Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN70K: Clase Auxiliar

Descomposiciones de Dantzig-Wolfe y Benders

Marcel Goic F.[1]

[1]Esta es una versión bastante preliminar por lo que puede contar con numerosas faltas de ortografia y errores no forzados. Si encuentran alguno favor de denunciarlo a mgoic@ing.uchile.cl

1. Descomposición de Dantzig Wolfe.

Se aplica a problemas lineales en que existe un grupo de restricciones generales que involucran todas las variables y grupos de restricciones que afectan a subconjuntos disjuntos de variables (estructura diagonal en bloque). Formalmente, sea:

$$
\begin{array}{llrcl}
(P) & \multicolumn{4}{l}{\text{mín } z = c^1 \cdot x^1 + c^2 \cdot x^2 + ... + c^r \cdot x^r} \\
\\
\text{s.a} & & A^1 \cdot x^1 + A^2 \cdot x^2 + ... + A^r \cdot x^r & = & b^0 \\
& & B^1 \cdot x^1 \qquad\qquad\qquad\qquad & = & b^1 \\
& & B^2 \cdot x^2 \qquad\qquad & = & b^2 \\
& & \ddots \qquad & & \\
& & B^r \cdot x^r & = & b^r \\
& & x^1, x^2, ..., x^r & \geq & 0
\end{array}
$$

donde hay m_0 restricciones generales y m_j que involucran a la variable (vectorial) x^j y además:

$$
\begin{array}{cc}
c^j, x^j \in \mathbb{R}^{n_j} & A^j \in \mathbb{R}^{m_0 \times n_j} \\
b^0 \in \mathbb{R}^{m_0} & b^j \in \mathbb{R}^{m_j} \\
B^j \in \mathbb{R}^{m_j \times n_j} &
\end{array}
$$

Podemos aplicar el principio de descomposición tal como lo vimos en la clase anterior, pero podemos aprovechar la estructura particular del problema para generar una descomposición mas eficiente: la idea es en vez de resolver un solo gran subproblema, resolvamos r subproblemas mas pequeños.

Si suponemos que el poliedro P^j asociados al conjunto de restricciones de la variable x^j es acotado para todo j, podemos escribir cada punto en uno de estos poliedros como combinación lineal convexa de sus vértices [2]:

$$P^j = \{x \in \mathbb{R}^{n_j} | B^j x^j = b^j, x^j \geq 0\}$$

Para cada $x^j \in P^j$ podemos escribir:

$$
\begin{array}{rcl}
xj & = & \sum_{k=1}^{N_j} \lambda_k^j x_k^j \\
\sum_{k=1}^{N_j} \lambda k^j & = & 1 \\
\lambda_k^j & \geq & 0 \quad \forall j
\end{array}
$$

[2] Para el caso no acotado se deben incorporar además direcciones extremas. Ver Problema 1.

Notar que N_j representa el numero de vértices que tiene el poliedro P^j.

Así, el Master Problem queda como:

$$(MP) \qquad \min\ z = \left(\sum_{k=1}^{N_1} c^1 x_k^1\right)\lambda_k^1 + ... + \left(\sum_{k=1}^{N_r} c^r x_k^r\right)\lambda_k^r$$

$$\begin{array}{lrcl}
\text{s.a} & \left(\sum_{k=1}^{N_1} A^1 x_k^1\right)\lambda_k^1 + ... + \left(\sum_{k=1}^{N_r} A^r x_k^r\right)\lambda_k^r & = & b^0 \\
& \sum_{k=1}^{N_1} \lambda_k^1 & = & 1 \\
& \ddots & & \\
& \sum_{k=1}^{N_r} \lambda_k^r & = & 1 \\
& \lambda_k^j & \geq & 0\ \forall\, k, j
\end{array}$$

Luego, para resolver:

- Supongamos que tenemos una solución básica factible para (MP) y sea B la matriz básica asociada [3].
- Debemos ver si la solución es óptima o si existe un vértice que deba entrar a la base del (MP). Al igual que en el principio general de descomposición, resolveremos subproblemas para evaluar la óptimalidad.

  Sea $(\omega, \alpha) = c_B \cdot B^{-1}$ donde:

  - $\omega \in I\!R^{m_0}$: asociado a las restricciones mantenidas.
  - $\alpha \in I\!R^r$: asociado a las restricción de convexidad de cada uno de los r poliedros P^j.

  Sea $\overline{c_k^j}$ el costo reducido asociado a la variable λ_k^j. Entonces:

$$\begin{array}{rcl}
\overline{c_k^j} & = & c^j - (\omega, \alpha)\begin{pmatrix} A^j \cdot x^j \\ e^j \end{pmatrix} \\
& = & (c^j - \omega A^j)x_k^j - \alpha_j
\end{array}$$

  Para que (MP) sea óptimo, debemos verificar que $\overline{c_k^j} \geq 0\,\forall\, k, j$, pero equivalentemente podemos buscar $\min \overline{c_k^j}$ y verificar que sea positivo, dando origen así al siguiente subproblema:

[3]Si no tenemos una solución básica inicial para un (MP) incial, debemos aplicar algo similar a Fase I.

$$\begin{aligned}\min_{k,j} \overline{c^j_k} &= \min_{1\le j\le r}\left\{ \min_{1\le k\le N_j} \left[(c^j-\omega A^j)x^j_k-\alpha_j\right]\right\}\\ &= \min_{1\le j\le r}\left\{ \min_{x^j\in P^j} \left[(c^j-\omega A^j)x^j-\alpha_j\right]\right\}\end{aligned}$$

