

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN70K: Clase Auxiliar
Programación Fraccional

Marcel Goic F.¹

¹Esta es una versión bastante preliminar por lo que puede contar con numerosas faltas de ortografía y errores no forzados. Si encuentran alguno favor de denunciarlo a mgoic@ing.uchile.cl

1. Una breve introducción.

Consideremos un problema de la forma

$$(P) \min f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{p^t x + \alpha}{q^t x + \beta}$$

$$\text{s.a } Ax = b$$

$$x \geq 0$$

donde $p, q, x \in \mathbb{R}^n, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{n \times m}, b \in \mathbb{R}^m$

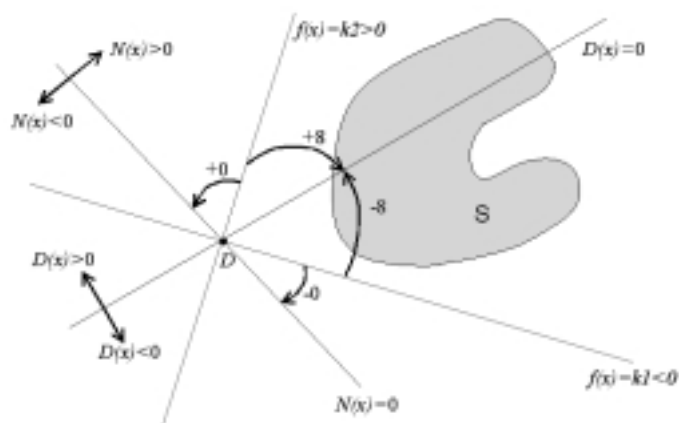
Sea

$$S = \text{conjunto de soluciones factibles}$$

$$= \{x | Ax = b, x \geq 0\}$$

Intuición geométrica

Sea $D = \{x \in \mathbb{R}^n | p^t x + \alpha = 0 \text{ y } q^t x + \beta = 0\}$. Las curvas de nivel de $f(x)$ corresponden a rectas (hiperplanos) que rotan con respecto a D .



Método de Charnes y Cooper

Supuesto: S compacto.

Supongamos que $D(x) = q^t x + \beta > 0 \forall x \in S$.²

Sean:

²Veremos que el caso $D(x) = q^t x + \beta < 0 \forall x \in S$ es análogo y si existe un \bar{x} que anule el denominador el problema es trivialmente no acotado

$$z = \frac{1}{q^t x + \beta} \quad y = zx$$

$$\Rightarrow y = \frac{x}{q^t x + \beta}$$

Entonces podemos construir un problema auxiliar:

$$(PA) \quad \text{mín } f(x) = p^t y + \alpha z$$

$$\text{s.a } \begin{aligned} Ay - bz &= 0 \\ q^t y + \beta z &= 0 \\ y, z &\geq 0 \end{aligned}$$

De esta manera, para un problema fraccional podemos distinguir 3 casos:

1. $q^t x + \beta > 0 \forall x \in S$

Resolvemos

$$(PA-1) \quad \text{mín } f(x) = p^t y + \alpha z$$

$$\text{s.a } \begin{aligned} Ay - bz &= 0 \\ q^t y + \beta z &= 0 \\ y, z &\geq 0 \end{aligned}$$

Teorema: Si (\bar{y}, \bar{z}) es solución óptima de $(PA-1)$ entonces $\bar{x} = \frac{y}{z}$ es óptimo para (P) .

2. $q^t x + \beta < 0 \forall x \in S$

Resolvemos

$$(PA-2) \quad \text{mín } f(x) = -p^t y - \alpha z$$

$$\text{s.a } \begin{aligned} Ay - bz &= 0 \\ -q^t y - \beta z &= 0 \\ y, z &\geq 0 \end{aligned}$$

Teorema: Si (\bar{y}, \bar{z}) es solución óptima de $(PA-2)$ entonces $\bar{x} = \frac{y}{z}$ es óptimo para (P) .

3. $\exists x^1, x^2 \in S$ con $q^t x^1 + \beta < 0 \wedge q^t x^2 + \beta > 0$ (recta $D(x) = 0$ pasa por S)

El problema es no acotado.

2. Problemas

2.1. Problema 2. Programación fraccional

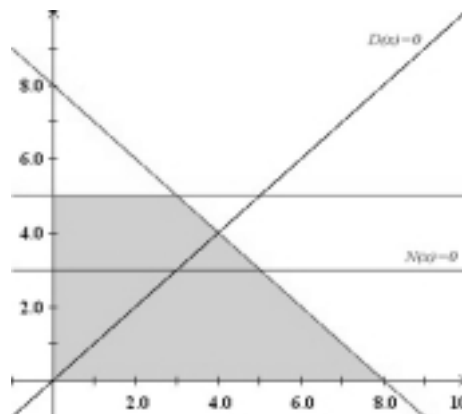
Sea S un poliedro definido como:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq 5; x_1 + x_2 \leq 8; x_1, x_2 \geq 0\}$$

1. Suponga que $f_1(x) = \frac{1}{\frac{x_1-1}{x_2}} - \frac{3}{x_1-x_2}$.
 - a) ¿Qué ocurre si se quiere resolver $\text{máx } f_1(x)$ s.a $x \in S$?
 - b) ¿Qué ocurre si se quiere resolver $\text{mín } f_1(x)$ s.a $x \in S$?
2. Suponga que $f_2(x) = \frac{x_1-x_2}{x_2-6}$. Formule un problema de programación lineal que resuelva $\text{mín } f_2(x)$ s.a $x \in S$.

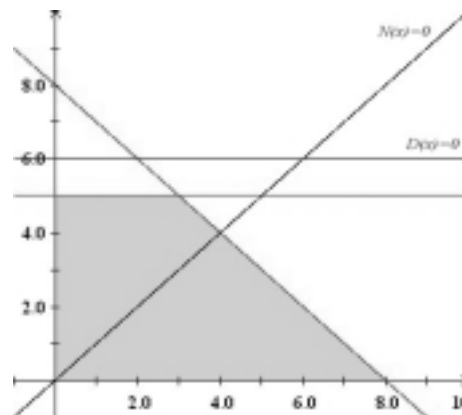
Solución:

1. El problema gráficamente puede verse como sigue:



Como $\{x : D(x) = 0\} \cap S \neq \emptyset \Rightarrow$ el problema es no acotado tanto para el problema de máx como el de mín .

2. Nuevamente hacemos un análisis gráfico de la solución.



En este caso, no podemos decir que no existan óptimos: solo podemos decir que $D(x) < 0 \forall x \in S$. Luego, debemos construir un problema auxiliar. Hacemos cambio de variable

$$z = \frac{1}{q^t x + \beta} \quad y = zx$$

$$\Rightarrow y = \frac{x}{q^t x + \beta}$$

Con lo que el problema auxiliar queda:

$$(PA) \quad \text{mín } p^t y + \alpha z$$

$$\text{s.a } Ay - bz = 0$$

$$q^t y + \beta z = 0$$

$$y, z \geq 0$$