des modèles d'imagination abstraite. Ces dernières se distinguent par leur simplicité et leur fermeté logique. Elles forment des

représentations extrapolatoires de certains domaines de l'expérience et de l'intuition.

Cependant nous savons qu'on peut arithmétiser les systèmes théoriques de la géométrie et de la physique. Pour cette raison nous porterons notre attention sur le platonisme en arithmétique.

Je parle d'ailleurs ici de l'arithmétique en un sens vaste qui enferme l'analyse infinitésimale et la théorie des ensembles.

La plus faible des suppositions « platoniciennes » introduite par l'arithmétique est celle de la totalité des nombres entiers. Le *tertium non datur* pour les
54 nombres entiers en découle, à | savoir : si P est un prédicat concernant un nombre entier, ou P convient à chaque nombre, ou il y a au moins un nombre exceptionnel.

Cette alternative est, en vertu de la dite supposition, une conséquence immédiate du principe logique du tiers exclu ; dans l'analyse infinitésimale on l'applique presque continuellement.

Par exemple c'est au moyen d'elle qu'on conclut : pour deux nombres réels a et b , donnés par des séries convergentes, on a ou $a = b$, ou $a < b$, ou $b < a$; et de même : une suite de nombres rationnels positifs ou bien s'approche de zéro autant que l'on veut ou bien il existe un nombre positif rationnel inférieur à tous les nombres de la suite.

A première vue de telles alternatives paraissent triviales et il faut prêter attention pour remarquer qu'il s'y glisse une supposition.

Mais l'analyse infinitésimale ne se contente pas de ce genre modeste de platonisme ; elle le reflète à un degré plus fort en regard des notions suivantes : ensemble de nombres, suite de nombres et fonction. Elle fait abstraction des possibilités de définir effectivement un ensemble, une suite ou une fonction. Ces notions y sont employées dans un sens « quasi-combinatoire », j'entends par là : au sens d'une analogie de l'infini au fini.

Considérons par exemple les diverses fonctions qui font correspondre à chaque nombre de la série finie $1, 2, \dots, n$ un nombre de la même série. Il y a n^n fonctions de cette sorte, et chacune d'elles est obtenue par n déterminations indépendantes. Passant à l'infini, on imagine des fonctions engendrées par une infinité de déterminations indépendantes qui font correspondre à chaque nombre entier un nombre entier, et l'on raisonne sur la totalité de ces fonctions.

De même on envisage un ensemble de nombres entiers comme le résultat d'une infinité d'actes indépendants décidant pour chaque nombre s'il doit être reçu ou exclu. Il s'y joint l'idée de la totalité de ces ensembles. D'une

manière analogue les suites de nombres réels et les ensembles de nombres réels sont envisagés. Les définitions constructives de fonctions, de suites ou d'ensembles spéciaux ne sont de ce point de vue que des | modes d'indiquer un objet ayant une existence indépendante de la construction, et antérieure à celle-ci.

Le principe du choix est une application immédiate des dits concepts quasi-combinatoires. Il est employé dans la théorie des nombres réels, en général, sous la forme spéciale suivante : Soit

$$M_1, M_2, \dots$$

une suite d'ensembles non vides de nombres réels ; alors il y a une suite

$$a_1, a_2, \dots$$

telle que, pour chaque indice n , a_n soit élément de M_n .

Le principe devient sujet à des objections si la construction effective de la suite de nombres est exigée.

Un cas semblable est celui des définitions non-prédicatives de POINCARÉ.

Une définition non-prédicative d'un nombre réel fait intervenir l'hypothèse que tous les nombres réels aient une certaine propriété P ou encore l'hypothèse qu'il existe un nombre réel ayant la propriété T .

Ce genre de définitions se rattache à la supposition de la totalité des suites de nombres entiers, puisqu'un nombre réel est représenté par une fraction décimale, c'est-à-dire par une suite spéciale de nombres entiers.

On l'utilise spécialement pour démontrer le théorème fondamental qu'un ensemble borné de nombres réels possède toujours une borne supérieure.

Dans les théories de CANTOR les conceptions platoniciennes s'étendent loin au delà de la théorie des nombres réels. Cela se fait en itérant l'emploi du concept quasi-combinatoire d'une fonction et en adjoignant des procédés de réunion. C'est la méthode connue de la théorie des ensembles.

Les conceptions platoniciennes de l'analyse et de la théorie des ensembles ont été aussi appliquées dans les théories modernes de l'algèbre et de la topologie et s'y sont montrées très fertiles.