Entonces, encontrar mín $\overline{c^j_k}$ es equivalente a resolver r subproblemas del tipo [4]:

$$\begin{aligned}(SP^j) \qquad & \min f_j = (c^j-\omega A^j)x^j-\alpha_j\\ & \text{s.a}\ \ B^j x^j = b^j\\ & \qquad\quad x^j \ge 0\end{aligned}$$

Luego:

- Si el valor óptimo de $(SP^j) \ge 0\,\forall\, j$, (MP) es óptimo y por tanto (P) es óptimo.
- Si el valor óptimo de $(SP^q) < 0$ para algún q, tenemos variable que entra a la base de (MP): el peso λ^q_s asociado a la solución óptima de $(SP^q), x^q_s$. Si existen varios subproblemas con valor óptimo negativo, por convención elegiremos el más negativo para que entre a la base.

- Si no es óptimo y λ^q_s entra a la base, debemos escoger una variable para que salga.

  Sean:

  - $\overline{A^q}_{\cdot s} = B^{-1}\cdot A^q_{\cdot s} = B^{-1}\begin{pmatrix} A^q\cdot x^q_s\\ e^q\end{pmatrix}$
  - $\overline{b} = B^{-1}\cdot b = B^{-1}\cdot\begin{pmatrix} b^0\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$

  Luego, el índice t de la variable que sale viene dado por

$$t = \operatorname{argmin}\left\{\frac{\overline{b_i}}{(\overline{A^q}_{\cdot s})_i} \,|\, (\overline{A^q}_{\cdot s})_i > 0\right\}$$

- Si es óptimo, debemos reconstruir la solución para (P):

$$x^j = \sum_{k=1}^{N_j}\lambda_k x^k$$

$\odot$

[4]como veremos mas adelante, en el caso que al resolver un subproblema encontremos una dirección extrema, la funcion objetivo es identica, pero sin el parametros α asociado a la restriccion de convexidad.

2. Descomposición Benders.

Consideremos un problema de la forma:

$$(P) \qquad \text{mín } c^t x$$

$$\begin{array}{rrcl} \text{s.a} & Ax & = & b \\ & Dx & \geq & d \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

Si consideramos una variable dual ω para el primer grupo de restricicones y otras v para el segundo grupo de restricciones, el dual de (P) viene dado por:

$$(D) \qquad \text{máx } b^t w + d^t v$$

$$\begin{array}{rrcl} \text{s.a} & wA + vD & \geq & c \\ & v & \geq & 0 \end{array}$$

Este dual lo podemos expresar como:

$$(D') \quad \max_{w \text{ irrestricta}} \left\{ b^t w + \max_{v \geq 0} \; \begin{array}{l} d^t v \\ vD \geq c - wA \end{array} \right\}$$

Dualizando el problema interior...

$$(D'') \quad \max_{w \text{ irrestricta}} \left\{ b^t w + \min_{x \geq 0} \; \begin{array}{l} (c - wA)x \\ Dx \geq d \end{array} \right\}$$

Luego, queremos construir un master probelm de Benders escribiendo puntos de $\underline{\overline{\text{X}}} = \{x|Dx \geq d\}$ como combinación lineal convexa de sus vértices. Así y expresando el problema de una manera decuada obtenemos nuestro master problem de bender.

$$(BMP) \qquad \text{máx } \gamma$$

$$\text{s.a} \quad \gamma \leq b^t w + (c - wA)x^i \quad \forall x^i \text{vértice de} \underline{\overline{\text{X}}}$$

El proceso trata de ir resolviendo relajaciones de (BMP), es decir considerar solo algunas restricciones del problema asociadas a algunos vértices de $\underline{\overline{\text{X}}}$.

En cada iteración buscaremos saber si hay alguna restricción que no ha sido considerada que este siendo violada y en dicho caso incorporarla. Para ello resolveremos un subproblema en que encontraremos la restricción que este siendo *mas* violada.

En principio se podría pensar que al agregar una nueva restricción a la formulación podría hacer que el master problem que de infactible. Esto implicaría que el problema original es infactible, lo que debía haberse detectado al encontrar los vértices iniciales.

Sea $\bar{\omega}$ la solución óptima de (BMP) y $\bar{\gamma}$ el valor de la función objetivo correspondiente. Luego el subproblema se reduce a:

$$(BSP) \qquad \min\, (c - \bar{\omega}A)x$$
$$\text{s.a} \quad x \in \overline{\underline{\mathrm{X}}}$$

Sea x^* la solución óptima del subproblema; x^* es un vértice y por tanto podemos incorporar la restricción correspondiente a (BMP). Queremos saber si esta restricción (que es la mas violada) esta siendo violada:

- Si $\bar{\gamma} \leq b^t\bar{\omega} + (c - \bar{\omega}A)x^*$ entonces no hay restricciones violadas y por tanto la solución es óptima.
- Si $\bar{\gamma} > b^t\bar{\omega} + (c - \bar{\omega}A)x^*$ entonces la restricción esta siendo violada y debemos incorporarla a (BMP) y proceguimos con el proceso.

Observación: Para complementar el algoritmo requerimos además de un mecanismo de eliminación de restricciones para que en cada iteración considerar solo aquellas que definen el poliedro en las *proximidades* del vértice óptimo.

