Bernays Project: Text No. 23

Betrachtungen zu Ludwig Wittgensteins *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* (1959)

Comments on Ludwig Wittgenstein's *Remarks on the Foundations of Mathematics*

(*Ratio* 2, S. 1–18; repr. in [?], S. ■ –■
repr. in *Abhandlungen*, S. 119–141)

I

1/A119 | Das Buch, an welches sich die folgenden Betrachtungen knüpfen, bildet den zweiten Teil der postumen Veröffentlichungen von ausgewählten Publikationsfragmenten Wittgensteins, in denen er seine spätere Philosophie zur Darstellung bringt.[a] Die Notwendigkeit einer Auswahl und der stellenweise spürbare Fragmentcharakter sind insofern nicht sehr störend, als Wittgenstein ohnehin in seinen Publikationen auf eine geschlossene Abhandlungsform verzichtet und seine Gedanken absatzweise – öfters von einem Thema zu einem anderen überspringend – äußert. Andererseits muß man dem Autor zugute halten, daß er gewiß vieles in der Anordnung und Zusammenstellung noch umgestaltet hätte, wenn er selbst noch hätte das Werk fertigstellen können. Die Herausgeber des Buches haben übrigens durch ein sehr eingehendes Inhaltsverzeichnis sowie auch ein Sachverzeichnis das Ihrige getan, um die Übersicht über den Inhalt zu erleichtern. Über die Entstehung der verschiedenen Teile I–V gibt das Vorwort Auskunft.

Gegenüber dem Standpunkt des *Tractatus*, der ja die anfänglich sehr extreme Doktrin der Wiener Schule wesentlich beeinflußte, bedeutet Wittgensteins spätere Philosophie eine Korrektur und Abklärung in wesentlichen Momenten. Vor allem ist hier die sehr schematische Vorstellung von der Struktur der Wissenschaftssprache – insbesondere von dem Aufbau der Aussagen

[a] All Wittgenstein references were updated and now refer to [?].

aus Atomsätzen – fallengelassen. Geblieben ist aber die ablehnende Haltung gegenüber dem spekulativen Denken sowie auch die ständige Tendenz zum Desillusionieren.

So sagt Wittgenstein auch selbst, offensichtlich mit Bezug auf seine eigene Philosophie (S. 63, Nr. 18): „Finitismus und Behaviorismus sind ganz ähnliche Richtungen. Beide sagen: hier ist doch nur. . . . Beide leugnen die Existenz von etwas, beide zu dem Zweck, um aus einer Verwirrung zu entkommen. – Was ich tue, ist nicht, Rechnungen als falsch zu erweisen, sondern das *Interesse* von Rechnungen einer Prüfung zu unterziehen.“ Und an späterer Stelle erklärt er (S. 174, Nr. 16): „Meine Aufgabe ist es nicht, Rus-
A120 sells Logik von *innen* anzugreifen, sondern | von außen. Das heißt: nicht, sie mathematisch anzugreifen – sonst triebe ich Mathematik –, sondern ihre Stellung, ihr Amt. Meine Aufgabe ist es nicht, über den Gödelschen Beweis, zum Beispiel, zu reden, sondern an ihm vorbeizureden.“

Wie man sieht, fehlt bei Wittgenstein nicht das Spaßhafte im Ausdruck, und in den mannigfachen dialoghaft gestalteten Partien liebt er es oft, sich als Schelm zu gebärden.

Andererseits mangelt es ihm nicht am esprit de finesse, und seine Ausführungen enthalten neben dem ausdrücklich Gesagten auch vielerlei implizite Anregungen.

