Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN70K: Clase Auxiliar

Principio de Descomposición

Marcel Goic F.[1]

[1]Esta es una versión bastante preliminar por lo que puede contar con numerosas faltas de ortografia y errores no forzados. Si encuentran alguno favor de denunciarlo a mgoic@ing.uchile.cl

1. El principio de descomposición.

Sea un problema de la forma

$$(P) \qquad \min\ z = c^t \cdot x$$
$$\text{s.a} \quad A \cdot x = b$$
$$x \in \underline{\overline{X}}$$

donde $x \in I\!R^n, A \in I\!R^{m\times n}, b \in I\!R^m$

Si suponemos que $\underline{\overline{X}}$ es un poliedro acotado, entonces cualquier punto dentro de $\underline{\overline{X}}$ puede ser expresado como una combinación lineal convexa de los vértices del poliedro [2]. Con esto, podemos escribir (P) como el siguiente problema al que llamaremos el *master problem*

$$(MP) \qquad \min\ z = \sum_{j=1}^{r} (c^t \cdot x^j)\lambda_j$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{s.a} & \sum_{j=1}^{r}(A \cdot x^j)\lambda_j & = & b \\ & \sum_{j=1}^{r}\lambda_j & = & 1 \\ & \lambda_j & \geq & 0 \qquad \forall\, j = 1, ..., r \end{array}$$

donde r es número de vértices de $\underline{\overline{X}}$ y x^j cada uno de ellos.

Esta nueva formulación de (P) no parece muy útil porque no conocemos *a priori* los vértices del poliedro $\underline{\overline{X}}$.

En cada iteración tendremos conoceremos un conjunto de vértices de $\underline{\overline{X}}$ y lo que haremos es resolver un subproblema para ver si (MP) es óptimo (y por tanto (P) óptimo) o encontrar un vértice de $\underline{\overline{X}}$ que incorporar a la formulación (MP). Obviamente necesitamos al menos 1 vértice inicial de $\underline{\overline{X}}$ el que frecuentemente puede hallarse por inspección. Así:

1. Sea (λ_B, λ_N) una solución básica factible inicial de (MP) [3] y sea B^{-1} la inversa de la matriz básica asociada ($B \in I\!R^{(m+1)\times(m+1)}$) pues debemos considerar las m restricciones asociadas a A mas la restriccion de convexidad).

2. Debemos ver si la solución es óptima o si existe un vértice que deba entrar a la base del (MP).

   Sea $c_B \cdot B^{-1} = (\omega, \alpha)$ donde:

   - $c_B \in I\!R^{m+1}$: coeficeintes de la función objetivo de las variables básicas de la solución actual de (MP)

[2] En caso de no poder garantizar que el poliedro sea acotado, debemos suponer que cualquier punto factible puede ser expresado como la combinación lineal de vértices y direcciones extremas del poliedro. Volveremos sobre este punto en la próxima clase

[3] es decir una base para la formulación inicial de (MP) formada por uno o mas vértices inciales.

- $\omega \in \mathbb{R}^m$: asociado a las restricciones mantenidas.
- $\alpha \in \mathbb{R}$: asociado a la restricción de convexidad.

Sea $\overline{c_j}$ el costo reducido asociado a la variable λ_j. Entonces:

$$\begin{aligned} \overline{c_j} &= c_j - (\omega, \alpha) \begin{pmatrix} A \cdot x^j \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= c^t \cdot x^j - \omega \cdot A \cdot x^j - \alpha \end{aligned}$$

Para que (MP) sea óptimo, debemos verificar que $\overline{c_j} \geq 0 \; \forall \, j$, pero equivalentemente podemos buscar $\min \overline{c_j}$ y verificar que sea positivo, dando origen así a un subproblema:

$$(SP) \qquad \begin{array}{c} \min \\ 1 \leq j \leq r \end{array} \; \overline{c_j} \; = \; \min \left\{ c^t x^j - \omega A x^j - \alpha \right\}_{j=1 \ldots r}$$
$$= \; \begin{array}{cc} \min & (c^t - \omega A)x - \alpha \\ s.a & x \in \overline{\underline{\mathrm{X}}} \end{array}$$

Luego:

- Si el valor óptimo de SP ≥ 0, (MP) es óptimo y por tanto (P) es óptimo.
- Si el valor óptimo de SP < 0, tenemos variable que entra a la base de (MP): el peso λ_s asociado a la solución óptima de (SP) x_s.