3. Problemas

3.1. Problema 1. Descomposición de Dantzig-Wolfe para el caso de $\overline{\underline{\mathrm{X}}}$ no acotado

Sea el siguiente problema lineal:

$$\max\ z = x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4$$
$$\begin{array}{lccccrl} \text{s.a.} & x_1 & +x_2 & +3x_3 & +x_4 & \leq & 14 \\ & -x_1 & +x_2 & & & \leq & 2 \\ & -x_1 & +2x_2 & & & \leq & 8 \\ & & & x_3 & +x_4 & \leq & 5 \\ & & & -x_3 & +x4 & \leq & 3 \\ & x_1 & ,x_2 & ,x_3 & ,x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Hint: Notar que no necesariamente los subpoliedros que se generan en la descomposición de D-W son acotados, por lo que no basta describir los puntos interiores como combinación lineal convexa de los vértices, sino que además se deben considerar las direcciones extremas.

Solución

Distinguimos 2 subconjuntos de variables que forman una estructura diagonal en bloque; (x_1, x_2) y (x_3, x_4), con una restricción ligante. Notamos además que *a priori* no tenemos argumentos para asegurara que cada uno de los subconjuntos de restricciones definan poliedros acotados por lo que expresaremos los puntos factibles como combinaciones lineales convexas de vértices mas direcciones extremas.

Así un *master problem* genérico para nuestro problema vendría dado por:

$$\text{máx } z = \sum_{k=1}^{N_1}(c^1 x_k^1)\lambda_k^1 + \sum_{k=1}^{\hat{N}_1}(c^1 d_k^1)\mu_k^1 + \sum_{k=1}^{N_2}(c^2 x_k^2)\lambda_k^2 + \sum_{k=1}^{\hat{N}_2}(c^2 d_k^2)\mu_k^2$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{s.a.} & \displaystyle\sum_{k=1}^{N_1}(A^1 x_k^1)\lambda_k^1 + \sum_{k=1}^{\hat{N}_1}(A^1 d_k^1)\mu_k^1 + \sum_{k=1}^{N_2}(A^2 x_k^2)\lambda_k^2 + \sum_{k=1}^{\hat{N}_2}(A^2 d_k^2)\mu_k^2 + h & = & b \\ & \displaystyle\sum_{k=1}^{N_1}\lambda_k^1 & = & 1 \\ & \displaystyle\sum_{k=1}^{N_2}\lambda_k^2 & = & 1 \\ & \lambda_k^1, \lambda_k^2, \mu_k^1, \mu_k^2 & \geq & 0 \end{array}$$

donde:

- x_k^1 = vértice k del conjunto $\underline{\overline{X}}^1 = \{(x_1, x_2) \geq 0 : -x1 + x_2 \leq 2, -x_1 + 2x_2 \leq 8\}$ y λ_k^1 su peso asociado.
- x_k^2 = vértice k del conjunto $\underline{\overline{X}}^2 = \{(x_3, x_4) \geq 0 : x3 + x_4 \leq 5, -x_3 + x_4 \leq 3\}$ y λ_k^2 su peso asociado.
- d_k^1 = dirección extrema k del conjunto $\underline{\overline{X}}^1$ y μ_k^1 su peso asociado.
- d_k^2 = dirección extrema k del conjunto $\underline{\overline{X}}^2$ y μ_k^2 su peso asociado.

Además, para nuestro problema específico:

$$\begin{array}{ll} c^1 = (-1, -2) & \qquad A^1 = (1, 1) \\ c^2 = (-1, -3) & \qquad A^2 = (3, 1) \end{array}$$

Para comenzar a iterar necesitamos un vértice incial que sea factible para el problema completo. Notamos que $x_1^1 = (0, 0)$ es vértice fáctible para $\underline{\overline{X}}^1$ y que $x_1^2 = (0, 0)$ es vértice fáctible para $\underline{\overline{X}}^2$. Además, como $1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \leq 14$, tenemos todo lo necesario para construir nuestro *master problem* inicial.

- ITERACIÓN 1:

  Notar que nuestro espacio factible se reduce a un solo punto por lo cual es facil ver que las variables básicas son $h, \lambda_1^1, \lambda_1^2$. Así, el *master problem* viene dado por:

$$
\begin{array}{lrcl}
(MP_1) & \text{mín } z = (-1,-2)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\lambda_1^1 + (-1,-3)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\lambda_1^2 & & \\
\text{s.a} & (1,1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\lambda_1^1 + (3,1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\lambda_1^2 + h & = & 14 \\
 & \lambda_1^1 & = & 1 \\
 & \lambda_1^2 & = & 1 \\
 & h, \lambda_1^1, \lambda_1^2 & \geq & 0
\end{array}
$$

El tableau asociado:

$$
\begin{array}{ccc|c}
h & \lambda_1^1 & \lambda_1^2 & \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 14 \\
0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1
\end{array}
\quad \xrightarrow{\text{Forma canónica}} \quad
\begin{array}{ccc|c}
h & \lambda_1^1 & \lambda_1^2 & \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 14 \\
0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1
\end{array}
\qquad
B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Es decir, la solución en curso es $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 1, 4)$ con $z = 13$. Las variables duales

$$
(\omega, \alpha_1, \alpha_2) = c_B B^{-1} = (0,0,0)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (0,0,0)
$$