Ce bref résumé suffira pour caractériser le platonisme et son application dans les mathématiques. L'application est si générale | qu'il n'est pas exagéré de dire que le platonisme règne aujourd'hui dans la mathématique.

Mais d'autre part nous voyons que cette tendance a été critiquée en principe dès son apparition et a occasionné beaucoup de discussions. La critique

s'est renforcée des paradoxes découverts dans la théorie des ensembles, bien que ces antinomies ne réfutent que le platonisme extrême.

Nous n'avons exposé dans ce qui précède qu'un platonisme restreint qui ne prétend pas être plus qu'une projection idéale (pour ainsi dire) d'un domaine de la pensée. Mais on n'en est pas resté là. Plusieurs mathématiciens et philosophes interprètent les méthodes du platonisme au sens d'un réalisme conceptuel, postulant l'existence d'un monde d'objets idéaux contenant tous les objets et les relations de la mathématique. C'est ce platonisme absolu qui a été montré insoutenable par les antinomies, spécialement par celles qui se groupent autour du paradoxe de Russell-Zermelo.

Quand on les entend pour la première fois, ces paradoxes, dans leur forme purement logique, peuvent paraître des jeux de mots sans signification sérieuse. Cependant il faut considérer que ces formes abrégées des paradoxes sont obtenues en poursuivant les conséquences des diverses exigences du platonisme absolu.

L'essentiel de ces antinomies est de mettre en évidence l'impossibilité de réunir les deux choses suivantes : l'idée de la totalité de tous les objets mathématiques et les concepts généraux d'ensemble et de fonction ; en effet, la totalité même formerait un domaine d'éléments pour des ensembles, d'arguments et de valeurs pour des fonctions.

Nous sommes donc obligés de renoncer au platonisme absolu. Mais il faut l'observer, c'est presque l'unique injonction qui découle des dits paradoxes. D'aucuns penseront que c'est dommage puisque de tous les côtés on fait appel aux paradoxes. Mais éviter les paradoxes ne constitue pas un programme univoque. En particulier le platonisme restreint n'est point touché par les antinomies.

57 Toutefois la critique des fondements de l'analyse reçut de ce côté une nouvelle impulsion et, entre les diverses possibilités | d'échapper aux paradoxes, celle d'éliminer le platonisme s'offrait comme la plus radicale.

Regardons comment cette élimination peut être effectuée. Elle se fait en deux pas correspondant aux deux suppositions essentielles introduites par le platonisme. Le premier pas consiste à remplacer les concepts que j'ai nommés quasi-combinatoires d'un ensemble, d'une suite, d'une fonction par des concepts constructifs. L'idée d'une infinité de déterminations indépendantes est rejetée. On fait valoir qu'une suite infinie ou une fraction décimale ne peut être donnée que par une loi arithmétique et on regarde le continu comme un ensemble d'éléments définis par de telles lois.

Ce procédé est adapté à la tendance d'une arithmétisation parfaite de

l'analyse. En effet, il faut concéder que dans la méthode usuelle de l'analyse infinitésimale arithmétisation n'est pas menée au bout. Les conceptions qu'on y applique ne se réduisent pas pleinement (comme nous l'avons vu) à la notion du nombre entier et aux concepts logiques.

Cependant si nous poursuivons la pensée que chaque nombre réel est défini par une loi arithmétique, l'idée de la totalité des nombres réels ne s'impose plus et le principe du choix n'a plus aucune évidence. Aussi, à moins que nous n'introduisions des suppositions accessoires — comme Russell et Whitehead le font — il faut se passer de diverses conclusions usuelles. C'est M. Weyl qui a mis ces conséquences en pleine lumière dans son livre « Le continu ».

Passons maintenant au deuxième pas de l'élimination. Il consiste à renoncer à l'idée de la totalité des nombres entiers. Ce point de vue fut d'abord soutenu et mis en valeur par Kronecker et puis développé systématiquement par M. Brouwer.

Bien que plusieurs de vous aient reçu en mars un exposé authentique de cette méthode par M. le prof. BROUWER lui-même, je me permets de donner quelques mots d'explication.

Il faut d'abord dissiper un malentendu au sujet de Kronecker, qui pourrait naître de son aphorisme souvent cité que les nombres entiers sont créés par Dieu, alors que toute autre chose dans les mathématiques est l'oeuvre de
58 l'homme. Si cela | était vraiment l'opinion de Kronecker, il devrait admettre les concepts de la totalité des nombres entiers.