2 | Durchgehend aber machen sich zwei problematische Tendenzen geltend. Die eine geht darauf aus, die eigentliche Rolle des Denkens – das gedankliche Intendieren – in einer behavioristischen Art wegzudisputieren. David Pole bestreitet freilich in seiner interessanten Darstellung und Erörterung der späteren Philosophie Wittgensteins,[1] daß dieser ein Anhänger des Behaviorismus ist; das ist auch insofern berechtigt, als Wittgenstein gewiß nicht die seelischen Erlebnisse des Fühlens, Wahrnehmens und Vorstellens abstreitet; aber in Bezug auf das Denken ist seine Einstellung durchaus behavioristisch. Hier tendiert er allenthalben zu einem Kurzschluß. Überall soll sich an die Vorstellungen und Wahrnehmungen direkt das Handeln anschließen. „Wir machen es so“, das ist meist das letzte Wort des Verständnisses – soweit nicht noch auf ein Bedürfnis als anthropologische Tatsache rekurriert wird. Das Gedankliche in seiner Eigenart wird weggelassen. Charakteristisch in diesem Sinne ist, daß ein „Beweis“ als „Bild“ oder „Paradigma“ aufgefaßt wird; und obwohl Wittgenstein der Methode des Formalisierens der Beweise kritisch ge-

[1] *Vide* [**?**].

genübersteht, nimmt er doch fortwährend die formalen Beweisführungen im Russellschen System als Beispiel. Exempel von eigentlichen mathematischen Beweisen, die nicht bloße Rechnungen sind, nicht bloß durch Vorweisen einer Figur erfolgen oder formalistisch geführt werden, kommen in diesem Buch über Grundlagen der Mathematik, in welchem ein sehr großer Teil von der Frage handelt, was Beweise eigentlich sind, überhaupt nicht vor – obwohl der Verfasser sich offensichtlich mit etlichen mathematischen Beweisen befaßt hat.

Als charakteristisch für Wittgensteins behavioristische Einstellung und als Erläuterung dessen, was mit dem Kurzschluß gemeint ist, sei eine Stelle erwähnt. Nachdem er verschiedene Versuche der Kennzeichnung des Schlie-
A121 ßens als unbefriedigend abgelehnt hat, fährt er fort | (S. 8, Nr. 17): „Darum
ist es notwendig, zu schauen, wie wir denn in der Praxis der Sprache Schlüsse vollziehen; was das Schließen im Sprachspiel für ein Vorgang ist. Zum Beispiel: In einer Vorschrift steht: ‚Alle, die über 1,80 m hoch sind, sind in die ... Abteilung aufzunehmen.' Ein Kanzlist verliest die Namen der Leute, dazu ihre Höhe. Ein anderer teilt sie den und den Abteilungen zu. – ‚N. N. 1,90 m.' – ‚Also N. N. in die ... Abteilung.' Das ist Schließen." Man sieht hier, wie Wittgenstein nur von der Kennzeichnung einer solchen Form des Schließens befriedigt ist, bei welcher von der sprachlichen Feststellung der Prämissen direkt zu einer Handlung übergegangen wird, also das spezifisch gedankliche Element eliminiert wird. Auch die Sprache erscheint unter dem Aspekt der Handlung („Sprachspiel").

Die andere problematische Tendenz entspringt aus dem – schon in der älteren Form der Philosophie von Wittgenstein vorliegenden – Programm einer strikten Trennung des Sprachlichen und des Tatsächlichen, wie sie sich ja auch in Carnaps *Logische Syntax der Sprache* vorfindet. Daß diese in der neueren Gestalt von Wittgensteins Doktrin beibehalten wird, ist nicht so selbstverständlich, da hier die Betrachtungsweise gegen die frühere in vielerlei Hinsicht aufgelockert ist. Ansätze zu einer gewissen Wandlung sind in der Tat auch zu bemerken, so wenn es auf S. 119, Nr. 18 heißt: „Es ist klar, daß die Mathematik als Technik des Umwandelns von Zeichen zum Zweck
3 des Vorhersagens mit Grammatik nichts zu tun hat." An einer | anderen
Stelle (S. 125, Nr. 42) spricht er sogar vom „synthetischen Charakter der mathematischen Sätze". Es heißt da: „Man könnte vielleicht sagen, daß der synthetische Charakter der mathematischen Sätze sich am augenfälligsten im unvorhersehbaren Auftreten der Primzahlen zeigt. Aber weil sie synthetisch sind (in diesem Sinne), sind sie drum nicht weniger a priori. ... Die Verteilung