Luego los subproblemas [5]:

$$
\begin{array}{lrcl}
(SP_1^1)\ \text{mín } & f_1 = ((-1,-2) - 0(1,1))\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & & \\
\text{s.a} & -x_1 + x_2 & \leq & 2 \\
 & -x_1 + 2x_2 & \leq & 8 \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Resolviendo el problema concluimos que $d_1^1 = (2,1)$ es una dirección de no acotamiento con un costo reducido asociado dado por $f_1^* = -3$

$$
\begin{array}{lrcl}
(SP_1^2)\ \text{mín } & f_2 = ((-1,-3) - 0(3,1))\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} & & \\
\text{s.a} & x_3 + x_4 & \leq & 5 \\
 & -x_3 + x_4 & \leq & 3 \\
 & x_3, x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Resolviendo el problema concluimos que $x_2^2 = (1,4)$ es el vértice óptimo con un costo reducido asociado dado por $f_2^* - \alpha_2 = -13$

[5] Se incluye al final del problema un pequeño anexo de solución con la solución geométrica de cada subproblema

- **Optimalidad:** No es óptimo porque existen variables con costo reducido negativo.
- **Entrada:** Hacemos que entre la variable asociada al menor costo reducido: λ_2^2 asociado a x_2^2
- **Salida:** Necesitamos ver los valores de la columna que va entrar a la base:

$$\bar{A}_{\cdot s} = B^{-1}\begin{bmatrix} A^2x_2^2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (3,1)\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\min_{(\bar{A}_{\cdot s})_i > 0} = \min\left\{\frac{14}{7}, \frac{1}{1}\right\} \Rightarrow \text{sale } \lambda_1^2$$

- **Iteración 2:**

Continuando con lo hecho en la iteración anterior, tenemos que las variables básicas son $h, \lambda_1^1, \lambda_2^2$. Así, el *master problem* viene dado por:

$$(MP_2) \qquad \min\ z = (-1,-2)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\lambda_1^1 + (-1,-3)\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\lambda_2^2$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \qquad (1,1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\lambda_1^1 + (3,1)\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\lambda_2^2 + h &= 14 \\ \lambda_1^1 &= 1 \\ \lambda_2^2 &= 1 \\ h, \lambda_1^1, \lambda_2^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

El tableau asociado:

h	λ_1^1	λ_2^2	
0	0	-13	0
1	0	7	14
0	1	0	1
0	0	1	1

$\xrightarrow{\text{Forma canónica}}$

h	λ_1^1	λ_2^2	
0	0	0	13
1	0	0	7
0	1	0	1
0	0	1	1

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es decir, la solucin en curso es $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,0,1,4)$ con $z = 13$. Las variables duales

$$(\omega, \alpha_1, \alpha_2) = c_B B^{-1} = (0,0,-13)\begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (0,0,-13)$$

Luego los subproblemas [6]:

[6] notar que el problema (SP_2^2) es el mismo subproblema que en la iteración anterior

$$(SP_2^1)\ \text{mín}\ f_1 = ((-1,-2) - 0(1,1))\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrcl} \text{s.a} & -x_1 + x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 + 2x_2 & \leq & 8 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Resolviendo el problema concluimos que $d_1^1 = (2,1)$ es una dirección de no acotamiento con un costo reducido asociado dado por $f_1^* = -3$

$$(SP_2^2)\ \text{mín}\ f_2 = ((-1,-3) - 0(3,1))\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrcl} \text{s.a} & x_3 + x_4 & \leq & 5 \\ & -x_3 + x_4 & \leq & 3 \\ & x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Resolviendo el problema concluimos que $x_2^2 = (1,4)$ es el vértice óptimo con un costo reducido asociado dado por $f_2^* - \alpha_2 = 0$

- **Optimalidad:** No es óptimo porque existe una variable con costo reducido negativo.
- **Entrada:** Hacemos que entre la variable asociada al único costo reducido negativo: μ_1^1 asociado a d_1^1
- **Salida:** Necesitamos ver los valores de la columna que va entrar a la base:

$$\bar{A}_{\cdot s} = B^{-1}\begin{bmatrix} A^1 d_1^1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (1,1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{(\bar{A}_{\cdot s})_i > 0}{\text{mín}} = \text{mín}\left\{\frac{7}{3}\right\} \Rightarrow \text{sale } h$$

- ITERACIÓN 3:

Ahora tenemos que las variables básicas son $\mu_1^1, \lambda_1^1, \lambda_2^2$. Así, el *master problem* viene dado por:

$$(MP_3) \qquad \text{mín}\ z = (-1,-2)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\lambda_1^1 + (-1,-2)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\mu_1^1 + (-1,-3)\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\lambda_2^2$$

$$\begin{array}{rrcl} \text{s.a} & (1,1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\lambda_1^1 + (1,1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\mu_1^1 + (3,1)\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\lambda_2^2 & = & 14 \\ & \lambda_1^1 & = & 1 \\ & \lambda_2^2 & = & 1 \\ & \mu_1^1, \lambda_1^1, \lambda_2^2 & \geq & 0 \end{array}$$

El tableau asociado:

μ_1^1	λ_1^1	λ_2^2	
-4	0	-13	0
3	0	7	14
0	1	0	1
0	0	1	1

$\xrightarrow{\text{Forma canónica}}$

μ_1^1	λ_1^1	λ_2^2	
0	0	0	67/3
1	0	0	7/3
0	1	0	1
0	0	1	1

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -7/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es decir, la solución en curso es $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (14/3, 7/3, 1, 4)$ con $z = 67/3 \approx$ 22,333. Las variables duales

$$(\omega, \alpha_1, \alpha_2) = c_B B^{-1} = (-4, 0, -13)\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -7/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (-4/3, 0, -11/3)$$

