Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN70K: Clase Auxiliar

Programación Entera

Marcel Goic F.[1]

[1]Esta es una versión bastante preliminar por lo que puede contar con numerosas faltas de ortografia y errores no forzados. Si encuentran alguno favor de denunciarlo a mgoic@dii.uchile.cl

1. Algoritmo de planos cortantes fraccionales de Gommory

Consideremos el problema (P) $\max\{c^T x | Ax = b, x \in \mathbb{Z}^+\}$. Resolveremos la relajación lineal de (P) y a partir de dichas soluciones generaremos una desigualdad válida que separe la solución del conjunto factible. Al resolver una relajación cualquiera llegamos a la siguiente forma estandar:

$$\max\ \bar{a}_{00} + \sum_{j \in NB} \bar{a}_{0j} x_j$$

$$\begin{array}{rrcll} \text{s.a} & x_B^u + \sum_{j \in NB} \bar{a}_{uj} x_j & \leq & \bar{a}_{u0} & \quad u = 1...m \\ & x & \geq & 0 & \end{array}$$

- Si $x_B \in \mathbb{Z}$, entonces la solución es óptima para el problema original.
- Si $\exists u$ tal que $x_B^u \notin$ Z, entonces separamos x_B del poliedro $Ax = b$ a traves del siguiente corte de Gommory:

$$\sum_{j \in NB} (\bar{a}_{uj} - \lfloor \bar{a}_{uj} \rfloor) x_j \geq \bar{a}_{u0} - \lfloor \bar{a}_{u0} \rfloor \qquad \textsf{Gommory Cut}$$

Proposición

Sean:

$$\begin{array}{rcl} B^{-1} & : & \text{inversa de la base óptima de un problema lineal entero relajado.} \\ \beta & : & \text{fila } u \text{ de } B^{-1}. \\ q_i & : & \beta_i - \lfloor \beta_i \rfloor \end{array}$$

Entonces, el corte de Gommory puede escribirse como:

$$\sum_{j=1}^{n} \lfloor q^T a_j \rfloor x_j \geq \lfloor q^T b \rfloor \qquad \textsf{Gommory Cut}$$

2. Desigualdades válidas fuertes

En general, encontrar una desigualdad válida no es suficiente para fortalecer el problema. Queremos encontrar aquellas desigualdades que generen la envoltura convexa del poliedro en las vecindades del óptimo. Para ello no existe un procedimiento general por lo que debe estudiarse para cada tipo de problema. En este curso, sólo veremos el caso de los problemas tipo 0-1 knapsack.

2.1. Procedure to lift cover inequalities.

Sea $\underline{\overline{\mathrm{X}}} = \{x \in \{0,1\}^n | \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b\}$. Sea C una cobertura mínima de $\underline{\overline{\mathrm{X}}}$ y $N \backslash C = \{j_1, j_2, ..., j_r\}$ el conjunto de índices que no pertenecen a la cobertura.

- T=1: INICIALIZACIÓN

  Tenemos la desigualdad $\sum_{j \in C} x_j \leq |C| - 1$.

- T=T: ITERACIÓN GENÉRICA

  Tenemos la desigualdad $\sum_{i=1}^{t-1} \alpha_{j_i} x_{j_i} + \sum_{j \in C} x_j \leq |C| - 1$. Para encontrar α_{j_t} que agregar a la restricción $\alpha_{j_t} x_{j_t} + \sum_{i=1}^{t-1} \alpha_{j_i} x_{j_i} + \sum_{j \in C} x_j \leq |C| - 1$ debemos resolver un knapsack-problem auxiliar:

  $$\zeta_t = \max \sum_{i=1}^{t-1} \alpha_{j_i} x_{j_i} + \sum_{j \in C} x_j$$

  $$\begin{array}{lrcl} \text{s.a} & \sum_{i=1}^{t-1} a_{j_i} x_{j_i} + \sum_{j \in C} a_j x_j & \leq & b - a_{j_t} \\ & x & \in & \{0,1\}^{|C|+t-1} \end{array}$$

  Entonces, $\alpha_{j_t} = |C| - 1 - \zeta_t$

  - Si $t = r$, parar.
  - Si $t < r$, $t := t + 1$, seguir.

3. Problemas

3.1. Problema 1.

Resuelva el siguiente problema de programación entera:

$$(P) \ \max\ z = 3x_2 + 4x_4$$

$$\begin{array}{lrcll} \text{s.a} & 4x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 & \leq & 2 & (1) \\ & 2x_1 - 5x_3 & \geq & -3 & (2) \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \in & \{0,1\} & \end{array}$$

Hint: Le puede ser de utilidad preprocesar el problema para evitar tener que incurrir en un esquema de branch & bound.