der Primzahlen wäre ein ideales Beispiel für das, was man synthetisch a priori nennen könnte, denn man kann sagen, daß sie jedenfalls durch eine Analyse des Begriffs der Primzahl nicht zu finden ist." Wie man sieht, geht hier Wittgenstein von dem Begriff „analytisch" der Wiener Schule zu einer Begriffsbildung mehr im Kantischen Sinne zurück.

Eine gewisse Anlehnung an die Kantische Betrachtung besteht auch in der Auffassung Wittgensteins, daß die Mathematik erst den Charakter dessen bestimmt, „die Formen dessen schafft, was wir Tatsachen nennen" (vgl. S. 173). In diesem Sinne opponiert Wittgenstein auch nachdrücklich gegen die Meinung, daß die Sätze der Mathematik die Funktion empirischer Sätze haben. Andererseits hebt er verschiedentlich hervor, daß die Verwendbarkeit
A122 der Mathematik, insbesondere der | Arithmetik, auf empirischen Bedingungen beruht; zum Beispiel heißt es auf S. 14, Nr. 37: „So lernen ja die Kinder bei uns rechnen, denn man läßt sie drei Bohnen hinlegen und dann noch drei Bohnen und dann zählen, was da liegt. Käme dabei einmal fünf, einmal sieben heraus. . . , so würden wir zunächst Bohnen als für den Rechenunterricht ungeeignet erklären. Geschähe das gleiche aber mit Stäben, Fingern, Strichen und den meisten ändern Dingen, so hätte das Rechnen damit ein Ende. ‚Aber wäre dann nicht doch noch $2 + 2 = 4$?' – Dieses Sätzchen wäre damit unbrauchbar geworden."

Jedoch bleiben für Wittgensteins Auffassung Äußerungen wie die folgende erheblich (S. 160, Nr. 2): „Wer einen mathematischen Satz weiß, soll noch *nichts* wissen." Dies wird zweimal kurz hintereinander gesagt und dazugefügt: „Das heißt, der mathematische Satz soll nur das Gerüst liefern für eine Beschreibung." Nach der Art von Wittgenstein könnte man hier fragen: „Warum *soll* der Betreffende noch nichts wissen? Welches Bedürfnis drückt dieses ‚Sollen' aus?" Es scheint, daß nur eine vorgefaßte philosophische Ansicht dieses Erfordernis bestimmt, die Ansicht nämlich, daß es nur *eine* Art von Tatsächlichkeit geben könne, diejenige der konkreten Wirklichkeit. Diese Ansicht entspricht einer Art des Nominalismus, – wie er auch sonst in den Diskussionen zur Philosophie der Mathematik eine Rolle spielt. Zu einer Motivierung dieses Nominalismus müßte Wittgenstein zum mindesten weiter ausholen, als er es in dem Buch tut. Jedenfalls kann er sich hierfür nicht auf unsere tatsächliche Einstellung berufen. Er kämpft ja dagegen an, daß wir durchaus geneigt sind, zum Beispiel die Arithmetik „als Naturgeschichte des Zahlenreiches" anzusehen (vgl. S. 117, Nr. 13, sowie auch S. 116, Nr. 11). Völlig entschieden ist er freilich hierbei nicht. Er fragt sich (S. 142, Nr. 16), ob schon das die „mathematische Alchemie" charakterisiere, daß die mathe-

