

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN70K: Clase Auxiliar
Algoritmo de Karmarkar

Marcel Goic F.¹

¹Esta es una versión bastante preliminar por lo que puede contar con numerosas faltas de ortografía y errores no forzados. Si encuentran alguno favor de denunciarlo a mgoic@ing.uchile.cl

1. El Algoritmo de Karmarkar.

Consideremos un problema de la forma ²:

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín } z &= c^t x \\ \text{s.a } Ax &= 0 \\ x &\in S \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} S &= \text{Simplex standar en } \mathbb{R}^n \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{1}^t x = 1, x \geq 0\} \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} c, x &\in \mathbb{R}^n & A &\in \mathbb{R}^{m \times n} \\ \mathbf{1} &\in \mathbb{R}^n \text{ un vector con componentes } 1 \end{aligned}$$

Supongamos además que:

1. $\text{rango}(A) = n$
2. $A(\mathbf{1}_n^{\frac{1}{n}}) = 0 \Rightarrow \mathbf{1}_n^{\frac{1}{n}}$ es factible para (P)
3. $z^* = 0$

1.1. Projective Scaling Algorithm (Karmarkar, 1984).

1. Inicialización: $x^1 = \mathbf{1}_n^{\frac{1}{n}}$
2. Definimos:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \text{diag}(x^k) \\ \bar{A} &= A\bar{x} \\ \bar{c} &= \bar{x}c \end{aligned}$$

Luego, la matriz asociada a las restricciones activas (que coincide con la region factible porque solo hay restricciones de igualdad) viene dada por:

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \mathbf{1}^t \end{bmatrix}$$

Y por tanto la proyección del gradiente de la función objetivo sobre las restricciones activas viene dada por:

$$\bar{d} = -(I - \bar{B}^t(\bar{B}^t\bar{B})^{-1}\bar{B})\bar{c}$$

²Como veremos mas adelante, todo PL puede ser escrito en la forma exigida por el algoritmo

$$3. \text{ Sea } \hat{x}^{k+1} = \frac{1}{n} \cdot \mathbf{1} + \frac{\alpha \bar{d}}{n \|\bar{d}\|}$$

Entonces

$$x^{k+1} = \frac{\bar{x} \hat{x}}{\mathbf{1}^t \bar{x} \hat{x}}$$

4. Criterio de detención:

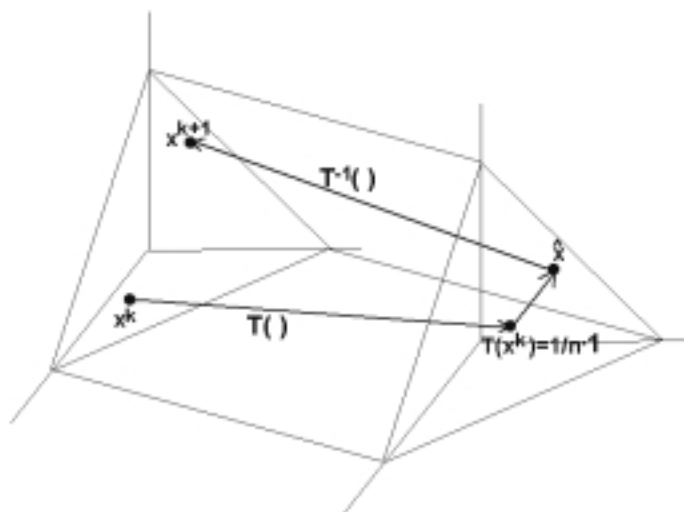
- Si $c^t x^{k+1} < \epsilon \Rightarrow$ terminar.
- Si no, $k \rightarrow k + 1$. Ir a 1.

5. Redondear la solución.

Observación: α y ϵ son parámetros de la implementación. α se elige en $[0,1]$ siendo un valor típico el de $2/3$. ϵ se escoge pequeño (Recordar que $z^* = 0$).