Notar que cada problema tiene muchas descomposiciones posibles dependiendo de que restricciones mantener en el subproblema y cuales dejar como definición de $\overline{\underline{\mathrm{X}}}$. Esta decisión puede ser muy relevante a la hora de resolver por lo que debe estudiarse con mucho cuidado.

3. Si no es óptimo y λ_s entra a la base, debemos escoger una variable para que salga.

   Sean:

   - $\overline{A}_{\cdot s} = B^{-1} \cdot A_{\cdot s} = B^{-1} \begin{pmatrix} A \cdot x^s \\ 1 \end{pmatrix}$
   - $\overline{b} = B^{-1} \cdot b$

   Luego, el índice t de la variable que sale viene dado por

   $$t = \operatorname{argmin} \left\{ \frac{\overline{b_i}}{(\overline{A}_{\cdot s})_i} | (\overline{A}_{\cdot s})_i > 0 \right\}$$

4. Si es óptimo, debemos reconstruir la solución para (P):

   $$x^j = \sum_{k=1}^{N_j} \lambda_k x^k$$

$\odot$

2. Problemas

2.1. Problema 1

Resuelva el siguiente problema usando el principio de descomposición:

$$\max\ z = x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lrcl}
\text{s.a} & x_1 & \leq & 6 \\
 & x_2 & \leq & 6 \\
 & 4x_1 + x_2 & \geq & 16 \\
 & x_1 - x_2 & \leq & 2 \\
 & 2x_1 + 3x_2 & \geq & 18 \\
 & x_2 & \leq & 8 \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Solución

Tenemos un problema de la forma

$$\min\ z = c^t \cdot x$$

$$\begin{array}{lrcl}
\text{s.a} & A \cdot x & \leq & b \\
 & H \cdot x & \leq & d \\
 & x & \geq & 0
\end{array}$$

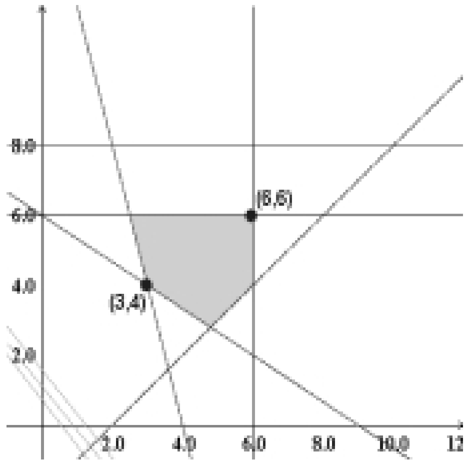
donde

$$x = (x_1, x_2) \qquad c = (-1, -1)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -1 \\ -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad d = \begin{bmatrix} -16 \\ 2 \\ -18 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Para escribir el *master problem* inicial necesitamos un vértice inicial de $\underline{\overline{\mathrm{X}}}$ que ademas satisfaga las restricciones de que mantendremos explicitamente en el (MP). Para encontrar dicho punto tendriamos que resolver una Fase I de (P), pero con fines didácticos nos concentaremos en lo importante por lo cual encontraremos este vértice por inspeccion: $x^1 = (3, 4)$.



- ITERACIÓN 1:

$$(MP1) \qquad \text{mín } z = (-1,-1)^t \cdot (3,4) \cdot \lambda_1$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \lambda_1 + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} \\ \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_1, h_1, h_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

En que h_1, h_2 son las variables de holgura para la primera y segunda restricción respectivamente. Notamos que trivialmente solo existe un punto factible para (MP) y que corresponde al punto $x^1 = (3,4)$ y por tanto la base inicial para este problema es la que corresponde a dicho vértice. Así, las variables básicas son h_1, h_2 y λ_1. Su tableau:

h_1	h_2	λ_1	
0	0	-7	0
1	0	3	6
0	1	4	6
0	0	1	1

Pasando a forma canónica:

h_1	h_2	λ_1	
0	0	0	7
1	0	0	3
0	1	0	2
0	0	1	1

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para ver si la base anterior es óptima tenemos que resolver el siguiente subproblema:

$$(SP1) \qquad \text{mín } f = (c^t - \omega \cdot A) \cdot x - \alpha$$

$$\begin{array}{rrcl} s.a & H \cdot x & \leq & d \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

donde

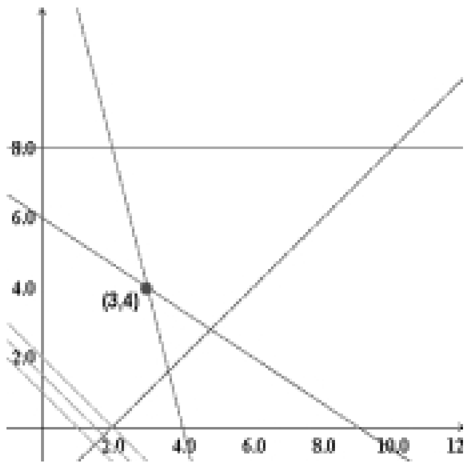
$$\begin{aligned} (\omega, \alpha) &= c_B B^{-1} \\ &= (0, 0, -7) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= (\underbrace{0, 0}_{\omega}, \underbrace{-7}_{\alpha}) \end{aligned}$$