matischen Sätze als Aussagen über mathematische Gegenstände betrachtet werden. „In einem gewissen Sinn kann man in der Mathematik darum nicht an die Bedeutung der Zeichen appellieren, weil die Mathematik ihnen erst die Bedeutung gibt. Es ist das Typische der Erscheinung, von welcher ich rede, daß das *Mysteriöse* an irgendeinem mathematischen Begriff nicht *sofort* als irrige Auffassung, als Fehlbegriff gedeutet wird, sondern als etwas, was
4 jedenfalls nicht zu verachten, viel|leicht sogar eher zu respektieren ist. Alles, was ich machen kann, ist, einen leichten Weg aus dieser Unklarheit und dem Glitzern der Begriffe zeigen. Man kann seltsamerweise sagen, daß an allen diesen glänzenden Begriffsbildungen ein sozusagen solider Kern ist. Und ich möchte sagen, daß der es ist, der sie zu mathematischen Produkten macht.“
A123 | Man mag bezweifeln, ob es hier Wittgenstein gelungen ist, „einen leichten Weg aus dieser Unklarheit“ zu zeigen, und vielmehr den Verdacht hegen, daß hier die Unklarheit und das „Mysteriöse“ überhaupt erst aus der philosophischen Begriffsbildung, das heißt der von Wittgenstein verwendeten philosophischen Sprache, entspringt.

Die grundsätzliche Scheidung zwischen dem Mathematischen und dem Gebiet der Tatsachen kommt in etlichen Ausführungen des Buches zur Geltung; Wittgenstein spricht in dieser Hinsicht oft mit einer Selbstverständlichkeit, die mit seiner Bereitschaft, so vieles Geläufige zu bezweifeln, eigentümlich kontrastiert. Charakteristisch dafür ist der Passus auf S. 26, Nr. 80, wo er sagt: „du kannst natürlich keine Eigenschaft des Materials durch Vorstellen erkennen.“ Ähnlich heißt es auf S. 29, Nr. 98: „In der Vorstellung kann ich rechnen, aber nicht experimentieren.“ All dies ist von der geläufigen Erfahrung aus betrachtet gewiß nicht ausgemacht. Ein Ingenieur oder Techniker dürfte von Materialien eine ebenso lebhafte Vorstellung haben wie ein Mathematiker von geometrischen Kurven, und sogar ein jeder von uns dürfte eine solche Vorstellung von einer dicken Eisenstange haben, daß es aus dieser klar ist, daß sie nicht durch einen leichten Händedruck umgebogen werden kann. Auch spielt sicherlich beim technischen Erfinden ein Experimentieren in der Vorstellung eine wesentliche Rolle. Wittgenstein benutzt hier, wie es scheint, unbesehen ein philosophisches Schema der Unterscheidung des Apriorischen und des Empirischen. Inwieweit und in welchem Sinne diese besonders ja in der Kantischen Philosophie so erhebliche Unterscheidung ihre Berechtigung hat, soll an dieser Stelle nicht erörtert werden; aber jedenfalls darf man es sich mit ihrer Einführung, besonders in der heutigen Zeit, nicht zu leicht machen. Von dem Kantischen Standpunkt in Hinsicht auf das Apriorische unterscheidet sich übrigens derjenige von Wittgenstein insbesondere darin, daß er die Prinzipien der allgemeinen Mechanik zu dem Bereich des Empirischen rechnet. So argumentiert er zum Beispiel (S. 114, Nr. 4): „Warum sind die Newtonschen Gesetze keine Axiome der Mathematik? Weil man sich ganz gut vorstellen könnte, daß es sich anders verhielte . . . . Von einem Satz zu sagen, ‚man könnte das sich auch anders vorstellen' . . . schreibt ihm die Rolle des Erfahrungssatzes zu." Der hier wie bei Kant verwendete Begriff des „Sich-anders-vorstellen-Könnens" hat das Mißliche der Vieldeutigkeit. Die Unmöglichkeit des Sich-Vorstellens kann in verschiedenem Sinn gemeint sein. Diese Schwierigkeit tritt ja insbesondere bei der Geometrie auf. Hiervon soll noch die Rede sein.