1.2. Interpretación geométrica

Dado un punto x^k se aplica una transformación que nos cambia de espacio a otro en el cual el punto x^k corresponde al centro del simplex standar S^3 . En este nuevo espacio, nos movemos en la dirección \bar{d} en una cantidad α/n .



$$T(x) = \frac{\bar{x}^{-1}x}{\mathbf{1}^t \bar{x}^{-1}x} \Rightarrow T^{-1}(y) = \frac{\bar{x}y}{\mathbf{1}^t \bar{x}y}$$

³En efecto, $T()$ puede descomponerse en otras 2 transformaciones: $T = T_1 \cdot T_2$ donde:

$T_1 : x \mapsto z = n^{-1} \bar{x}^{-1}x$; diagonal scaling (centrado)
 $T_2 : z \mapsto y = \frac{1}{\mathbf{1}^t z} z$; radial projection (proyección sobre simplex standar)

1.3. Procedimiento para llevar un PL a la forma exigida por Kar-markar

- Sabemos que cualquier PL puede llevarse a la forma:

$$\begin{aligned} & \text{mín } c^t x \\ \text{s.a } & Ax = b \\ & x \geq 0 \quad x = (x_1 \dots x_n) \end{aligned}$$

- Agregamos una restricción $\mathbf{1}^t \mathbf{x} \leq Q$, que si el problema es acotado siempre puede escribirse:

$$\begin{aligned} & \text{mín } c^t x \\ \text{s.a } & Ax = b \\ & \mathbf{1}x + x_{n+1} = Q \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

- Homogenizamos las restricciones haciendolas iguales a 0. Para ello agregamos una variable $x_{n+2} = 1$.

$$\begin{aligned} & \text{mín } c^t x \\ \text{s.a } & Ax - bx_{n+2} = 0 \\ & \mathbf{1}x + x_{n+1} - Qx_{n+2} = 0 \\ & \mathbf{1}x + x_{n+1} + x_{n+2} = Q + 1 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

- Necesitamos que la tercera ecuación quede igual a 1, lo que logramos por medio de un cambio de variable: $x_i = (Q + 1)y_i$

$$\begin{aligned} & \text{mín } c^t y \\ \text{s.a } & Ay - by_{n+2} = b \\ & \mathbf{1}y + y_{n+1} - Qy_{n+2} = 0 \\ & \mathbf{1}y + y_{n+1} + y_{n+2} = 1 \\ & y_i \geq 0 \end{aligned}$$

- Necesitamos incorporar que $\mathbf{1} \frac{1}{n}$ sea factible. Para ello agregamos variables artificiales y_{n+3}

$$\begin{aligned} & \text{mín } c^t y + My_{n+3} \\ \text{s.a } & Ay - by_{n+2} - (A\mathbf{1} - b)y_{n+3} = b \\ & \mathbf{1}y + y_{n+1} - Qy_{n+2} - (n + 1 - Q)y_{n+3} = 0 \\ & \mathbf{1}y + y_{n+1} + y_{n+2} + y_{n+3} = 1 \\ & y_i \geq 0 \end{aligned}$$

Observación: Para que las nuevas restricciones sean equivalentes a las anteriores, necesitamos que $y_{n+3} = 0$. Esto se logra penalizando mucho y_{n+3} ($M \gg 1$).

- Solo nos falta exigir que $z^* = 0$, lo cual se puede hacer de varias maneras. Por ejemplo minimizando la brecha entre los problemas primal y dual como se vera en el Problema 2.

2. Problemas

2.1. Problema 1. Winston, sección 10.06, pag 599.

Sea el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{mín } z &= x_1 + 3x_2 - 3x_3 \\ \text{s.a } \quad x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Resuelva utilizando el algoritmo de karmarkar.

Hint: Itere un par de veces mejorando la función objetivo. No es necesario realizar un redondeo final.

Solución

Notamos que esta en la forma exigida por karmarkar y además:

- $(1/3, 1/3, 1/3)$ es factible.
- $z^* = 0$ ⁴.

