

Zur Einführung[†] **(1939)**

Introduction

(*Grundlagen der Mathematik*, Bd. 2, Berlin: Springer, S. vi–ix)

vi | Das vorliegende Buch soll einer eingehenden Orientierung über den gegenwärtigen Stoff der Hilbertschen Beweistheorie dienen. Wenngleich das bisher hier Erreichte gemessen an den Zielen der Theorie sehr bescheiden ist, so liegt doch ein reichlicher Stoff an prägnanten Ergebnissen, an Gesichtspunkten und Beweisgedanken vor, die zur Kenntnis zu bringen als lohnend erscheint.

Für die inhaltliche Gestaltung dieses zweiten Bandes waren durch den Zweck des Buches zwei Hauptthemata vorgezeichnet. – Es handelte sich einmal darum, die hauptsächlich, an das ε -Symbol sich knüpfenden beweistheoretischen Ansätze Hilberts und ihre Durchführung zur eingehenden Darstellung zu bringen.

Die hier vorliegenden Untersuchungen haben zum erheblichen Teil bisher überhaupt noch keine über bloße Andeutungen hinausgehende Publikation gefunden, und es besteht daher abgesehen von dem gegenständlichen Interesse auch eine wissenschaftliche Verpflichtung von Seiten der Hilbertschen Schule, die verschiedenen erfolgten Ankündigungen über das Vorhandensein von Beweisen durch das wirkliche Vorführen dieser Beweise zu rechtfertigen – ein Erfordernis, welches in diesem Fall um so dringlicher ist, als man sich anfangs (noch bis zum Jahre 1930) über die Tragweite der Beweise Ackermanns und v. Neumanns, die aus dem einen der genannten Hilbertschen Ansätze hervorgingen, getäuscht hat.

In den §§ 1 und 2 werden nun jene bisher unpublizierten Beweise ausführlich dargelegt, wobei insbesondere auch die Einschränkung, welche hier noch für

[†]Two lines at the end of the text date the text and identify its author:

Zürich, im Februar 1939

Paul Bernays

den Nachweis der Widerspruchsfreiheit des zahlentheoretischen Formalismus besteht, deutlich ersichtlich gemacht wird.

Mit Hilfe der einen von den hier dargelegten Methoden ergibt sich zugleich auch ein einfacher Zugang zu einer Reihe von Theoremen, durch welche die beweistheoretische Untersuchung des Prädikatenkalküls eine befriedigende Abrundung erhält, und die auch bemerkenswerte Anwendungen auf die Axiomatik gestatten. Im Mittelpunkt dieser Betrachtungen steht ein von J. Herbrand zuerst ausgesprochener und bewiesener Satz der theoretischen Logik, für den wir auf dem genannten Wege einen natürlichen und einfachen Beweis erhalten.

vii Die Erörterung der Anwendungen dieses Satzes gibt zugleich Gelegenheit zu einigen Ausführungen über das Entscheidungsproblem, und | anknüpfend hieran wird im § 4 eine (bereits im Band I angekündigte) beweistheoretische Verschärfung des Gödelschen Vollständigkeitssatzes bewiesen.

Das zweite Hauptthema bildet die Auseinandersetzung des Sachverhalts, auf Grund dessen sich die Notwendigkeit ergeben hat, den Rahmen der für die Beweistheorie zugelassenen inhaltlichen Schlußweisen gegenüber der vorherigen Abgrenzung des „finiten Standpunktes“ zu erweitern. Bei diesen Betrachtungen steht die Gödelsche Entdeckung der deduktiven Unabgeschlossenheit eines jeden scharf abgegrenzten und hinlänglich ausdrucksfähigen Formalismus im Mittelpunkt. Die beiden Gödelschen Theoreme, in denen sich dieser Tatbestand ausspricht, werden eingehend erörtert, sowohl was ihre Beziehung zu den semantischen Paradoxien sowie was die Bedingungen ihrer Gültigkeit und die Durchführung des Nachweises – der für das zweite dieser Theoreme bei Gödel nur angedeutet ist – und auch was ihre Anwendbarkeit auf den vollen zahlentheoretischen Formalismus betrifft.

Die Diskussion der Erweiterung des finiten Standpunktes mündet in die Betrachtung des neueren Gentzenschen Widerspruchsfreiheitsbeweises für den zahlentheoretischen Formalismus. Von diesem Beweis ist hier freilich nur das methodisch Neuartige, nämlich die Anwendung einer speziellen Art der Cantorsche „transfiniten Induktion“, zur genaueren Darstellung und Erörterung gebracht.

Daß nicht der ganze Beweis zur Darstellung gelangte, hatte vor allem den äußeren Grund, daß die neuere, erst wirklich durchsichtige Fassung des Gentzenschen Beweises zu Beginn der Drucklegung dieses Bandes noch nicht erschienen war. Der Gentzensche Beweis bezieht sich übrigens nicht unmittelbar auf die in dem Buche behandelte Form des zahlentheoretischen Formalismus. Kürzlich ist es L. Kalmár gelungen, diesen Beweis so zu modifizieren,

daß er direkt auf den in unserem Buch (im § 8 des ersten Bandes) entwickelten zahlentheoretischen Formalismus anwendbar ist, wobei sich auch noch gewisse Vereinfachungen ergeben.