Luego los subproblemas:

$$(SP_3^1)\ \text{mín}\ f_1 = ((-1,-2) + \frac{4}{3}(1,1))\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrcl} \text{s.a} & -x_1 + x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 + 2x_2 & \leq & 8 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Resolviendo el problema concluimos que $x_2^1 = (4,6)$ es vértice óptimo del subproblema con un costo reducido asociado dado por $f_1^* - \alpha_1 = -8/3$

$$(SP_3^2)\ \text{mín}\ f_2 = ((-1,-3) + \frac{4}{3}(3,1))\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrcl} \text{s.a} & x_3 + x_4 & \leq & 5 \\ & -x_3 + x_4 & \leq & 3 \\ & x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Resolviendo el problema concluimos que $x_2^2 = (0,3)$ es el vértice óptimo con un costo reducido asociado dado por $f_2^* - \alpha_2 = -4/3$

- **Optimalidad:** No es óptimo porque existen variables con costo reducido negativo.
- **Entrada:** Hacemos que entre la variable asociada al menor costo reducido negativo: λ_2^1 asociado a x_2^1
- **Salida:** Necesitamos ver los valores de la columna que va entrar a la base:

$$\bar{A}_{\cdot s} = B^{-1}\begin{bmatrix} A^1 x_2^1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -7/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (1,1)\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{(\bar{A}_{\cdot s})_i > 0}{\text{mín}} = \text{mín}\left\{\frac{7/3}{10/3}, \frac{1}{1}\right\} \Rightarrow \text{sale } \mu_1^1$$

- ITERACIÓN 4:

Ahora tenemos que las variables básicas son $\lambda_2^1, \lambda_1^1, \lambda_2^2$ asociados a (4,6), (0,0) y (1,4) respectivamente. Así, el *master problem* viene dado por:

$$(MP_4) \qquad \text{mín}\ z = (-1,-2)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\lambda_1^1 + (-1,-2)\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}\lambda_2^1 + (-1,-3)\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\lambda_2^2$$

$$\begin{array}{rrcl} \text{s.a} & (1,1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\lambda_1^1 + (1,1)\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}\lambda_2^1 + (3,1)\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\lambda_2^2 & = & 14 \\ & \lambda_1^1 + \lambda_2^1 & = & 1 \\ & \lambda_2^2 & = & 1 \\ & \lambda_1^1, \lambda_2^1, \lambda_2^2 & \geq & 0 \end{array}$$

El tableau asociado:

$$\begin{array}{ccc|c} \mu_1^1 & \lambda_1^1 & \lambda_2^2 & \\ \hline -16 & 0 & -13 & 0 \\ \hline 10 & 0 & 7 & 14 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \xrightarrow{\text{Forma canónica}} \begin{array}{ccc|c} \lambda_2^1 & \lambda_1^1 & \lambda_2^2 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 121/5 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 7/10 \\ 0 & 1 & 0 & 3/10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/10 & 0 & -7/10 \\ -1/10 & 1 & 7/10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es decir, la solución en curso es $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (14/5, 21/5, 1, 4)$ con $z = 121/5 \approx 24{,}2$. Las variables duales

$$(\omega, \alpha_1, \alpha_2) = c_B B^{-1} = (-16, 0, -13) \begin{bmatrix} 1/10 & 0 & -7/10 \\ -1/10 & 1 & 7/10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (-8/5, 0, -9/5)$$

Luego los subproblemas:

$$(SP_4^1)\ \text{mín}\ f_1 = ((-1,-2) + \frac{8}{5}(1,1)) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{s.a} & -x_1 + x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 + 2x_2 & \leq & 8 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Resolviendo el problema concluimos que $x_3^1 = (0, 2)$ es vértice óptimo del subproblema con un costo reducido asociado dado por $f_1^* - \alpha_1 = -4/5$

$$(SP_4^2)\ \text{mín}\ f_2 = ((-1,-3) + \frac{8}{5}(3,1)) \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{s.a} & x_3 + x_4 & \leq & 5 \\ & -x_3 + x_4 & \leq & 3 \\ & x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Resolviendo el problema concluimos que $x_3^2 = (0, 3)$ es el vértice óptimo con un costo reducido asociado dado por $f_2^* - \alpha_2 = -12/5$

- **Optimalidad:** No es óptimo porque existen variables con costo reducido negativo.
- **Entrada:** Hacemos que entre la variable asociada al menor costo reducido negativo: λ_3^2 asociado a x_3^2
- **Salida:** Necesitamos ver los valores de la columna que va entrar a la base:

$$\bar{A}_{\cdot s} = B^{-1} \begin{bmatrix} A^2 x_3^2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/10 & 0 & -7/10 \\ -1/10 & 1 & 7/10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (3,1)\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/10 \\ 4/10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{(\bar{A}_{\cdot s})_i > 0}{\text{mín}} = \text{mín} \left\{ \frac{3/10}{4/10}, \frac{1}{1} \right\} \Rightarrow \text{sale } \lambda_1^1$$