En vérité la méthode de KRONECKER ainsi que celle de M. Brouwer est caractérisée par le fait qu'elle évite la supposition qu'il existe une série de nombres entiers formant un objet idéal déterminé.

On ne peut d'après Kronecker et Brouwer parler de la série des nombres qu'au sens d'un processus jamais fini, dépassant chaque limite atteinte.

Ce point de départ entraîne les autres divergences, spécialement en ce qui concerne l'application et l'interprétation des formes logiques : Ni un jugement général concernant les nombres entiers ni un jugement d'existence ne peuvent être interprétés comme exprimant une propriété de la série des nombres. Un théorème général sur les nombres doit être regardé comme une sorte de prédiction qu'une propriété se présentera pour chaque construction de nombres ; et l'affirmation de l'existence d'un nombre possédant une certaine propriété est interprétée comme une communication incomplète d'une proposition plus précise indiquant un nombre de la propriété en question ou un processus pour obtenir un tel nombre ; M. Hilbert appelle cela un « jugement partiel ».

Pour les mêmes raisons la négation d'une proposition générale ou d'une proposition existentielle concernant les nombres entiers n'a pas de sens précis. Il faut accentuer la négation pour parvenir à une proposition mathématique. Par exemple c'est une négation accentuée d'une proposition affirmant l'existence d'un nombre possédant une propriété P que de dire qu'un nombre de la propriété P ne peut pas être donné, ou encore que la supposition d'un nombre de cette propriété mène à une contradiction. Mais pour de telles négations accentuées la loi du tiers exclu n'est plus applicable.

Les complications caractéristiques qu'on rencontre dans la méthode dite « intuitionniste » de M. Brouwer proviennent de là.

Par exemple, on ne saurait généralement se servir d'alternatives comme celles-ci : une série à termes positifs est ou bien convergente ou divergente ; deux sommes convergentes représentent ou bien le même nombre réel ou des nombres différents.

59 | Dans la théorie des nombres entiers et des nombres algébriques on peut éviter ces difficultés et l'on réussit à conserver tous les théorèmes et les raisonnements essentiels.

En effet, Kronecker déjà a montré que l'essentiel de la théorie des corps algébriques peut être développé de son point de vue méthodique sans avoir recours à la totalité des nombres entiers.¹

Quant à l'analyse infinitésimale vous savez que M. Brouwer l'a développée conformément aux exigences de l'intuitionnisme. Mais ici il faut abandonner plusieurs théorèmes de l'analyse usuelle, par exemple le théorème fondamental que chaque fonction continue a un maximum dans un intervalle fermé. De la théorie des ensembles peu de choses reste valable dans la mathématique intuitionniste.

Nous dirions, en gros, que l'intuitionnisme est adapté à la théorie des nombres, la méthode à demi platonicienne, qui se sert de l'idée de la totalité des nombres entiers mais évite les concepts quasi-combinatoires, est adaptée

¹A cette fin KRONECKER a exposé dans ses cours, entre autres choses, une manière d'introduire la notion d'un nombre algébrique qui a été presque totalement oubliée, bien qu'elle soit la plus élémentaire pour définir cette notion. Cette méthode consiste à représenter les nombres algébriques par les changements de signes des polynômes irréductibles à une variable et à coefficients entiers rationnels ; en partant de cette définition on introduit les opérations élémentaires et les relations de grandeur pour les nombres algébriques et on prouve que les lois ordinaires du calcul y sont valables ; enfin on démontre qu'un polynôme à coefficients algébriques ayant des valeurs de différent signe pour deux arguments algébriques a et b s'annule entre a et b .

à la théorie arithmétique des fonctions et le platonisme usuel est adéquat à la théorie géométrique du continu.

Cette situation n'a rien d'étonnant, car c'est un procédé familier au mathématicien d'aujourd'hui de restreindre les suppositions dans chaque domaine de la science à celles qui y sont essentielles. Par cette restriction une théorie gagne en clarté méthodique ; et c'est dans cette direction que l'intuitionnisme se montre fécond.

Mais, comme vous savez, l'intuitionnisme ne se contente pas du tout d'un tel rôle ; il s'oppose à la mathématique usuelle et prétend représenter seul les vraies mathématiques.

D'autre part les mathématiciens en général ne sont pas du tout prêts à échanger la méthode éprouvée et élégante de l'analyse contre une méthode plus compliquée sans qu'il y ait pour cela une nécessité impérieuse.