3.1.1. Solución

En general, para enfrentar este problema debieramos recurrir a un esquema de branch & bound. Sin embargo, para simplifiar el problema procederemos previamente a realizar un preprocesamiento:

- (1) $\Rightarrow x_1 \leq x_3$. En efecto, para que x_1 pueda tomar el valor 1 necesariamente la variable x_3 debe tomar el valor 1.
- (2) $\Rightarrow x_1 \geq x_3$. En efecto, para que x_3 pueda tomar el valor 1 necesariamente la variable x_1 debe tomar el valor 1.

De lo anterior, se concluye que $x_1 = x_3$. Luego el problema puede expresarse como:

$$(P)\ \text{máx}\ z = 3x_2 + 4x_4$$

$$\begin{array}{lrcll} \text{s.a} & x_2 + x_4 & \leq & 2 & (1) \\ & x_1 & \leq & 1 & (2) \\ & x_1, x_2, x_4 & \in & \{0,1\} & \end{array}$$

Como $x_1 \in \{0,1\}$, es claro que la segunda restricción es redundante. Luego el problema queda con una única restricción en la que es fácil encontrar la solución por inspección: (0,0,0,2)[2].

3.2. Problema 2.

Considere el siguiente problema de programación entera:

$$(P)\ \text{máx}\ z = x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{s.a} & -x_1 + 3x_2 & \leq & 6 \\ & 3x_1 - x_2 & \leq & 3 \\ & x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z}^+ \end{array}$$

1. Plantee y resuelva la relajación lineal del problema (P), escribiendo explícitamente el valor de las variables básicas, no básicas y la matriz básica inversa. ¿Es óptima la solución relajada? ¿Cuál es el óptimo del problema (P)?.
2. Encuentre un corte de Gomory que separe la solución del problema relajado del espacio de soluciones factibles. Grafique dicho corte en el plano $x_1 x_2$.

[2]en estricto rigor el problema es muy degenerado ya que cualquier tupla de la forma $(a, b, 0, 2)$ con $a, b \geq 0$ es solución óptima para el problema

3.2.1. Solución

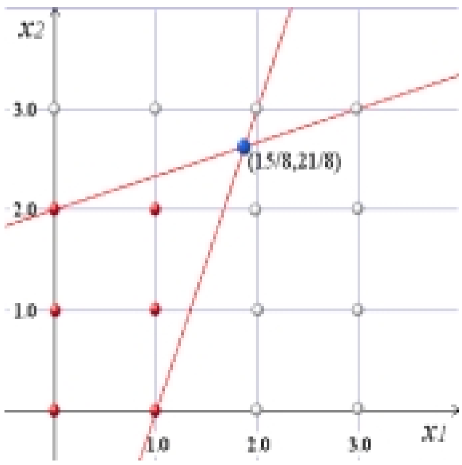
1. La relajación lineal del problema puede escribirse como:

$$(PL)\ \text{máx } z = c^T x$$

$$\begin{array}{rrcl} \text{s.a} & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

con:

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$



Al resolver graficamente notamos que el conjunto de variables básicas viene dado por $B = \{x_1, x_2\}$ y por tanto el de las variables no basicas resultan ser $NB = \{x_3, x_4\}$. Luego la base y su inversa son:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Con esto, la solución óptima vienen dadas por:

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{8} \\ \frac{21}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}875 \\ 2{,}625 \end{bmatrix}$$

Claramente la solución del problema relajado no resulta entera y por tanto no es óptima. La solución óptima del problema viene dada por $(1, 2)$.

2. Como la solución del problema relajado no resulta entera, podemos introducir cortes tomando las variables basicas fraccionarias.

- Tomemos la variable x_1 $(u = 1)$.
  El corte de Gommory: $f_{13}x_3 + f_{14}x_4 \geq f_{10}$ donde:

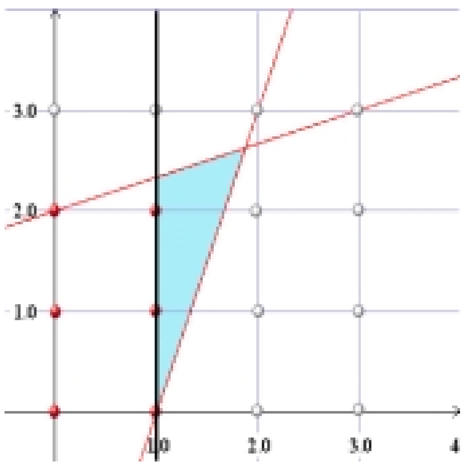
$$\begin{aligned} f_{10} &= \bar{a}_{10} - \lfloor \bar{a}_{10} \rfloor \\ &= \frac{15}{8} - \left\lfloor \frac{15}{8} \right\rfloor = \frac{7}{8} \\ f_{13} &= \bar{a}_{13} - \lfloor \bar{a}_{13} \rfloor \\ &= \frac{1}{8} - \left\lfloor \frac{1}{8} \right\rfloor = \frac{1}{8} \\ f_{14} &= \bar{a}_{14} - \lfloor \bar{a}_{14} \rfloor \\ &= \frac{3}{8} - \left\lfloor \frac{3}{8} \right\rfloor = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