A124 Die zuvor erwähnte Tendenz Wittgensteins, nur *eine* Art von Sach|verhalt anzuerkennen, macht sich bei ihm nicht nur im Hinblick auf die Mathematik, sondern generell in Bezug auf jedwede Phänomenologie geltend. So erörtert er den Satz, daß Weiß heller ist als Schwarz (S. 30, Nr. 105), und erklärt ihn in der Weise, daß Schwarz uns als Paradigma des Dunklen und Weiß als Paradigma des Hellen dient, womit die Feststellung zu einer inhaltlosen wird. Seiner Meinung nach kann man von Helligkeitsunterschieden inhaltvoll nur mit Bezug auf bestimmte visuell gegebene Gegenstände sprechen und soll-
5 te deutlicherweise überhaupt nicht von Hellig|keitsunterschieden von Farben sprechen. Eine solche Einstellung schließt offensichtlich eine beschreibende Farbenlehre aus.

An sich würden Wittgenstein phänomenologische Betrachtungen naheliegen. Das spürt man insbesondere daran, daß er häufig und gern Beispiele aus dem Gebiet des Künstlerischen zum Vergleich heranzieht. Es ist nur das philosophische Programm, das die Entfaltung einer expliziten phänomenologischen Betrachtungsweise verhindert.

Dieser Fall ist ein Beispiel dafür, wie die Methodik Wittgensteins darauf zielt, sehr vielerlei auszuschalten. Er gibt sich die Rolle des Freigeistes, der den Aberglauben bekämpft. Dessen Ziel aber ist die Freiheit des Geistigen, während von Wittgenstein gerade das Geistige in mannigfacher Weise eingeschränkt wird, in der Art eines geistigen Asketismus zugunsten einer ihrem Ziel nach ganz unbestimmten Irrationalität.

Allerdings ist diese Tendenz in der vorliegenden späteren Philosophie Wittgensteins bei weitem nicht mehr so kraß wie in der anfänglichen Form. Schon aus den wenigen angeführten Stellen mag man entnehmen, daß Wittgenstein wohl auf dem Wege dazu war, den geistigen Inhalten mehr ihr Recht zukommen zu lassen.

Hiermit mag es auch im Zusammenhang stehen, daß im Unterschied zu

der schlechtweg statuierenden Form der philosophischen Äußerung im *Tractatus* in dem vorliegenden Buch eine überwiegend aporetische Haltung vorherrscht. Hier liegt freilich für die philosophische Pädagogik eine Gefahr, zumal da ja die Philosophie Wittgensteins auf die jüngeren Geister starke Attraktion ausübt. Die altgriechische Bemerkung, daß die philosophische Betrachtung vielfach von dem philosophischen Staunen ausgeht, verführt heute viele Philosophen zu der Ansicht, daß schon die Kultivierung des Staunens eine philosophische Leistung bedeute. Es ist sicherlich methodisch bedenklich, wenn angehende Philosophen gewissermaßen im Staunen trainiert werden. Das Staunen hat ja nur da eine heuristische Fruchtbarkeit, wo es der
A125 Ausdruck eines Instinktes der Forschung ist. Natürlich kann von keiner | Philosophie verlangt werden, daß sie alles Erstaunliche begreiflich macht. Vielleicht lassen sich die verschiedenen philosophischen Standpunkte durch das kennzeichnen, was sie an Erstaunlichem als etwas Letztes hinnehmen. In Wittgensteins Philosophie sind es, soweit die erkenntnistheoretisdien Fragen in Betracht kommen, soziologische Tatsachen. Ein paar Zitate mögen dies zeigen: (S. 13, Nr. 35) „... wie kommt es dann, daß sich alle Menschen ... diese Figuren als Beweise dieser Sätze gefallen lassen? Ja, hier besteht eine große – und interessante – Übereinstimmung.“ (S. 20, Nr. 63): „... es ist ein eigentümliches Vorgehen: daß ich den Beweis *durchlaufe* und dann sein Ergebnis annehme. – Ich meine: so *machen* wir es eben. Das ist so bei uns der Brauch, oder eine Tatsache unserer Naturgeschichte.“ (S. 23, Nr. 74:) „Wer über das *Wesen* spricht, konstatiert bloß eine Übereinkunft, und da möchte man doch entgegnen: ‚es gibt nichts Verschiedeneres als ein Satz über die Tiefe des Wesens und einer über eine bloße Übereinkunft.‘ Wie aber, wenn ich antworte: ‚Der *Tiefe* des Wesens entspricht das *tiefe* Bedürfnis nach der Übereinkunft‘."(S. 122, Nr. 30): „Sieh den Beweis nicht als einen Vorgang an, der dich *zwingt*, sondern der dich *führt* .... Aber wie kommt es, daß er *jeden* von uns so führt, daß wir übereinstimmend von ihm beeinflußt werden? Nun, wie kommt es, daß wir übereinstimmend *zählen*?. ‚Wir sind eben so abgerichtet‘, kann man sagen, ‚und die Übereinstimmung, die so erzeugt wird, setzt sich durch die Beweise fort‘.“