Gegenwärtig ist W. Ackermann dabei, seinen früheren (im § 2 des vorliegenden Bandes dargestellten) Widerspruchsfreiheitsbeweis durch Anwendung einer transfiniten Induktion in der Art, wie sie von Gentzen benutzt wird, so auszugestalten, daß er für den vollen zahlentheoretischen Formalismus Gültigkeit erhält.

Wenn dieses gelingt – wofür alle Aussicht besteht –, so wird damit jener ursprüngliche Hilbertsche Ansatz hinsichtlich seiner Wirksamkeit rehabilitiert sein. Jedenfalls kann schon auf Grund des Gentzenschen Beweises die Auffassung vertreten werden, daß das zeitweilige Fiasko der Beweistheorie lediglich durch eine Überspannung der methodischen Anforderung verschuldet war, die man an die Theorie gestellt hat. Freilich die ausschlaggebende Entscheidung über das Schicksal der Beweistheorie wird erst an Hand der Aufgabe des Nachweises der Widerspruchsfreiheit für die Analysis erfolgen.

viii

Zu dem in den §§ 1–5 des vorliegenden Bandes entwickelten Gedanken- gang sind noch einige abgesonderte Betrachtungen als „Supplemente“ beigefügt. Zwei von diesen bilden Ergänzungen zu den Ausführungen des § 5: das Supplement II, welches von der Präzisierung des Begriffs der berechenbaren Funktion handelt (die in neuerer Zeit nach verschiedenen Methoden erfolgreich ausgeführt worden ist) und diejenigen Tatsachen aus diesem Fragenkreis vorführt, die sich leicht im Anschluß an die übrigen Ausführungen des Buches entwickeln lassen, wobei als Anwendung auch der Satz von A. Church über die Unmöglichkeit einer allgemeinen Lösung des Entscheidungsproblems für den Prädikatenkalkül gebracht wird; ferner das Supplement III, in welchem einige Fragen der deduktiven Aussagenlogik behandelt werden und das insbesondere auch Ergänzungen zu den im § 3 des ersten Bandes sich findenden Ausführungen über die „positive Logik“ enthält.

Im Supplement IV werden verschiedene deduktive Formalismen für die Analysis aufgestellt und es wird gezeigt, wie man aus diesen die Theorie der reellen Zahlen und auch die der Zahlen der zweiten Zahlenklasse gewinnt.

Das Supplement I enthält einen Überblick über die Regeln des Prädikatenkalküls und seiner Anwendung auf formalisierte Axiomensysteme, sowie Bemerkungen über mögliche Modifikationen des Prädikatenkalküls, ferner auch eine Zusammenstellung verschiedener Begriffsbildungen und Ergebnisse aus dem ersten Band.

In Anbetracht des schon sehr stark angeschwollenen Stoffes sind verschie-

dene beweistheoretische Themata leider nicht mehr in dem Buch zur Sprache gekommen, so insbesondere das zuerst von Herbrand in seiner Thèse^a und neuerdings eingehender von Arnold Schmidt (*vide* [?]) behandelte Thema des mehrsortigen Prädikatenkalküls.

Auch gewisse von den Betrachtungen, die in den Hilbertschen Vorlesungen und den Besprechungen mit Hilbert vorkamen, die jedoch teils vereinzelte Bemerkungen geblieben sind, teils noch keine hinlängliche Abklärung erfahren haben, sind nicht zur Darstellung gelangt, so insbesondere die Ansätze betreffend die Definitionen von Zahlen der zweiten Zahlenklasse durch gewöhnliche (d. h. nicht transfinite) Rekursionen, sowie diejenigen betreffend die Verwendung von Gattungssymbolen, insbesondere auch von solchen, die durch explizite oder rekursive Definitionen eingeführt werden.

ix Der vorliegende Band ist in engem Anschluß an den ersten Band abgefaßt worden; auch ist der Zusammenhang mit diesem durch häufige verweisende Seitenangaben verstärkt. Andererseits soll die im Supplement I gegebene Zusammenstellung von Termini und Sätzen aus dem ersten Band sowie die Rekapitulation im Teil b) aus § 4, Abschnitt 1 dazu dienen, die Lektüre des zweiten Bandes weitgehend von der des ersten Bandes unabhängig zu machen. Ein Leser, der schon etwas mit logischer Formalisierung und mit der Problemstellung der Beweistheorie vertraut ist, wird jedenfalls die Ausführungen des zweiten Bandes auch ohne Kenntnis des ersten verfolgen können.

Jedenfalls sei dem Leser des vorliegenden Bandes empfohlen, daß er vor dem § 1 zuerst das Supplement I ansehe. Ferner möge er von den Seitenverweisungen stets nur dann Gebrauch machen, wenn es ihm in dem betreffenden Zusammenhang ein Bedürfnis ist.

Zu dem im § 2 gegebenen Hinweis auf eine mögliche Auslassung bei der Lektüre sei hier noch der weitere hinzugefügt, daß der ziemlich mühsame Abschnitt 2 des § 4 überschlagen werden kann.

Was die Paragraphenangaben betrifft, so beziehen sich die Paragraphennummern 1 bis 5, wenn nichts Besonderes angegeben ist, auf den vorliegenden zweiten Band, während die Paragraphennummern 6 bis 8 nur beim ersten Band vorkommen.

^a *Vide* [?].