60 | Il faut donc discuter la question plus à fond. Tentons de nous représenter plus distinctement la méthode intuitionniste, ses suppositions et son caractère philosophique.

L'instance à laquelle M. Brouwer recourt c'est l'évidence. Il prétend que les idées que l'intuitionnisme a pour base, nous sont données d'une manière évidente par l'intuition pure. En s'appuyant sur elle, il se montre en partie d'accord avec KANT. Mais tandis que pour Kant il existe une intuition pure en regard de l'espace et du temps, M. Brouwer ne reconnaît que l'intuition du temps, de laquelle il dérive, comme Kant, l'intuition du nombre.

Quant à cette position philosophique, il me semble qu'il faut concéder à Brouwer deux points essentiels : l'un, que le concept du nombre entier est originairement intuitif. A cela rien n'est changé par les recherches des logiciens, sur lesquelles je reviendrai plus tard. L'autre, qu'il ne faut pas coordonner l'arithmétique et la géométrie de la manière que Kant l'a fait. Le concept du nombre est plus élémentaire que les concepts géométriques.

Cependant nier pleinement l'existence d'une intuition géométrique semble un peu précipité. Mais laissons de côté ici cette question ; il y en a d'autres plus urgentes : Est-ce vraiment sûr que l'évidence donnée par l'intuition arithmétique s'étende exactement aussi loin qu'il le faut pour délimiter l'arithmétique intuitionniste ? Et finalement : Est-il possible de faire une limite exacte entre ce qui est évident et ce qui est seulement plausible ?

Je crois qu'il faut répondre par la négative à ces deux questions. D'abord quant à l'évidence en général, vous savez que sur elle les hommes et les savants eux-mêmes ne sont pas d'accord. Aussi le même homme rejette quelquefois des suppositions qu'il regardait comme évidentes.

Un exemple d'une question d'évidence très discutée à propos de laquelle il y a eu discordance jusqu'à maintenant, c'est celle de l'axiome des parallèles. Je crois que la critique qui s'est dirigée contre cet axiome s'explique en partie par la place singulière qu'il a dans le système d'Euclide. Divers autres axiomes y étaient omis, de sorte que celui des parallèles se distinguait des autres par sa complication.

61 | A ce propos je me contenterai de remarquer la chose suivante : On peut douter, en somme, de l'évidence géométrique, avoir l'opinion qu'elle s'étend seulement aux faits topologiques ou aux faits exprimés par les axiomes projectifs. On peut d'autre part prétendre que l'intuition géométrique n'est pas exacte. Ces opinions sont conséquentes et toutes ont des arguments en leur faveur. Mais prétendre que la géométrie métrique possède une évidence restreinte aux lois communes à la géométrie d'Euclide et à celle de Bolyai-Lobatschewskij, évidence métrique exacte qui ne garantirait pas l'existence d'un carré exact, me semble assez artificiel. Et pourtant ce fut le point de vue de plusieurs mathématiciens.

Il s'agissait pour nous de souligner les difficultés qu'on rencontre en cherchant à délimiter le domaine de l'évidence.

Cependant ces difficultés n'empêchent pas qu'il y ait des évidences incontestables, et certainement l'intuitionnisme offre de telles évidences. Mais se tient-il parfaitement dans le domaine de cette évidence élémentaire ? Ce n'est pas complètement hors de doute et cela par la raison suivante. L'intuitionnisme n'a aucun égard à la possibilité que les opérations exigées par la méthode récurrente de construire des nombres puissent cesser, pour des nombres assez grands, d'avoir une signification concrète. Partant de deux nombres entiers k, l on passe sans autre à k^l ; ce procédé mène en peu de pas à des nombres qui dépassent de loin tous ceux intervenant dans l'expérience comme $67^{(257^{729})}$.

L'intuitionnisme de même que la mathématique usuelle prétend que ce nombre peut être représenté par un développement décimal. Ne pourrait-on pas pousser plus loin la critique que l'intuitionnisme fait aux affirmations existentielles et soulever la question : Qu'est-ce que signifie l'affirmation de l'existence d'un développement décimal du nombre précédent, puisqu'effectivement nous ne sommes pas à même de nous le procurer ?