- **ITERACIÓN 5:**

  Ahora tenemos que las variables básicas son $\lambda_2^1, \lambda_3^2, \lambda_2^2$ asociados a (4,6), (0,3) y (1,4) respectivamente. Así, el *master problem* viene dado por:

$$(MP_5) \qquad \min\ z = (-1,-2)\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}\lambda_2^1 + (-1,-3)\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\lambda_2^2 + (-1,-3)\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}\lambda_3^2$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{s.a} & (1,1)\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}\lambda_2^1 + (3,1)\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\lambda_2^2 + (3,1)\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}\lambda_3^2 & = & 14 \\ & \lambda_2^1 & = & 1 \\ & \lambda_2^2 + \lambda_3^2 & = & 1 \\ & \lambda_2^1, \lambda_2^2, \lambda_3^2 & \geq & 0 \end{array}$$

  El tableau asociado:

$$\begin{array}{ccc|c} \lambda_2^1 & \lambda_3^2 & \lambda_2^2 & \\ \hline -16 & -9 & -13 & 0 \\ \hline 10 & 3 & 7 & 14 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \xrightarrow{\text{Forma canónica}} \begin{array}{ccc|c} \lambda_2^1 & \lambda_3^2 & \lambda_2^2 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 26 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 \end{array}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 10/4 & 7/4 \\ 1/4 & -10/4 & -3/4 \end{bmatrix}$$

  Es decir, la solución en curso es $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 6, 1/4, 13, 4)$ con $z = 26$. Las variables duales

$$(\omega, \alpha_1, \alpha_2) = c_B B^{-1} = (-16, -9, -13)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 10/4 & 7/4 \\ 1/4 & -10/4 & -3/4 \end{bmatrix} = (-1, -6, -6)$$

  Luego los subproblemas:

$$(SP_5^1)\ \min\ f_1 = ((-1,-2) + 1(1,1))\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{s.a} & -x_1 + x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 + 2x_2 & \leq & 8 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

  Resolviendo el problema concluimos que $d_2^1 = (2,1)$ es dirección de acotamiento del subproblema con un costo reducido asociado dado por $f_1^* = -1$

$$(SP_5^2)\ \min\ f_2 = ((-1,-3) + 1(3,1))\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{s.a} & x_3 + x_4 & \leq & 5 \\ & -x_3 + x_4 & \leq & 3 \\ & x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

  Resolviendo el problema concluimos que $x_4^2 = (1,4)$ y $x_5^2 = (0,3)$ son vértices óptimos con un costo reducido asociado dado por $f_2^* - \alpha_2 = 0$

- **Optimalidad:** No es óptimo porque existe una variable con costo reducido negativo.
- **Entrada:** Hacemos que entre la variable asociada al único costo reducido negativo: μ_2^1 asociado a d_2^1
- **Salida:** Necesitamos ver los valores de la columna que va entrar a la base:

$$\bar{A}_{\cdot s} = B^{-1}\begin{bmatrix} A^1 d_2^1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 10/4 & 7/4 \\ 1/4 & -10/4 & -3/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (1,1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3/4 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$

$$\min_{(\bar{A}_{\cdot s})_i > 0} = \min\left\{\frac{1/4}{3/4}\right\} \Rightarrow \text{sale } \lambda_2^2$$

- Iteración 6:

Ahora tenemos que las variables básicas son $\lambda_2^1, \lambda_3^2, \mu_2^1$ asociados a (4,6), (0,3) y (2,1) respectivamente. Así, el *master problem* viene dado por:

$$(MP_6) \qquad \min\ z = (-1,-2)\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}\lambda_2^1 + (-1,-2)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\mu_2^1 + (-1,-3)\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\lambda_3^2$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \qquad (1,1)\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}\lambda_2^1 + (1,1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\mu_2^1 + (3,1)\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\lambda_3^2 &= 14 \\ \lambda_2^1 &= 1 \\ \lambda_3^2 &= 1 \\ \lambda_2^1, \mu_2^1, \lambda_3^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

El tableau asociado:

λ_2^1	λ_3^2	μ_2^1	
-16	-9	-4	0
10	3	3	14
1	0	0	1
0	1	0	1

$\xrightarrow{\text{Forma canónica}}$

λ_2^1	λ_3^2	μ_2^1	
0	0	0	26.333
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	1/3

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & -1 \end{bmatrix}$$

Es decir, la solución en curso es $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 6, 1/4, 13, 4)$ con $z = 26$. Las variables duales

$$(\omega, \alpha_1, \alpha_2) = c_B B^{-1} = (-16, -9, -4)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & -1 \end{bmatrix} = (-4/3, -8/3, -5)$$

Luego los subproblemas:

$$(SP_6^1)\ \text{mín}\ f_1 = ((-1,-2) + \frac{4}{3}(1,1)) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad (SP_5^2)\ \text{mín}\ f_2 = ((-1,-3) + \frac{4}{3}(3,1)) \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrcl} \text{s.a} & -x_1 + x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 + 2x_2 & \leq & 8 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rrcl} \text{s.a} & x_3 + x_4 & \leq & 5 \\ & -x_3 + x_4 & \leq & 3 \\ & x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

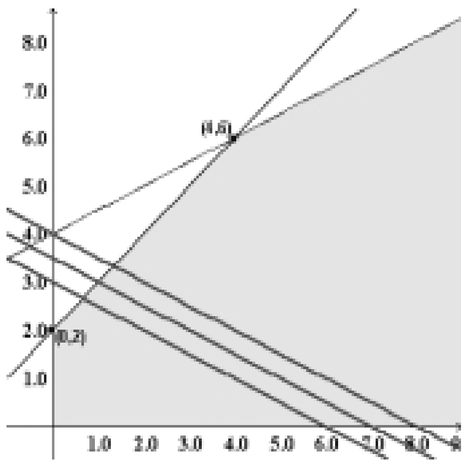
Estos subproblemas, salvo por los valores de α son los mismos que los subproblemas de la iteración 3. Como tienen el mismo w entonces tienen los mismos óptimos, pero los nuevos valores de α hacen que $f_1^* - \alpha_1 \geq 0$ y $f_2^* - \alpha_2 \geq 0$ y por la solución es óptima.