Tenemos $x^1 = (1/3, 1/3, 1/3)$

- ITERACIÓN 1:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \text{diag}(x^1) = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \\ \bar{A} &= A\bar{x} = (0, 1, -1) \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} = (0, 1/3, -1/3) \\ \bar{c} &= \bar{x}c = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} (1, 3, -3) = (1/3, 1, -1) \\ \bar{B} &= \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \mathbf{1}^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & -1/3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \bar{d} &= -(I - \bar{B}^t(\bar{B}^t\bar{B})^{-1}\bar{B})\bar{c} = \dots = (-2/9, 3/8, 1/9) \\ \|\bar{d}\| &= \frac{\sqrt{6}}{9} \end{aligned}$$

⁴En efecto, $3x_1 - 3x_2 = 0$ y por tanto el problema se reduce a la minimización de x_1 que podemos hacer descender hasta 0

Entonces, considerando $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$ (Winston):

$$\hat{x}^2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + \frac{\alpha}{n} \frac{\bar{d}}{\|\bar{d}\|} = (1/4, 3/8, 3/8)$$

Aplicando T^{-1}

$$x^2 = (1/4, 3/8, 3/8)$$

Tenemos que verificar que $c^t x < \epsilon$. Supongamos que nuestro ϵ es tal que no se cumple (para poder seguir iterando).

■ ITERACIÓN 2:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \text{diag}(x^1) = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 3/8 & 0 \\ 0 & 0 & 3/8 \end{bmatrix} \\ \bar{A} &= A\bar{x} = (0, 1, -1) \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 3/8 & 0 \\ 0 & 0 & 3/8 \end{bmatrix} = (0, 3/8, -3/8) \\ \bar{c} &= \bar{x}c = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 3/8 & 0 \\ 0 & 0 & 3/8 \end{bmatrix} (1, 3, -3) = (1/4, 9/8, -9/8) \\ \bar{B} &= \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \mathbf{1}^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3/8 & 3/8 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \bar{d} &= -(I - \bar{B}^t(\bar{B}^t\bar{B})^{-1}\bar{B})\bar{c} = \dots = (-1/6, 1/12, 1/12) \\ \|\bar{d}\| &= \frac{1}{2\sqrt{6}}\end{aligned}$$

Entonces, considerando $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$:

$$\hat{x}^3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + \frac{\alpha}{n} \frac{\bar{d}}{\|\bar{d}\|} = (1/4, 3/8, 3/8)$$

Aplicando T^{-1}

$$x^3 = (2/11, 9/22, 9/22)$$

Supongamos nuevamente que $c^t x > \epsilon$.

■ ITERACIÓN 3:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \text{diag}(x^2) = \begin{bmatrix} 2/11 & 0 & 0 \\ 0 & 9/22 & 0 \\ 0 & 0 & 9/22 \end{bmatrix} \\ \bar{A} &= A\bar{x} = (0, 1, -1) \begin{bmatrix} 2/11 & 0 & 0 \\ 0 & 9/22 & 0 \\ 0 & 0 & 9/22 \end{bmatrix} = (0, 9/22, -9/22)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{c} &= \bar{x}c = \begin{bmatrix} 2/11 & 0 & 0 \\ 0 & 9/22 & 0 \\ 0 & 0 & 9/22 \end{bmatrix} (1, 3, -3) = (2/11, 27/22, -27/22) \\ \bar{B} &= \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \mathbf{1}^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 9/22 & -9/22 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \bar{d} &= -(I - \bar{B}^t(\bar{B}^t\bar{B})^{-1}\bar{B})\bar{c} = \dots \\ \|\bar{d}\| &= \dots\end{aligned}$$

Entonces, considerando $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$:

$$\hat{x}^4 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + \frac{\alpha}{n} \frac{\bar{d}}{\|\bar{d}\|} = \dots$$

Aplicando T^{-1}

$$x^4 = (8/62, 27/62, 27/62)$$

Supongamos nuevamente que $c^t x > \epsilon$.

...

■ ITERACIÓN 15:

...

$$x^{16} = (0, 0017098; 0,499145; 0,499145) \simeq (0, 1/2, 1/2)$$

$$z^* = 0, 0017098 \simeq 0$$

Observación: ¿Por qué \hat{x}^i siempre es el mismo?. Porque en este caso, nuestra región factible es una única recta y nos movemos en una misma cantidad α .