Entonces el subproblema queda como:

$$(SP1) \qquad \text{mín } f = -x_1 - x_2 + 7$$

$$\begin{array}{rrcl} s.a & 4x_1 + x_2 & \geq & 16 \\ & x_1 - x_2 & \leq & 2 \\ & 2x_1 + 3x_2 & \geq & 18 \\ & x_2 & \leq & 8 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Podríamos resolver este subproblema usando simplex, pero como es algo que ya todos saben hacer optaremos por resolverlo por inspección: es facil ver que el óptimo es $x^2 = (10, 8)$



- **Optimalidad:** No es óptimo porque el valor de la función objetivo del subproblema es $f^* = -10 - 8 + 7 = -11 < 0$
- **Entrada:** Entra la variable λ_2 asociada a x^2.
- **Salida:** Tenemos que calcular $\overline{a}_{is}$:

$$\overline{A}_{\cdot s} = B^{-1} \begin{bmatrix} A \cdot x^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego

$$\begin{aligned} \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} &= \min_{\bar{a}_{is} > 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{3}{7}, \frac{2}{4}, \frac{1}{1} \right\} \\ &= \frac{3}{7} \Rightarrow \text{sale } h_1 \end{aligned}$$

- Iteración 2:

$$(MP2) \qquad \min\ z = (-1,-1)^t \cdot (3,4) \cdot \lambda_1 + (-1,-1)^t \cdot (10,8) \cdot \lambda_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \lambda_1 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix} \lambda_2 + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 1 \\ \lambda_1, \lambda_2, h_1, h_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Según la aplicación de los criterios de entrada y salida en la iteracion anterior, las variables básicas son λ_2, h_2 y λ_1. Su tableau:

λ_2	h_2	λ_1	
-18	0	-7	0
10	0	3	6
8	1	4	6
1	0	1	1

Pasando a forma canónica:

λ_2	h_2	λ_1	
0	0	0	82/7
1	0	0	3/7
0	1	0	2/7
0	0	1	4/7

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/7 & 0 & -3/7 \\ -4/7 & 1 & -16/7 \\ -1/7 & 0 & 10/7 \end{bmatrix}$$

Para ver si la base es óptima tenemos que resolver el siguiente subproblema:

$$(SP2) \qquad \min\ f = (c^t - \omega \cdot A) \cdot x - \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad H \cdot x &\leq d \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

donde

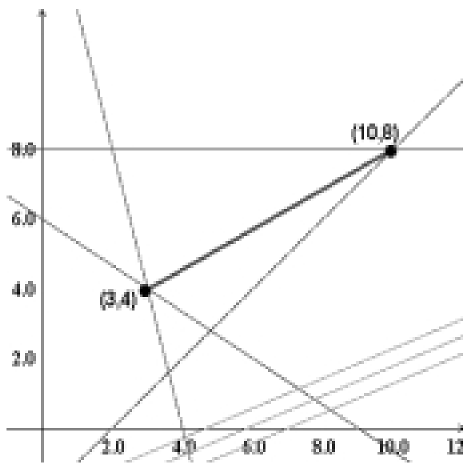
$$\begin{aligned}
(\omega,\alpha) &= c_B B^{-1} \\
&= (-18,0,-7)\begin{bmatrix} 1/7 & 0 & -3/7 \\ -4/7 & 1 & -16/7 \\ -1/7 & 0 & 10/7 \end{bmatrix} \\
&= (\underbrace{-11/7,0}_{\omega},\underbrace{-16/7}_{\alpha})
\end{aligned}$$

Entonces el subproblema queda como:

$$(SP2) \qquad \text{mín } f = \frac{4}{7}x_1 - x_2 + \frac{16}{7}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.a} \quad 4x_1 + x_2 &\geq 16 \\
x_1 - x_2 &\leq 2 \\
2x_1 + 3x_2 &\geq 18 \\
x_2 &\leq 8 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Nuevamente resolvemos por inspección obteniendo que el óptimo se encuentra en $x^3 = (2,8)$.