Anexo de Solución

Para resolver cada uno de los subproblemas se puede proceder utilizando nuestro viejo amigo el algoritmo simplex, sin embargo procederemos gráficamente ya que a estas alturas todos debieran ser capaces de resolver un problema de 2 variables.

Los subproblemas en cada iteración son siempre los mismos salvo por la función objetivo, es decir se trata de resoluciones de optimizaciones de distintas funciones objetivo, pero sobre el mismo espacio de soluciones factibles. Es por esto, que solo mostraremos la resolución de los subproblemas de la primera iteración.

- Subpoliedro $\underline{\mathrm{X}}^1$

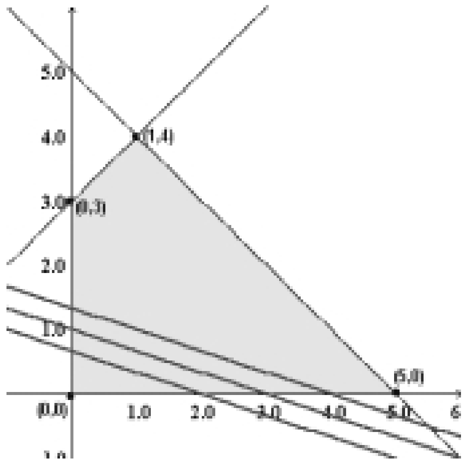


En este caso se encuentra que (2,1) es una dirección de no acotamiento, lo que gráficamente es muy facil de ver, pero ¿como encontrar la dirección en un problema complejo?. En este caso, en el tableu en forma canónica la columna asociada a la variable que entra es de la forma:

x_1	x_2	$\cdots$	x_s	$\cdots$	
0	0	$\cdots$	-4	$\cdots$	
1	0	$\cdots$	-2	$\cdots$	
0	1	$\cdots$	-1	$\cdots$	

Lo que muestra que al hacer crecer en una unidad la variable x_s que quiere entrar a la base, la función objetivo disminuye en 4 unidades y las variables x_1 y x_2 crecen 2 y 1 unidades respectivamente.

- Subpoliedro $\overline{\underline{\mathrm{X}}}^2$



Acá es claro que (1,4) es el vértice ptimo del problema.

$\odot$

3.2. **Problema 2.** Descomposición de Benders

Resuelva el siguiente problema utilizando una descomposición de Benders.

$$\text{máx } z = x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lrcl} s.a & x_1 & \leq & 6 \\ & x_2 & \leq & 6 \\ & 4x_1 + x_2 & \geq & 16 \\ & x_1 - x_2 & \leq & 2 \\ & 2x_1 + 3x_2 & \geq & 18 \\ & x_2 & \leq & 8 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Observación: ¿Le resulta familiar el problema?. Notar que corresponde al mismo problema resuelto la clase pasada utilizando el principio general de descomposición. Le podría ser de mucha utilidad académica comparar como evolucionan ambos métodos en cada iteracion.

Solución

Como vimos la clase pasada, existen muchas descomposiciones posibles para este problema. Seguiremos el mismo esquema de descomposición que ocupamos la clase pasada. Así, el problema puede ser escrito como

$$
\begin{array}{rrcll}
(P) & \multicolumn{4}{l}{\quad \min\ z = c^t x} \\
\text{s.a} & Ax & \leq & b & (w) \\
 & Dx & \geq & d & (v) \\
 & x & \geq & 0 &
\end{array}
$$

con

$$
c = (-1,-1) \qquad x = (x_1, x_2)
$$

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}
$$

$$
D = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad d = \begin{bmatrix} 16 \\ -2 \\ 18 \\ -8 \end{bmatrix}
$$

$\odot$

Si llamamos w a las variables duales asociadas al primer grupo de restricciones y v al segundo grupo de ellas, el problema dual viene dado por:

$$
\begin{array}{rrcl}
(D) & \multicolumn{3}{l}{\quad \max\ y = b^t w + d^t v} \\
\text{s.a} & A^t w + D^t v & \leq & c \\
 & w & \leq & 0 \\
 & v & \geq & 0
\end{array}
$$

O equivalentemente:

$$
(D') \qquad \max_{w \leq 0} \left\{ b^t w + \begin{array}{cc} \max\ d^t v & \\ \text{s.a} & \begin{array}{c} D^t v \leq c - A^t w \\ v \geq 0 \end{array} \end{array} \right\}
$$

Para un w dado, dualicemos el problema anterior:

$$
(D'') \qquad \max_{w \leq 0} \left\{ b^t w + \begin{array}{cc} \min\ (c - A^t w)x & \\ \text{s.a} & \begin{array}{c} Dx \leq d \\ x \geq 0 \end{array} \end{array} \right\}
$$

O equivalentemente

$$(D''') \qquad \begin{array}{c}\text{máx} \\ w \leq 0\end{array} \left\{ b^t w + \begin{array}{ll}\text{mín } (c - A^t w)x^i & \\ \text{s.a} & x^i \text{ vértice de } \underline{\overline{\mathrm{X}}}\end{array} \right\}$$

