Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN70K: Clase Auxiliar

Programación Cuadrática

Marcel Goic F.[1]

[1]Esta es una versión bastante preliminar por lo que puede contar con numerosas faltas de ortografia y errores no forzados. Si encuentran alguno favor de denunciarlo a mgoic@ing.uchile.cl

1. Una breve introducción.

Consideremos un problema de la forma

$$(P) \qquad \text{mín } f(x) = c^t x + \frac{1}{2} x^t H x$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & A \cdot x \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

donde $x, c \in I\!R^n, A \in I\!R^{m\times n}, H \in I\!R^{n\times n}, b \in I\!R^m$

Recordar que la ptimalidad de un punto $\bar{x}$ puede verificarse con las condiciones de Karush Khun Tucker:

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i\in I(\bar{x})} \mu_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$$

$$g_i(\bar{x}) \geq 0 \qquad \mu_i \geq 0$$

donde $I(\bar{x}) = \{i | g_i(x) = 0\}$.

Apliquemos las condiciones de KKT al problema (P). Para ello, notamos que (P) puede escribirse como:

$$(P) \qquad \text{mín } f(x) = c^t x + \frac{1}{2} x^t H x$$

$$\text{s.a} \quad \begin{pmatrix} Ax - b \\ -x \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Denotemos por (v, w) los ponderadores de la condición de KKT con v asociados a las restricciones $Ax - b \leq 0$ y w los asociados a $x \geq 0$. Con esto:

$$\nabla f(x) = c + x^t H$$

$$\nabla g(x) = \begin{pmatrix} A \\ -e \end{pmatrix} \qquad \text{con } e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in I\!R^n$$

Luego las condiciones de KKT pueden expresarse como:

$$-(c + x^t H) = -v^t A + w$$

$$v^t (Ax - b) = 0$$

$$w^t x = 0$$
$$v, w \geq 0 \qquad Ax - b \leq 0 \qquad x \leq 0$$

Sea $-y = Ax - b$. Así KKT queda

$$\begin{aligned} &-(c + x^t H) = -v^t A + w \\ &v^t y = 0 \qquad w^t x = 0 \qquad\qquad (*) \\ &v, w \geq 0 \qquad x, y \geq 0 \end{aligned}$$

De esta manera, minimizar el problema (P) es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones de KKT. Requerimos una solución para este sistema de ecuaciones, para lo que distinguimos entre 2 casos:

- Si $c \geq 0$ tenemos una solución factible sencilla:

$$w = c \qquad v = 0$$
$$x = 0 \qquad y = b$$

- Si $c \leq 0$ no tenemos una solución factible sencilla y por lo tanto debemos resolver un problema auxiliar (PA) similar a la Fase I del algoritmo simplex:

$$(PA) \qquad \min \sum_i h_i$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad c = -x^t H - v^t A + w - h& \\ v^t y = 0 \qquad w^t x = 0& \qquad\qquad (*) \\ v, w \geq 0 \qquad x, y \geq 0& \end{aligned}$$

Resolución de (PA)

Las restricciones $(*)$ hacen que el problema (PA) sea no lineal lo que dificulta su resolución. Sin embargo, existen al menos dos enfoques para resolver de manera sencilla este problema. Sea (PA') un problema como (PA), pero sin las restricciones $(*)$. Claramente (PA') es un problema lineal y por tanto podemos resolverlo con simplex (karmarkar u otro) internalizando de alguna manera las restriciones $(*)$.

Método de Wolfe: modificación de criterio de entrada

Resolvemos (PA') con simplex utilizando la siguiente solución básica factible inicial:

$$\begin{array}{lll} w = c & v = 0 & h_i = \begin{cases} -c_i & c_i < 0 \\ 0 & c_i \geq 0 \end{cases} \\ x = 0 & y = b & \end{array}$$

Y en cada iteración:

- Una variable no básica v_i puede entrar a la base si y_i es no básica o sale al entrar v_i.
- Una variable no básica y_i puede entrar a la base si v_i es no básica o sale al entrar y_i.
- Una variable no básica w_i puede entrar a la base si x_i es no básica o sale al entrar w_i.
- Una variable no básica x_i puede entrar a la base si w_i es no básica o sale al entrar x_i.

Introducción de variables binarias

Sean:

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & v_i > 0 \\ 0 & v_i \leq 0 \end{cases} \qquad i = 1...n \qquad \beta_j = \begin{cases} 1 & w_j > 0 \\ 0 & w_j \leq 0 \end{cases} \qquad j = 1...m$$

Entonces agregamos las siguientes restricciones a (PA'):

$$\begin{array}{ll} v_i \leq \alpha_i M & y_i \leq (1 - \alpha_i) M \\ w_i \leq \beta_i M & x_i \leq (1 - \beta_i) M \end{array}$$

y resolvemos el problema lineal mixto.

2. Problemas

2.1. Problema 1. Programación cuadrática

Considere el siguiente problema de programación no lineal:

$$\text{mín } f(x) = c^t x + \frac{1}{2} x^t H x$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{s.a} & x_1 + x_2 & \leq & 10 \\ & x_1 - 2x_2 & \leq & 8 \\ & x_1 & \geq & 0 \\ & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\text{en que } H = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Suponga que $c^t = (3,4)$. Formule un sistema de ecuaciones que permita encontrar puntos de KKT. ¿Cómo lo resolvería?.
2. Suponga que $c^t = (-3,-4)$. Formule un sistema de ecuaciones que permita encontrar puntos de KKT. ¿Cómo lo resolvería?.

Solución:

Haciendo el cambio de variables $y = Ax - b$ tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} &-(c + x^tH) = -v^tA + w \\ &v^ty = 0 \qquad w^tx = 0 \qquad\qquad (*) \\ &v, w \geq 0 \qquad x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Para resolver (P) necesitamos resolver el sistema de ecuaciones

1. Como $C \geq 0$ tenemos una solucin sencilla:

$$w = c \qquad v = 0$$

$$x = 0 \qquad y = b$$

Entonces, la solución del problema es $x = 0$.

2. El sistema de ecuaciones es equivalente al anterior, pero ahora no existe una trivial. Entonces, resolvemos un problema auxiliar de minimización de variables de holgura h_i:

$$(PA) \qquad \min \sum_i h_i$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad c = -x^tH - v^tA + w - h \\ v^ty = 0 \qquad w^tx = 0 \\ v, w \geq 0 \qquad x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Para resolver este problema auxiliar tenemos dos maneras alternativas de abordarlo:

- Usar método de wolfe para resolver la relajación lineal:

$$(PAL) \qquad \min \sum_i h_i$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & c = -x^t H - v^t A + w - h \\ & v, w \geq 0 \qquad x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Resolvemos usando simplex la siguiente solución básica factible inicial:

$$\begin{array}{ll} w = c & v = 0 \\ x = 0 & y = b \end{array} \qquad h_i = \begin{cases} -c_i & c_i < 0 \\ 0 & c_i \geq 0 \end{cases}$$

Observación: Al resolver con simplex, se debe modificar el criterio de entrada a la base para satisfacer las restricciones no lineales relajadas.

- Introducir variables binarias en la formulación: Como ya se explico, se reemplazan las restricciones no lineales por las siguientes:

$$v_i \leq \alpha_i M \qquad y_i \leq (1 - \alpha_i) M$$

$$w_i \leq \beta_i M \qquad x_i \leq (1 - \beta_i) M$$

$\odot$