M. Brouwer recourt à l'intuition ; mais on peut douter qu'il y ait vraiment une évidence intuitive. N'est-ce pas plutôt la méthode générale d'analogie qui est appliquée ici, consistant à étendre aux nombres non accessibles les relations qu'on peut vérifier concrètement pour les nombres accessibles ? En

62 effet, la raison d'appliquer cette analogie est d'autant plus forte qu'il n'y a pas une limite précise entre les nombres qui sont accessibles et ceux qui ne le sont pas.

On pourrait introduire la notion d'un processus « effectuable » et restreindre implicitement la signification des définitions récurrentes aux opérations effectuelles. Il faudrait seulement, pour éviter des contradictions, s'abstenir d'appliquer le principe du tiers exclu à la notion « effectuable ». Mais une telle abstention va de soi pour l'intuitionnisme.

J'espère que je serai bien compris : je suis loin de recommander cette manière de faire l'arithmétique avec la dite restriction. Je tiens seulement à montrer que l'intuitionnisme prend pour base des propositions dont on pourrait douter et en principe se débarrasser ; mais la théorie résultante serait assez maigre.

Il n'est donc pas absolument hors de doute que le domaine de la pleine évidence s'étende sur l'intuitionnisme tout entier. D'autre part, plusieurs mathématiciens reconnaissent la pleine évidence de l'arithmétique intuitionniste et soutiennent de même l'évidence du concept de la série des nombres dans le sens suivant : l'affirmation de l'existence d'un nombre ne nécessite pas qu'il faille, directement ou par récurrence, donner une limite pour ce nombre. Du reste, nous venons de voir combien une telle limitation est en général loin d'une présentation vraiment concrète.

En résumé, le point de vue de l'évidence intuitive ne décide pas univoquement en faveur de l'intuitionnisme.

Il faut en outre observer que les évidences, dont l'intuitionnisme se sert dans ses raisonnements, ne sont pas toutes d'un caractère immédiat. Il y joint aussi des réflexions abstraites. En effet, on se sert souvent dans l'intuitionnisme d'énoncés contenant une hypothèse générale de la forme : « si chaque nombre n possède la propriété $A(n)$, alors il y a B ».

Un tel énoncé s'interprète au sens intuitionniste de la manière suivante : « S'il est prouvé que chaque nombre n possède la propriété $A(n)$, alors B ». Ici il y a une hypothèse d'un caractère abstrait, car les méthodes de démonstration n'étant pas fixées dans l'intuitionnisme, la condition que quelque chose soit prouvé n'est pas intuitivement déterminé.

63 | Il est vrai qu'on peut aussi interpréter le dit énoncé, en l'envisageant comme un jugement partiel, c'est-à-dire comme une indication d'un raisonnement conduisant de la dite hypothèse à la conclusion B , raisonnement qu'on présente effectivement. (C'est à peu près le sens de l'interprétation que M. Kolmogoroff donne de l'intuitionnisme.) De toutes manières le raisonne-

ment doit partir de l'hypothèse générale, qui ne peut être intuitivement fixée. C'est donc une réflexion abstraite.

Dans l'exemple ici considéré la partie abstraite est plutôt restreinte. Le caractère abstrait augmente quand on superpose les hypothèses, c'est-à-dire quand on forme des propositions comme les suivantes : « Si de l'hypothèse que $A(n)$ est valable pour chaque nombre n , on peut conclure B , alors il y a C », ou bien : « Si de l'hypothèse que l'hypothèse A mène à une contradiction, il suit une contradiction, alors B » ou d'une manière brève : « Si l'absurdité de A est absurde, alors B ». On peut augmenter encore l'abstraction des énoncés.

C'est par l'application systématique de ces formes de raisonnements abstraits que M. Brouwer a dépassé les méthodes de Kronecker et qu'il a réussi à établir une logique générale intuitionniste, qui a été systématisée par M. Heyting.

En considérant cette logique intuitionniste dans laquelle les notions de conséquence sont appliquées sans réserves et en comparant la méthode, dont on se sert ici, à la méthode usuelle, nous nous apercevons que la caractéristique générale de l'intuitionnisme n'est pas de relever de l'intuition pure, mais plutôt du rapport au sujet réfléchissant et agissant pour tout le développement de la science.

C'est un point de vue méthodique extrême. Il est contraire à la manière habituelle de faire des mathématiques consistant à établir des théories détachées autant que possible du sujet pensant.