⊙

2.2. Problema 2. Transformación a la forma exigida por el algoritmo de Karmarkar

Sea el problema lineal (P) como sigue:

$$\begin{aligned}(P) \quad & \text{máx } x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 - x_2 \leq 8 \\ & x_1 + 4x_2 \leq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

Transforme el problema a la forma exigida para la aplicación del algoritmo de Karmarkar.

Solución:

- Si llamamos w_1 y w_2 a las variables duales asociadas a la primera y segunda restricciones respectivamente, el problema dual de (P) viene dado por:

$$(D) \quad \begin{aligned} &\text{mín } 8w_1 + 15w_2 \\ \text{s.a} \quad &2w_1 + w_2 \geq 1 \\ &-w_1 + 4w_2 \geq 3 \\ &w_1, w_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Luego, si minimizamos la diferencia entre los problemas primal y dual sujeto a las restricciones primales y duales aseguraremos tener una función objetivo óptima nula ⁵:

$$\begin{aligned} &\text{mín } x_1 + 3x_2 - (8w_1 + 15w_2) \\ \text{s.a} \quad &2x_1 - x_2 \leq 8 \\ &x_1 + 4x_2 \leq 15 \\ &2w_1 + w_2 \geq 1 \\ &-w_1 + 4w_2 \geq 3 \\ &x_1, x_2, w_1, w_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Dejamos ecuaciones en forma de igualdad agregando variables de holgura:

$$\begin{aligned} &\text{mín } x_1 + 3x_2 - (8w_1 + 15w_2) \\ \text{s.a} \quad &2x_1 - x_2 + h_1 = 8 \\ &x_1 + 4x_2 + h_2 = 15 \\ &2w_1 + w_2 - h_3 = 1 \\ &-w_1 + 4w_2 - h_4 = 3 \\ &x_i, w_i, h_i \geq 0 \end{aligned}$$

- Supongamos que por conocimiento exógeno del problema podemos decir que $Q=60$ es una cota para la suma de las variables.

$$\begin{aligned} &\text{mín } x_1 + 3x_2 - (8w_1 + 15w_2) \\ \text{s.a} \quad &2x_1 - x_2 + h_1 = 8 \\ &x_1 + 4x_2 + h_2 = 15 \\ &2w_1 + w_2 - h_3 = 1 \\ &-w_1 + 4w_2 - h_4 = 3 \\ &\sum_{i=1}^2 x_i + \sum_{i=1}^2 w_i + \sum_{i=1}^4 h_i = 60 \\ &x_i, w_i, h_i \geq 0 \end{aligned}$$

⁵Suponiendo que el óptimo existe y es acotado

- Homogenizamos

$$\begin{aligned}
 & \text{mín } x_1 + 3x_2 - (8w_1 + 15w_2) \\
 \text{s.a} \quad & 2x_1 - x_2 + h_1 - 8t = 0 \\
 & x_1 + 4x_2 + h_2 - 15t = 0 \\
 & 2w_1 + w_2 - h_3 - 1t = 0 \\
 & -w_1 + 4w_2 - h_4 - 3t = 0 \\
 & \sum_{i=1}^2 x_i + \sum_{i=1}^2 w_i + \sum_{i=1}^4 h_i - 60t = 0 \\
 & \sum_{i=1}^2 x_i + \sum_{i=1}^2 w_i + \sum_{i=1}^4 h_i + t = 61 \\
 & x_i, w_i, h_i, t \geq 0
 \end{aligned}$$

- Hacemos los siguientes cambios de variable

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 61y_1 & x_2 &= 61y_2 \\
 w_1 &= 61y_3 & w_2 &= 61y_4 \\
 h_1 &= 61y_5 & h_2 &= 61y_6 \\
 h_3 &= 61y_7 & h_4 &= 61y_8 \\
 h_5 &= 61y_9 & t &= 61y_{10}
 \end{aligned}$$