Luego, con un poco de aritmética obtenemos el *master problem de benders*:

$$(BMP) \qquad \text{máx } \gamma$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{s.a} & \gamma & \leq & b^t w + (c - A^t w)x^i \quad \forall x^i \text{ vértice de } \underline{\overline{\mathrm{X}}} \\ & w & \leq & 0 \end{array}$$

Entonces, para el caso específico que estamos estudiando el master problem de benders queda:

$$(BMP) \qquad \text{máx } \gamma$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{s.a} & \gamma & \leq & (6,6)\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right) (x_1^i, x_2^i) \\ & w_1, w_2 & \leq & 0 \end{array}$$

Al igual que en la resolución de este problema utilizando principio general de descomposición, necesitamos un vértice inicial para escribir nuestro master problem. Tomemos el mismo vértice que tomamos la clase pasada: $x^1 = (3,4)$

- Iteración 1:

$$(BMP_1) \qquad \text{máx } \gamma$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{s.a} & \gamma & \leq & 6w_1 + 6w_2 + 3(-1 - w_1) + 4(-1 - w_2) \\ & w_1, w_2 & \leq & 0 \end{array}$$

Resolviendo este problemas obtenemos que la solución óptima de este problema viene dada por [7]:

$$\bar{\gamma} = -7 \qquad \bar{w_1} = 0 \qquad \bar{w_2} = 0$$

Con lo cual el subproblema a resolver viene dado por [8]:

$$(BSP1) \qquad \text{mín} \left((-1,-1) - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) (x_1, x_2)$$

[7] Por fines académicos, no me detendre en la resolución de este problema

[8] Notar la similitud con el $(SP1)$ de la clase pasada.

$$\begin{array}{lrcl} \text{s.a} & 4x_1 + x_2 & \geq & 16 \\ & x_1 - x_2 & \leq & 2 \\ & 2x_1 + 3x_2 & \geq & 18 \\ & x_2 & \leq & 8 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Es fácil ver que el óptimo de este problema viene dado por $x^2 = (10, 8)$ [9]. Para ver si es óptimo, verificamos si la restricción asociado a este nuevo vértice esta siendo violada:

$$¿\gamma \leq b^t\bar{w} + (c - A^t\bar{w})x^2?$$

$$\begin{array}{rcl} b^t\bar{w} + (c - A^t\bar{w})x^2 & = & (6,6)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left((-1,-1) - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} \\ & = & 0 - 10 - 8 \\ & \not\geq & -7 \end{array}$$

$\therefore$ incorporamos la restricción asociada a x^2.

- ITERACIÓN 2:

$$(BMP_2) \qquad \text{máx } \gamma$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{s.a} & \gamma & \leq & 6w_1 + 6w_2 + 3(-1 - w_1) + 4(-1 - w_2) \\ & \gamma & \leq & 6w_1 + 6w_2 + 10(-1 - w_1) + 8(-1 - w_2) \\ & w_1, w_2 & \leq & 0 \end{array}$$

Resolviendo este problemas obtenemos que la solución óptima de este problema viene dada por:

$$\bar{\gamma} = -81/7 \qquad \bar{w_1} = -11/7 \qquad \bar{w_2} = 0$$

Con lo cual el subproblema a resolver viene dado por:

$$(BSP2) \qquad \text{mín}\left((-1,-1) - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} -11/7 \\ 0 \end{pmatrix}\right)(x_1, x_2)$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{s.a} & 4x_1 + x_2 & \geq & 16 \\ & x_1 - x_2 & \leq & 2 \\ & 2x_1 + 3x_2 & \geq & 18 \\ & x_2 & \leq & 8 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

[9] a quien le quepan dudas, consultar la resolución gráfica del primer subproblema del ejemplo visto la clase pasada

Es fácil ver que el óptimo de este problema viene dado por $x^3 = (2, 8)$ [10]. Para ver si es óptimo, verificamos si la restricción asociada a este nuevo vértice esta siendo violada:

$$¿\gamma \leq b^t\bar{w} + (c - A^t\bar{w})x^3?$$

$$\begin{aligned}
b^t\bar{w} + (c - A^t\bar{w})x^3 &= (6,6)\begin{pmatrix} -11/7 \\ 0 \end{pmatrix} + \left((-1,-1) - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} -11/7 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{66}{7} + (4/7, -1)\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} \\
&\ngeq -\frac{81}{7}
\end{aligned}$$

$\therefore$ incorporamos la restricción asociada a x^3.

- Iteración 3:

$$(BMP_3) \qquad \text{máx } \gamma$$

$$\begin{array}{lrcl}
\text{s.a} & \gamma & \leq & 6w_1 + 6w_2 + 3(-1 - w_1) + 4(-1 - w_2) \\
& \gamma & \leq & 6w_1 + 6w_2 + 10(-1 - w_1) + 8(-1 - w_2) \\
& \gamma & \leq & 6w_1 + 2w_2 + 10(-1 - w_1) + 8(-1 - w_2) \\
& w_1, w_2 & \leq & 0
\end{array}$$

Resolviendo este problemas obtenemos que la solución óptima de este problema viene dada por:

$$\bar{\gamma} = -12 \qquad \bar{w_1} = -1 \qquad \bar{w_2} = -1$$

Con lo cual es obvio que la función objetivo del subproblema es nula y por tanto se verificará la factibilidad. Luego, la solución es óptima.

$\odot$

[10]Consultar la resolución gráfica del segundo subproblema del ejemplo visto la clase pasada