Cette constatation nous fait douter que l'intuitionnisme soit l'unique méthode légitime de raisonner en mathématiques. Car si même nous concédons que la tendance de se détacher du sujet a été poussée trop loin sous le règne du platonisme, nous ne sommes pas portés à croire que le vrai se trouve dans l'extrême contraire. Attentifs aux deux possibilités ouvertes, nous tendrons
64 | plutôt à effectuer par elles une adaptation de la méthode au caractère de l'objet recherché dans chaque domaine de la science.

Par exemple pour la théorie des nombres l'emploi du concept intuitif d'un nombre est le plus naturel. En effet, on réussit à fonder ainsi la théorie des nombres, sans introduire un axiome tel que celui de l'induction complète ou un axiome de l'infini comme on le trouve chez Dedekind et Russell.

De plus, en évitant le concept intuitif du nombre on est conduit à introduire un concept plus général comme celui d'une proposition, d'une fonction ou d'une correspondance quelconques, concepts qui ne sont en général pas délimités objectivement. Il est vrai qu'un tel concept peut être précisé selon

la méthode axiomatique comme dans la théorie axiomatique des ensembles, mais alors le système d'axiomes est assez compliqué.

Vous savez que FREGE a essayé de déduire l'arithmétique de la logique pure en envisageant celle-ci comme la théorie générale de l'univers des objets mathématiques. Bien qu'à cette entreprise d'un platonisme absolu la base ait été soustraite par le paradoxe de RUSSELL-ZERMELO, l'école des logiciens n'a pas abandonné l'idée d'enfermer l'arithmétique dans un système logique. Au lieu d'un platonisme absolu on a introduit ici des suppositions initiales. Cependant du fait de celles-ci le système érigé perd le caractère de la logique pure.

Dans le système des *Principia Mathematica* ce ne sont pas seulement les axiomes de l'infini et de la réductibilité qui dépassent la logique pure, mais déjà la conception initiale d'un domaine universel des individus et d'un domaine des prédicats a un caractère qui n'est pas purement logique. Que nous ayons à disposition l'univers des choses dans un état préparé pour le traitement théorique, les choses étant ordonnées en sujets et prédicats, c'est en effet une supposition faite *ad hoc*.

65 | Mais même avec de telles suppositions accessoires on ne réussit pas à annexer l'arithmétique totale au système de la logique. Car ce système se développant suivant des règles fixes, il faudrait qu'on puisse obtenir au moyen d'une série fixe de règles tous les théorèmes de l'arithmétique. Or ce n'est pas le cas : comme M. GÖDEL l'a démontré, l'arithmétique dépasse chaque formalisme donné. (Du reste la même remarque s'applique à la théorie axiomatique des ensembles.)

D'ailleurs le désir de déduire l'arithmétique de la logique dérive de l'opinion traditionnelle que la logique est à l'arithmétique dans le rapport du général au particulier. En vérité, à ce qu'il me semble, l'abstraction mathématique n'a pas un moindre degré, mais plutôt une autre direction que l'abstraction logique.

Ces considérations ne diminuent en rien la valeur intrinsèque des recherches des logiciens en vue de développer la logique systématique et de formaliser les démonstrations mathématiques. Ici il s'agissait seulement de défendre la thèse que pour la théorie des nombres la méthode intuitive est la mieux adaptée.

Au contraire, dans la théorie du continu, donnée par l'analyse infinitésimale, la méthode intuitionniste paraît assez artificielle. L'idée du continu est une idée géométrique que l'analyse infinitésimale exprime en des termes d'arithmétique.

La méthode intuitionniste de représenter le continu est-elle mieux adaptée

à l'idée du continu que la méthode usuelle ?

M. WEYL veut nous le faire sentir. Il reproche à l'analyse ordinaire de décomposer le continu en des points singuliers. Mais ce reproche ne s'adresse-t-il plutôt au demi-platonisme qui envisage le continu comme un ensemble de lois arithmétiques qu'à la méthode usuelle ? En effet, pour la méthode usuelle il y a une analogie tout à fait satisfaisante entre la manière dont un point fixe se détache du continu et la manière dont un nombre réel défini par une loi arithmétique se détache de l'ensemble de tous les nombres réels dont les éléments n'interviennent en général qu'implicitement, en vertu du concept quasi-combinatoire d'une suite.

Cette analogie me semble mieux convenir à la nature du continu que celle que l'intuitionnisme établit entre le caractère flou du continu et les incertitudes des problèmes arithmétiques irrésolus.