Con lo cual el problema queda:

$$\begin{aligned}
 & \text{mín } y_1 + 3y_2 - 8y_3 - 15y_4 \\
 \text{s.a} \quad & 2y_1 - y_2 + y_5 - 8y_{10} = 0 \\
 & y_1 + 4y_2 + y_6 - 15y_{10} = 0 \\
 & 2y_3 + y_4 - y_7 - 1y_{10} = 0 \\
 & -y_3 + 4y_4 - y_8 - 3y_{10} = 0 \\
 & \sum_{i=1}^9 y_i - 60y_{10} = 0 \\
 & \sum_{i=1}^{10} y_i = 1 \\
 & y_i \geq 0
 \end{aligned}$$

- Tenemos que hacer que $\mathbf{1}^{\frac{1}{n}}$ sea factible:

$$\begin{aligned}
 & \text{mín } y_1 + 3y_2 - 8y_3 - 15y_4 + My_{11} \\
 \text{s.a} \quad & 2y_1 - y_2 + y_5 - 8y_{10} + 6y_{11} = 0 \\
 & y_1 + 4y_2 + y_6 - 15y_{10} + 9y_{11} = 0 \\
 & 2y_3 + y_4 - y_7 - 1y_{10} - 1y_{11} = 0 \\
 & -y_3 + 4y_4 - y_8 - 3y_{10} + 1y_{11} = 0 \\
 & \sum_{i=1}^9 y_i - 60y_{10} + 52y_{11} = 0 \\
 & \sum_{i=1}^{11} y_i = 1 \\
 & y_i \geq 0
 \end{aligned}$$

O equivalentemente, podemos minimizar la variable artificial e imponer que la brecha entre las funciones objetivos primales y duales sea idénticamente nula:

$$\begin{aligned}
 & \text{mín } y_{11} \\
 \text{s.a } & 2y_1 - y_2 + y_5 - 8y_{10} + 6y_{11} = 0 \\
 & y_1 + 4y_2 + y_6 - 15y_{10} + 9y_{11} = 0 \\
 & 2y_3 + y_4 - y_7 - 1y_{10} - 1y_{11} = 0 \\
 & -y_3 + 4y_4 - y_8 - 3y_{10} + 1y_{11} = 0 \\
 & \sum_{i=1}^9 y_i - 60y_{10} + 52y_{11} = 0 \\
 & y_1 + 3y_2 - 8y_3 - 15y_4 = 0 \\
 & \sum_{i=1}^{11} y_i = 1 \\
 & y_i \geq 0
 \end{aligned}$$

2.3. Problema 3

1. Se pretende utilizar Fase I para encontrar una solución básica factible para cierto problema (P). Para ello, se debe resolver el siguiente problema lineal.

$$\begin{aligned}
 (P1) \quad & \text{mín } t_1 + t_2 \\
 \text{s.a } & 3x_1 + 2x_2 + t_1 = 2 \\
 & 4x_1 + 5x_2 + t_2 = 8 \\
 & x_1, x_2, t_1, t_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

En que t_1 y t_2 son las variables artificiales propias de la Fase I. Lleve el problema (P1) a la forma exigida por Karmarkar.

Hint: Se sabe que el problema (P) es factible.

2. Considere el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
 & \text{mín } -2x_1 + x_2 + x_3 \\
 \text{s.a } & x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\
 & x_1 - x_3 = 0 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 = 1
 \end{aligned}$$

- a) Muestre que el problema anterior está en la forma exigida por Karmarkar.
- b) Realice una primera iteración del algoritmo de Karmarkar sabiendo que la matriz de proyección a las restricciones activas viene dada por ⁶:

$$P_q = \begin{bmatrix} 1/4 & -1 & -2/3 \\ -1 & -2 & -1/3 \\ -2/3 & -1/3 & -1 \end{bmatrix}$$

Hint: Utilice un α que le acomode.