- **Optimalidad:** No es óptimo porque el valor de la función objetivo del subproblema es $f^* = \frac{8}{7} - 8 + \frac{-16}{7} = \frac{-32}{7} < 0$
- **Entrada:** Entra la variable λ_3 asociada a x^3.
- **Salida:** Tenemos que calcular $\overline{a}_{is}$:

$$\overline{A}_{\cdot s} = B^{-1}\begin{bmatrix} A\cdot x^3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/7 & 0 & -3/7 \\ -4/7 & 1 & -16/7 \\ -1/7 & 0 & 10/7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/7 \\ 32/7 \\ 9/7 \end{bmatrix}$$

Luego

$$\begin{aligned}\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} &= \min_{\bar{a}_{is}>0}\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}}\right\} \\ &= \min\left\{\frac{2/7}{32/7}, \frac{4/7}{9/7}\right\} \\ &= \frac{2}{32} \Rightarrow \text{sale } h_2\end{aligned}$$

- ITERACIÓN 3:

$$(MP3) \qquad \min\, z = (-1,-1)^t \cdot (3,4)\cdot\lambda_1 + (-1,-1)^t\cdot(10,8)\cdot\lambda_2 + (-1,-1)^t\cdot(2,8)\cdot\lambda_3$$

$$\text{s.a} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}\lambda_1 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix}\lambda_2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}\lambda_3 + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\lambda_1+\lambda_2+\lambda 3 &= 1 \\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,h_1,h_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Según la aplicación de los criterios de entrada y salida en la iteracion anterior, las variables básicas son λ_2, λ_3 y λ_1. Su tableau:

λ_2	λ_3	λ_1	
-18	-10	-7	0
10	2	3	6
8	8	4	6
1	1	1	1

Pasando a forma canónica:

λ_1	h_2	λ_1	
0	0	0	12
1	0	0	7/16
0	1	0	1/16
0	0	1	1/2

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/8 & 1/32 & -1/2 \\ -1/2 & 7/32 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & 2 \end{bmatrix}$$

Para ver si la base es óptima tenemos que resolver el siguiente subproblema:

$$(SP3) \qquad \min\ f = (c^t - \omega\cdot A)\cdot x - \alpha$$

$$\begin{aligned}\text{s.a}\quad H\cdot x &\leq d \\ x &\geq 0\end{aligned}$$

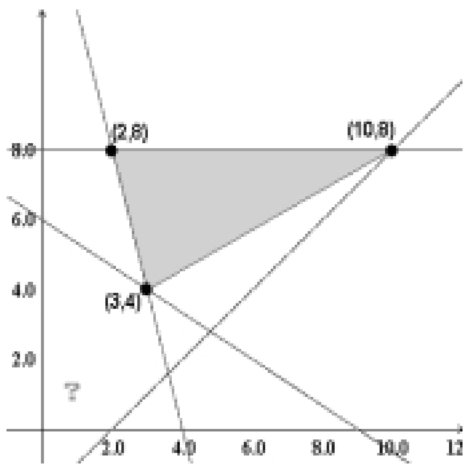
donde

$$
\begin{aligned}
(\omega, \alpha) &= c_B B^{-1} \\
&= (-18, -10, -7) \begin{bmatrix} 1/8 & 1/32 & -1/2 \\ -1/8 & 7/32 & -1/2 \\ 0 & -1/4 & 2 \end{bmatrix} \\
&= (\underbrace{-1, -1}_{\omega}, \underbrace{0}_{\alpha})
\end{aligned}
$$

Entonces el subproblema queda como:

$$
\begin{array}{llrcl}
(SP3) & \text{mín } f = 0x_1 - 0x_2 + 0 & & & \\
s.a & & 4x_1 + x_2 & \geq & 16 \\
& & x_1 - x_2 & \leq & 2 \\
& & 2x_1 + 3x_2 & \geq & 18 \\
& & x_2 & \leq & 8 \\
& & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

donde es claro que la función objetivo óptima tiene un valor 0 y por tanto no existe variable (vértice de $\underline{\overline{\mathrm{X}}}$) que entrando a la base mejore la solución de (MP).



Notar que el valor nulo en la función objetivo óptima de (SP)indica que la redefinición del conjunto factible $\underline{\overline{\mathrm{X}}}$ no incluira nuevos puntos mejores, pero tampoco excluira el óptimo que ya tenemos y por tanto la inclusión de un nuevo vértice tiene una *tasa de mejora* nula.