  Luego la desigualdad válida de Gommory que corta la solución fraccional de la región factible viene dada por:

$$\frac{1}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 \geq \frac{7}{8}$$

  Para gráficar en el plano $x_1 - x_2$, escribimos las variabes de holgura en función de x_1 y x_2:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}(6 + x_1 - 3x_2) + \frac{3}{8}(3 - 3x_1 + x_2) &\geq \frac{7}{8} \\ 15 - 8x_1 &\geq 7 \\ x_1 &\leq 1 \end{aligned}$$



- Tomemos la variable x_2 $(u = 2)$.
  El corte de Gommory: $f_{23}x_3 + f_{24}x_4 \geq f_{20}$ donde:

$$f_{20} = \bar{a}_{10} - \lfloor \bar{a}_{10} \rfloor$$

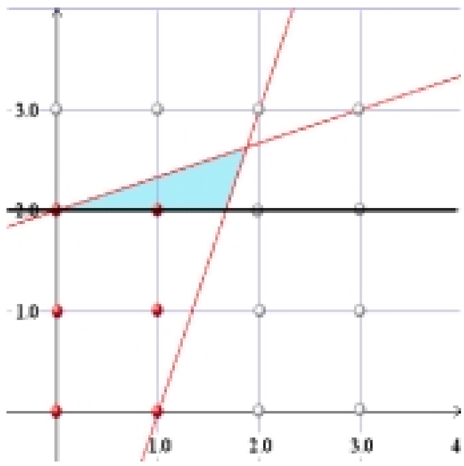
$$
\begin{aligned}
&= \frac{21}{8} - \left\lfloor \frac{21}{8} \right\rfloor = \frac{5}{8} \\
f_{23} &= \bar{a}_{23} - \lfloor \bar{a}_{23} \rfloor \\
&= \frac{3}{8} - \left\lfloor \frac{3}{8} \right\rfloor = \frac{3}{8} \\
f_{24} &= \bar{a}_{24} - \lfloor \bar{a}_{24} \rfloor \\
&= \frac{1}{8} - \left\lfloor \frac{1}{8} \right\rfloor = \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

Luego la desigualdad válida de Gommory que corta la solución fraccional de la región factible viene dada por:

$$\frac{3}{8}x_3 + \frac{1}{8}x_4 \geq \frac{5}{8}$$

Para gráficar en el plano $x_1 - x_2$, escribimos las variabes de holgura en función de x_1 y x_2:

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{8}(6 + x_1 - 3x_2) + \frac{1}{8}(3 - 3x_1 + x_2) &\geq \frac{5}{8} \\
21 - 8x_2 &\geq 5 \\
x_2 &\leq 2
\end{aligned}
$$



3. Si estuvieramos trabajando con la versión revisada del simplex no tendriamos disponibles todos los valores de $\bar{a}_{ij}$

   - Tomemos la variable x_1 $(u = 1)$.

     Sea $\beta = [B^{-1}]_{1\cdot} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \end{bmatrix}$.

     Sea $q_i = \beta_i - \lfloor \beta_i \rfloor$.

Luego, la desigualdad viene dada por:

$$\begin{aligned}
\lfloor q^T a_1 \rfloor x_1 + \lfloor q^T a_2 \rfloor x_2 &\leq \lfloor q^T b \rfloor \\
\left\lfloor \left[\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right] \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rfloor x_1 + \left\lfloor \left[\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right] \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rfloor x_2 &\leq \left\lfloor \left[\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right] \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rfloor \\
\left\lfloor \frac{-1}{8} + \frac{9}{8} \right\rfloor x_1 + \left\lfloor \frac{3}{8} + \frac{-3}{8} \right\rfloor x_2 &\leq \left\lfloor \frac{6}{8} + \frac{9}{8} \right\rfloor \\
x_1 &\leq 1
\end{aligned}$$