Il est vrai que dans l'analyse usuelle la notion d'une fonction continue, et aussi celle d'une fonction possédant une dérivée, ont une généralité dépassant beaucoup notre représentation intuitive d'une courbe. Néanmoins on réussit
66 avec cette analyse | à établir le théorème du maximum d'une fonction continue et le théorème de Rolle, et ainsi on rejoint la conception intuitive.

L'analyse intuitionniste, bien qu'elle parte d'une notion beaucoup plus restreinte d'une fonction, ne parvient pas à des théorèmes aussi simples, elle doit plutôt les remplacer par des théorèmes plus compliqués. Cela provient de ce que la conception intuitionniste du continu ne contient pas le caractère d'une totalité lequel appartient incontestablement à l'idée géométrique du continu. Et c'est ce caractère qui s'opposerait à une arithmétisation parfaite du continu.

Ces considérations nous font remarquer, que la dualité — arithmétique et géométrie — n'est pas sans rapport avec l'opposition entre l'intuitionnisme et le platonisme. Dans l'arithmétique apparaît le concept du nombre. Il est originairement intuitif, puis il s'y superpose l'idée de la totalité des nombres entiers. Tandis que dans la géométrie l'idée platonicienne de l'espace est primordiale, et c'est sur ce fond que des procédés intuitionnistes de constructions de figures viennent prendre place.

Ceci suffit à montrer que ces deux tendances, intuitionniste et platonicienne, sont nécessaires, elles se complètent et il faudrait se violenter pour renoncer à l'une d'elles.

Mais la dualité des deux tendances, de même que celle d'arithmétique et de géométrie, n'a pas le caractère d'une pleine symétrie. Comme nous l'avons déjà remarqué, il n'est pas convenable de coordonner pleinement

l'arithmétique et la géométrie : L'idée du nombre est plus immédiate à l'esprit que l'idée de l'espace. De même il faut reconnaître que les suppositions du platonisme ont un caractère transcendant qui ne se trouve pas dans l'intuitionnisme.

C'est aussi ce caractère transcendant qui exige de prendre quelques précautions à l'égard de chaque supposition platonicienne. Car, même quand une telle supposition n'est pas du tout arbitraire et qu'elle s'offre naturellement à l'esprit, il se peut pourtant que le principe dont elle sort ne permette qu'une application restreinte, en dehors de laquelle on tomberait dans une contradiction.

67 A cette éventualité il faut prêter d'autant plus d'attention que la tendance à la simplicité nous engage à donner aux principes une portée aussi grande que possible. Et la nécessité d'une restriction n'est souvent pas remarquée.

C'était le cas, comme nous l'avons vu, pour le principe de la totalité qui a été poussé trop loin par le platonisme absolu. Ici la nécessité d'une restriction ne s'est montrée que par la découverte du paradoxe de Russell-Zermelo.

Il est donc désirable de trouver une méthode pour nous assurer que les suppositions platoniciennes faites à la base des mathématiques ne dépassent pas les limites permises. Les suppositions dont il s'agit se ramènent à diverses formes du principe de la totalité et du principe de l'analogie ou de la permanence des lois. Et la condition restreignant l'application de ces principes n'est autre que celle de la non-contradiction des conséquences qui se déduisent des suppositions fondamentales.

Comme vous le savez, M. Hilbert poursuit l'idée de nous donner de telles assurances de non-contradiction et sa théorie de la démonstration vise à cette fin.

Cette théorie s'appuie en partie sur les résultats des logiciens. Ces derniers ont montré que les raisonnements appliqués en arithmétique, en analyse et dans la théorie des ensembles peuvent être formalisés. C'est-à-dire qu'ils peuvent être exprimés en symboles et en procédés symboliques qui se déroulent suivant des règles fixes. Aux propositions initiales correspondent des formules initiales et aux conséquences logiques correspondent des suites de formules qui dérivent les unes des autres d'après des règles données. Dans ce formalisme une supposition platonicienne est représentée par une formule initiale ou par une règle établissant un mode de passer des formules obtenues à d'autres formules. De cette manière la recherche des possibilités de démonstration se réduit à des problèmes comme ceux que l'on rencontre dans la théorie élémentaire des nombres. En particulier la non-contradiction

de la théorie sera prouvée si l'on réussit à démontrer qu'il est impossible de déduire deux formules contradictoires A et \overline{A} (un trait représentant la négation). Cet énoncé qu'il s'agit de démontrer est de même structure que celui, par exemple, de l'impossibilité de satisfaire à l'équation $a^2 = 2b^2$ par deux nombres entiers a et b .