6 | II

Soviel sei zur allgemeinen Charakterisierung der vorliegenden Wittgensteinschen Betrachtungen gesagt. Deren Inhalt erschöpft sich jedoch keineswegs in den generell philosophischen Aspekten, welche hier erweckt werden, vielmehr werden verschiedene bestimmte grundlagenphilosophische Fragen des näheren erörtert. Mit den hauptsächlichen hierbei hervortretenden Gesichtspunkten wollen wir uns im Folgenden befassen.

Beginnen wir mit einer Frage, welche das bereits angeschnittene Problem der Unterscheidung des Apriorischen und des Empirischen betrifft: die der geometrischen Axiome. Wittgenstein spricht nicht speziell von den geometrischen Axiomen als solchen, sondern wirft generell die Frage auf, inwiefern die Axiome eines mathematischen Axiomensystems einleuchtend sein sollen, wobei er das Parallelenaxiom als Beispiel verwendet. Einige Sätze seiner Ausführungen seien zitiert (S. 113, Nr. 2): „Was sagen wir, wenn uns so ein
A126 Axiom dargeboten | wird, zum Beispiel das Parallelenaxiom? Hat Erfahrung uns gezeigt, daß es sich so verhält? … Erfahrung spielt eine Rolle, aber nicht die, die man *unmittelbar erwarten* würde. Denn man hat ja doch nicht Versuche gemacht und gefunden, daß wirklich durch den Punkt nur *eine* Gerade die andere Gerade nicht schneidet. Und doch leuchtet der Satz ein. – Wenn ich nun sagte: ‚es ist ganz gleichgültig, warum er einleuchtet. Genug, wir nehmen ihn an. Wichtig ist nur, wie wir ihn gebrauchen' … Wenn der Wortlaut des Parallelenaxioms zum Beispiel gegeben ist … so ist die Art der Verwendung dieses Satzes und also sein Sinn, noch gar nicht bestimmt. Und wenn wir sagen, er leuchtet uns ein, so haben wir damit, ohne es zu wissen, schon eine bestimmte Art der Verwendung des Satzes gewählt. Der Satz ist kein mathematisches Axiom, wenn wir ihn nicht gerade *dazu* verwenden. Daß wir nämlich hier nicht Versuche machen, sondern das Einleuchten anerkennen, legt schon die Verwendung fest. Denn wir sind nicht so naiv, das Einleuchten statt des Versuches gelten zu lassen. Nicht daß er uns als wahr einleuchtet, sondern daß wir das Einleuchten gelten lassen, macht ihn zum mathematischen Satz."