- Tomemos la variable x_2 $(u = 2)$.
  Sea $\beta = [B^{-1}]_{2\cdot} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$.
  Sea $q_i = \beta_i - \lfloor \beta_i \rfloor$.
  Luego, la desigualdad viene dada por:

$$\begin{aligned}
\lfloor q^T a_1 \rfloor x_1 + \lfloor q^T a_2 \rfloor x_2 &\leq \lfloor q^T b \rfloor \\
\left\lfloor \left[\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right] \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rfloor x_1 + \left\lfloor \left[\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right] \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rfloor x_2 &\leq \left\lfloor \left[\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right] \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rfloor \\
\left\lfloor \frac{-3}{8} + \frac{3}{8} \right\rfloor x_1 + \left\lfloor \frac{9}{8} + \frac{-1}{8} \right\rfloor x_2 &\leq \left\lfloor \frac{18}{8} + \frac{3}{8} \right\rfloor \\
x_2 &\leq 2
\end{aligned}$$

$\odot$

Problema 2. 0-1 Knapsack strong valid inequalities (Wolsey)

Considere el siguiente conjunto factible para un problema de knapsack:

$$\underline{\mathrm{X}} = \{\{0,1\}^7 : 11x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 + x_7 \leq 19\}$$

1. Encuentre por inspección alguna desigualdad de cobertura extendida. ¿Que interpretación puede darle en términos del problema de la mochila?
2. Encuentre por inspección alguna desigualdad de cobertura mínima. ¿Que interpretación puede darle en términos del problema de la mochila?
3. Considere la cobertura $C = \{3, 4, 5, 6\}$. Realice un procedimiento de lifting a dicha desiguadad de cobertura.

3.2.2. Solución

1. Una cobertura C, es un conjunto de elementos que no pueden ser puestos simultaneamente en la mochila. Naturalmente, este conjunto define una desigualdad valida. Tomemos por ejemplo $C = \{2, 3, 4, 5\}$. Su desigualdad de cobertura:

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 3$$

Una desigualda de cobertura extendida es agregar a la desigualdad de cobertura a aquellos productos mas pesados que los que componen la cobertura. Para el caso anterio, la desigualdad de cobertura extendida puede ser escrita como:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 3$$

2. Un cobertura mínima C es una cobertura a la cual sacando cualquiera de sus elementos deja de ser cobertura. Una cobertura mínima desfine naturalmente desigualdades válidas como por ejemplo:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$
$$x_1 + x_2 + x_6 \leq 2$$
$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$$

3.
   - Iteración 1: x_1
     Resolvemos el siguiente problema de optimización:

$$\zeta_1 = \text{máx } x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$
$$\begin{array}{rrcccc} \text{s.a} & 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 & \leq & 19 - 11 & = & 8 \\ & x_3, x_4, x_5, x_6 & \in & \{0, 1\} & & \end{array}$$

     Claramente, $\zeta_1 = 1$ (por ejemplo en los puntos (0,0,0,1) y (0,0,1,0)). Luego el coeficiente que acompaará a x_1 viene dado por:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & |C| - 1 - \zeta_1 \\ & = & 4 - 1 - 1 = 2. \end{array}$$

   - Iteración 2: x_2
     Resolvemos el siguiente problema de optimización:

$$\zeta_2 = \text{máx } 2x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$
$$\begin{array}{rrcccc} \text{s.a} & 11x_1 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 & \leq & 19 - 6 & = & 13 \\ & x_1, x_3, x_4, x_5, x_6 & \in & \{0, 1\} & & \end{array}$$

     Claramente, $\zeta_2 = 2$ (por ejemplo en los puntos (2,0,0,0,0) y (0,1,1,0,0)). Luego el coeficiente que acompaará a x_2 viene dado por:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_2 & = & |C| - 1 - \zeta_2 \\ & = & 4 - 1 - 2 = 1. \end{array}$$

- Iteración 3: x_7
  Resolvemos el siguiente problema de optimización:

$$\zeta_3 = \text{máx } 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$\begin{array}{rrcl} \text{s.a} & 11x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 & \leq & 19 - 1 \quad = \quad 18 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \in & \{0, 1\} \end{array}$$

  Claramente, $\zeta_3 = 3$ (por ejemplo en los puntos (0,0,0,1,1,1) y (0,1,1,1,0,0)). Luego el coeficiente que acompaará a x_3 viene dado por:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_3 & = & |C| - 1 - \zeta_3 \\ & = & 4 - 1 - 3 = 0. \end{array}$$

  Finalmente terminamos con una desigualdad válida que corresponde a una faceta del poliedro factible:

$$2x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 1x_5 + 1x_6 + 0x_7 \leq 3$$

$\odot$