68 Donc par la réduction symbolique, la question de la non-contradiction d'une théorie se ramène à un problème d'un caractère arithmétique élémentaire.

Partant de cette idée fondamentale M. Hilbert a esquissé un programme détaillé d'une théorie de la démonstration en indiquant également les idées directrices des raisonnements. Son intention était de s'en tenir aux considérations intuitives et combinatoires ; c'était à elles qu'il restreignait d'abord son « point de vue fini ».

Dans ce cadre la théorie a été développée jusqu'à un certain point. Plusieurs mathématiciens y ont contribué : Ackermann, v. Neumann, Skolem, Herbrand, Gödel, Gentzen.

Ces recherches sont cependant restées dans un domaine relativement restreint. En effet, on ne parvint même pas à démontrer la non-contradiction de la théorie axiomatique des nombres entiers. On sait que la représentation symbolique de cette théorie s'obtient en ajoutant au calcul logique ordinaire les axiomes de Peano formalisés et les définitions récurrentes de la somme $a + b$ et du produit $a \cdot b$.

Cette situation fut éclaircie par un théorème général de Gödel d'après lequel une démonstration de la non-contradiction d'une théorie formalisée ne peut être représentée au moyen du formalisme considéré. De ce théorème découle la proposition plus spéciale suivante : il est impossible de démontrer par les méthodes élémentaires combinatoires la non-contradiction d'une théorie formalisée permettant d'exprimer toute démonstration, faite par les méthodes élémentaires combinatoires, d'une proposition arithmétique.

Or cette proposition s'applique, à ce qu'il semble, au formalisme de la théorie axiomatique des nombres. Du moins, tous les essais faits jusqu'à maintenant ne nous ont fourni aucun exemple d'une démonstration élémentaire combinatoire qu'on ne puisse exprimer dans ce formalisme, et les méthodes, par lesquelles on réussit, dans les cas considérés, à traduire une démonstration dans le dit formalisme, semblent suffire généralement.

69 En nous confiant à cette apparence,² nous aboutissons à la conclusion

²En s'efforçant de démontrer la possibilité de traduire chaque démonstration élémentaire combinatoire d'une proposition arithmétique dans le formalisme de la théorie

qu'il faut un moyen plus puissant que les méthodes élémentaires combinatoires pour prouver la non-contradiction de la théorie axiomatique des nombres. Une nouvelle découverte de M. Gödel et M. Gentzen nous conduit à une telle méthode plus puissante. Ils ont montré, indépendamment l'un de l'autre, que la non-contradiction de l'arithmétique intuitionniste entraîne la non-contradiction de la théorie axiomatique des nombres. On a obtenu ce résultat en se servant de la formalisation de l'arithmétique et de la logique intuitionniste effectuée par M. Heyting. Le raisonnement se fait par les méthodes élémentaires, d'une manière assez simple. Pour tirer du dit résultat la conclusion que la théorie axiomatique des nombres est non-contradictoire, il suffit de s'appuyer sur la non-contradiction de l'arithmétique intuitionniste.

Cette démonstration de la non-contradiction de la théorie axiomatique des nombres nous montre entre autres que l'intuitionnisme dépasse essentiellement par ses raisonnements abstraits les méthodes élémentaires combinatoires.

La question qui se pose maintenant est de savoir si la méthode renforcée de la théorie de la démonstration obtenue en admettant les raisonnements abstraits de l'intuitionnisme nous mettrait en état de démontrer la non-contradiction de l'analyse infinitésimale. La réponse serait très importante et même décisive à l'égard de la théorie de la démonstration et encore, me semble-t-il, à l'égard du rôle qu'il faut attribuer à la méthode intuitionniste.

Les recherches sur les fondements des mathématiques sont en pleine évolution. Plusieurs questions primordiales restent ouvertes et nous ne savons pas ce qu'il nous sera réservé de découvrir dans ce domaine. Mais ces recherches excitent, par leurs aspects changeants, notre curiosité, et voilà un sentiment qui n'est pas suscité au même degré par les parties plus classiques de la science, qui ont atteint une plus grande perfection.

Je tiens à remercier M. le professeur WAVRE qui a bien voulu m'aider à améliorer le texte de cette conférence en vue de sa publication. Je remercie aussi M. RUEFF qui a eu la bonté de revoir la première rédaction au point de vue du français.

axiomatique des nombres, on se trouve en face de la difficulté de délimiter précisément le domaine des méthodes élémentaires combinatoires.