Zur Erörterung dieser Ausführungen ist zunächst zu beachten, daß wir zweierlei zu unterscheiden haben: ob wir einen Satz als geometrisch gültig anerkennen oder ob wir ihn als Axiom wählen. Das zweite ist natürlich nicht durch den Wortlaut des betreffenden Satzes bestimmt. Dabei handelt es sich aber auch nur um eine mehr technische Frage der deduktiven Anordnung. Worauf es dagegen Wittgenstein hier sicherlich ankommt, das ist das Anerkennen des Satzes als geometrisch gültig. Mit Bezug hierauf muß Wittgensteins Behauptung („daß die Anerkennung nicht durch den Wortlaut bestimmt ist") betrachtet werden, und ihre Richtigkeit ist jedenfalls nicht ohne weiteres ersichtlich. Es steht da so einfach: „Man hat ja doch nicht Versuche gemacht." Freilich anknüpfend an die betrachtete Formulierung des Paralle-

lenaxioms hat man nicht experimentiert, und diese Fassung ist dafür auch
nicht geeignet. Jedoch im Rahmen der übrigen geometrischen Axiome ist das
Parallelenaxiom gleichwertig einer der folgenden Aussagen der metrischen
Geometrie: „In einem Dreieck ist die Winkelsumme gleich zwei Rechten. In
einem Viereck, in dem drei Winkel rechte sind, ist auch der vierte ein rech-
ter. Sechs einander kongruente gleichseitige Dreiecke, an einer gemeinsamen
Ecke P aufeinanderfolgend aneinandergelegt, füllen gerade die Umgebung
7 des Punktes P aus." Solche Sätze | – an denen zu bemerken ist, daß da-
bei von unbegrenzter Verlängerung einer Geraden keine Rede ist – sind sehr
wohl der experimentellen Prüfung zugänglich. Wie man weiß, hat ja Gauß
A127 sogar den Satz von der Winkelsumme | im Dreieck experimentell geprüft, wo-
bei er allerdings die Voraussetzung der geradlinigen Ausbreitung des Lichtes
benutzte. Das ist aber nicht die einzige hier in Betracht kommende expe-
rimentelle Möglichkeit. So hat ja insbesondere Hugo Dingler nachdrücklich
ausgeführt, daß für die Begriffe der Geraden, der Ebene, des rechten Win-
kels eine natürliche und sozusagen zwangsläufige Art der experimentellen
Verwirklichung besteht. An Hand einer solchen experimentellen Realisierung
geometrischer Begriffe sind Aussagen wie insbesondere die zweitgenannte mit
großer Genauigkeit experimentell nachprüfbar. In einer weniger genauen Art
werden sie überdies von uns ständig im üblichen Gebrauch des Figurenzeich-
nens implizite kontrolliert. Auch unsere instinktive Schätzung der Längen
und Winkelgrößen kann als das Ergebnis vielfältiger Erfahrung angespro-
chen werden, und mit dieser Schätzung stehen ja Sätze wie die genannten
jedenfalls im Einklang.

Es kann also keine Rede davon sein, daß bei der Annahme von Sätzen als geometrisch gültig unsere Erfahrung keine Rolle spielt. Aber das meint Wittgenstein auch gar nicht. Das wird ersichtlich aus den an die zitierte Stelle sich anschließenden Ausführungen (S. 114, Nr. 4): „Lehrt uns die Erfahrung, daß zwischen je zwei Punkten eine Gerade möglich ist? ... Man könnte sagen: die *Vorstellung* lehrt es uns. Und darin liegt die Wahrheit; man muß es nur recht verstehen. *Vor* dem Satz ist der Begriff noch geschmeidig. Aber könnten nicht Erfahrungen uns bestimmen, das Axiom zu verwerfen?! Ja. Und dennoch spielt es nicht die Rolle des Erfahrungssatzes." Weiter heißt es hier: „Warum sind die Newtonschen Gesetze keine Axiome der Mathematik? Weil man sich ganz wohl vorstellen könnte, daß es sich anders verhielte. (Ibid. Nr. 5:) Axiom ist etwas nicht *dadurch*, daß wir es als äußerst wahrscheinlich, ja als gewiß, anerkennen, sondern dadurch, daß wir ihm eine bestimmte Funktion zuerkennen und eine, die der des Erfahrungssatzes widerstreitet .... Das