⁶En estricto rigor, solo se presenta una aproximación para los valores de la matriz para facilitar los cálculos

Solución:

1. Como sabemos que (P) es factible, es claro que la función objetivo óptima de $(P1)$ es nula. Además, de las dos restricciones: $7(x_1 + x_2) + t_1 + t_2 = 10$ y como $x_1, x_2 \geq 0$ es claro que $x_1 + x_2 + t_1 + t_2 \leq 10$. Para efectos de resolución, consideremos una cota genérica Q , a pesar de que es fácil encontrar una explícita. Así el problema:

$$\begin{aligned}
 (P1) \quad & \text{mín } t_1 + t_2 \\
 \text{s.a} \quad & 3x_1 + 2x_2 + t_1 = 2 \\
 & 4x_1 + 5x_2 + t_2 = 8 \\
 & x_1 + x_2 + t_1 + t_2 + h = Q \\
 & x_1, x_2, t_1, t_2, h \geq 0
 \end{aligned}$$

Homogenizamos:

$$\begin{aligned}
 (P1) \quad & \text{mín } t_1 + t_2 \\
 \text{s.a} \quad & 3x_1 + 2x_2 + t_1 - 2u = 0 \\
 & 4x_1 + 5x_2 + t_2 - 8u = 0 \\
 & x_1 + x_2 + t_1 + t_2 + h - Qu = 0 \\
 & x_1 + x_2 + t_1 + t_2 + h + u = Q + 1 \\
 & x_1, x_2, t_1, t_2, h, u \geq 0
 \end{aligned}$$

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= (Q + 1)y_1 & t_1 &= (Q + 1)y_3 & h &= (Q + 1)y_5 \\
 x_2 &= (Q + 1)y_2 & t_2 &= (Q + 1)y_4 & u &= (Q + 1)y_6
 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 (P1) \quad & \text{mín } y_3 + y_4 \\
 \text{s.a} \quad & 3y_1 + 2y_2 + y_3 - 2y_6 = 0 \\
 & 4y_1 + 5y_2 + y_4 - 8y_6 = 0 \\
 & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 - Qy_6 = 0 \\
 & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 1 \\
 & y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

Solo falta exigir que $\mathbf{1} \cdot \frac{1}{n}$ sea factible, para lo cual agregamos la variable y_7

$$\begin{aligned}
 (P1) \quad & \text{mín } y_3 + y_4 + M \cdot y_7 \\
 \text{s.a} \quad & 3y_1 + 2y_2 + y_3 - 2y_6 - 4y_7 = 0 \\
 & 4y_1 + 5y_2 + y_4 - 8y_6 - 2y_7 = 0 \\
 & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 - Qy_6 + (Q + 5)y_7 = 0 \\
 & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 = 1 \\
 & y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7 \geq 0
 \end{aligned}$$

2. a) En primer termino notamos que trivialmente tiene la forma:

$$(P) \quad \begin{aligned} \text{mín } z &= c^t x \\ \text{s.a } Ax &= 0 \\ x &\in S \end{aligned}$$

Las restricciones definen un sistema de 3 ecuaciones y 3 variables con única solución dada por $(1/3, 1/3, 1/3)$. Con esto, verificamos que:

- $\mathbf{1} \cdot \frac{1}{n}$ es factible.
- $-2\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} = 0 \Rightarrow z^* = 0$

\therefore Está en la forma exigida por Karmarkar.

b) En esta primera iteración:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\bar{d} = P_q \cdot \bar{c} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13/18 \\ -1/9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\|\bar{d}\| = \frac{\sqrt{173}}{18}$$

Luego, tomando $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) + \frac{\alpha}{n} \cdot \frac{\bar{d}}{\|\bar{d}\|} \\ &= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{6} \cdot \sqrt{\frac{324}{173}} \left(\frac{-13}{18}, \frac{-1}{9}, 0 \right) \\ &= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) + \sqrt{\frac{1}{173}} \left(\frac{-13}{18}, \frac{-1}{9}, 0 \right) \\ &= (0,169; 0,308; 0,333) \end{aligned}$$

Luego, como el punto inicial era $\mathbf{1} \cdot \frac{1}{n}$, tanto las transformaciones $T()$ como $T^{-1}()$ corresponden a la identidad. Así, finalmente el nuevo punto es:

$$x^1 = (0,169; 0,308; 0,333)$$