Solo nos queda reconstruir la solución para el problema original (P):

$$
\begin{aligned}
(x_1, x_2) &= \frac{7}{10}(10, 8) + \frac{1}{10}(2, 8) + \frac{1}{2}(3, 4) \\
&= (6, 6).
\end{aligned}
$$

$\odot$

2.2. Problema 2. Descomposición del single commodity minimum cost network flow problem

Considere un grafo con m nodos y n arcos dirigidos. En cada nodo se produce y se consume distintas cantidades de un cierto producto. Dicho producto será transportado a través de los arcos. Sea:

c_j = Costo de transportar una unidad de producto a través del arco j.
b_i = Demanda neta del nodo i ($b_i < 0$ corresponde a una oferta: el nodo i produce mas de lo que consume).
u_j = Capacidad del arco j.
x_j = Flujo a través del arco j (variable de decisión).
A = Matriz de incidencia nodo-arco. Vale decir A es una matriz de $m \times n$ que indica cual es el origen y destino de cada uno de los arcos. La matriz A se construye definiendo sus elementos a_{ij} como

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si el arco j llega al nodo i} \\ -1 & \text{Si el arco j parte del nodo i} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Note que cada columna de A tiene exactamente 2 elementos no nulos, con valores -1 y 1 (correspondiente a los nodos de origen y destino del arco representado por esa columna).

1. Plantee el problema de minimización de los costos totales de transportes sujeta a restricciones de capacidad y conservación de flujo.

2. Aplique el principio de descomposición a este problema. Mantenga la restricción de capacidad en el Master Problem y lleve las restricciónes de conservación de flujos y la no negatividad al subproblema (i.e se generan puntos extremos para el poliedro definido por esas restricciones). Formule el (MP) cuando se conocen k puntos extremos. Formule el subproblema en función de las variables duales de (MP_k).

3. Interprete la formulación identificando que problema se resuelve en cada subproblema.

Solución

1. Es fácil ver que el modelo queda bien descrito por:

$$\min\ z = c^t x$$

$$\begin{array}{rrcll} \text{s.a} & x & \leq & u & \text{restricción de capacidad de arcos} \\ & Ax & = & b & \text{en cada nodo: entra-sale=demanda neta} \\ & x & \geq & 0 & \text{no negatividad} \end{array}$$

Pasando a forma estandar

$$\min\ z = c^t x$$

$$\begin{array}{rrcl} \text{s.a} & x+h & = & u \\ & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

2. Sea $\underline{\overline{X}} = \{x \in I\!R | Ax = b, x \geq 0\}$. Luego, suponiendo que conocemos k vértices de $\underline{\overline{X}}$ podemos escribir cualquier punto $x \in \underline{\overline{X}}$ como combinación lineal convexa de los k vértices conocidos:

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j \qquad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 \qquad \lambda_j \geq 0 \quad \forall\, j = 1...k$$

Entonces el Master Problem queda como:

$$(MP_k)\ \min z = \left(\sum_{j=1}^{k} c^t x^j \right) \lambda_j$$

$$\begin{array}{llcl} \text{s.a} & \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j + h & = & u \\ & \sum_{j=1}^{k} \lambda_j & = & 1 \\ & h_i, \lambda_j & \geq & 0 \end{array}$$

Sea B la submatriz básica asociada a la base en curso de (MP_k).
Sea $(\omega, \alpha) = c_B B^{-1}$ $(\omega \in I\!R^n, \alpha \in I\!R)$ Entonces el subproblema queda como:

$$(SP_k) \qquad \min\ f = (c^t - \omega I)x - \alpha$$

$$\begin{array}{rrcl} s.a & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

O equivalentemente:

$$(SP_k) \qquad \min\ f = \left(\sum_{i=1}^{n} (c_i - \omega_i) x_i \right) - \alpha$$

$$\begin{array}{rrcl} \text{s.a} & Ax & = & b \\ & x_i & \geq & 0 \end{array}$$

3. Es fácil ver que el problema (SP_k) es equivalente a resolver un problema de transporte sin restricciones de capacidad para los arcos, pero con costos por arco dados por $r_i = c_i - \omega_i$ lo que corresponde a una modificación de la estructura de costos origial en base a la información dada por el Master Problem de modo que los arcos mas llenos sean mas caros[4].

$\odot$

[4]Para los iniciados en la materia podrán ver la relación directa entre principio de descomposición, dualidad y relajación lagrangeana.