Axiom ist, möchte ich sagen, ein anderer Redeteil.“ Später einmal (S. 124, Nr. 35) sagt er: „Wie ist es … mit den Grundgesetzen der Mechanik? Wer sie versteht, muß wissen, auf welche Erfahrungen sie sich stützen. Anders verhält es sich mit den Sätzen der reinen Mathematik.“

An diesen Ausführungen ist sicherlich zuzugeben, daß Erfahrung noch nicht die theoretische Anerkennung eines Satzes voll determiniert. Ein genauerer theoretischer Ansatz ist stets etwas, was noch über die Erfahrungsgegebenheiten hinaus konzipiert werden muß.

Daß aber in dieser Hinsicht eine so prinzipielle Scheidelinie zwischen den mathematischen Sätzen und den Grundsätzen der Mechanik bestehe, ist wohl
A128 kaum eine berechtigte Auffassung; insbesondere ist die | zuletzt zitierte Behauptung, daß man, um die Grundgesetze der Mechanik zu verstehen, die Erfahrungen kennen müsse, auf die sie sich stützen, schwerlich aufrechtzuerhalten. Gewiß, wenn im Hochschulunterricht Mechanik doziert wird, so ist es wünschenswert, daß die empirischen Ausgangspunkte deutlich gemacht werden, dieses aber nicht für den Zweck der theoretischen und praktischen Handhabung der Gesetze, sondern für das erkenntnistheoretische Bewußtsein und im Hinblick auf die Möglichkeiten der eventuell erforderlichen Modifi-
8 kationen der Theorie. Wer als Ingenieur oder produktiver | Techniker in der Mechanik gut bewandert sein und mit ihren Gesetzen gut umzugehen fähig sein will, der braucht sich hierfür nicht darum zu kümmern, wie man auf diese Gesetze gekommen ist. Es gilt ja auch für diese Gesetze das, was Wittgenstein in Bezug auf die mathematischen Gesetze so vielfach hervorhebt, daß die Erfahrungstatsachen, die für die empirische Motivierung der Sätze belangvoll sind, keineswegs den Inhalt dessen ausmachen, was in den Gesetzen ausgesagt wird. Wichtig für die Handhabung der mechanischen Gesetze ist es, daß man sich in die Begriffsbildungen einlebt und sie sich zu einer Art von Anschaulichkeit bringt. Diese Art der Aneignung ist nicht nur praktisch, sondern auch theoretisch bedeutsam: die Theorie wird erst voll aufgenommen in der rationalen Ausgestaltung, die sie nachträglich erfährt. In Bezug auf die Mechanik können hierbei die meisten Philosophen und viele von uns Mathematikern nicht in vollem Sinne mitreden, weil sie sich die Mechanik gar nicht in solcher Weise angeeignet haben. – Das Unterschiedliche des Falles der Geometrie gegenüber dem der Mechanik besteht in dem (philosophisch gewissermaßen zufälligen) Umstände, daß die Aneignung der Begriffswelt und der Anschaulichkeit großenteils in einem (mindestens für uns) unbewußten Stadium der geistigen Entwicklung bereits vollzogen ist.

Die Opposition von Ernst Mach gegen die rationale Begründung der Mechanik hat ihr Berechtigtes, sofern eine solche Begründung die Rolle der Erfahrung bei der Gewinnung der Prinzipien der Mechanik zu übergehen trachtet. Wir müssen uns bewußt bleiben, daß die Begriffsbildung und Prinzipien der Mechanik gewissermaßen einen Erfahrungsextrakt in sich schließen. Andererseits wäre es unberechtigt, auf Grund jener Kritik überhaupt die Bemühung um einen möglichst rational gestalteten Aufbau der Mechanik abzulehnen.

Bei der Geometrie ist das Spezifische der phänomenologische Charakter ihrer Gesetzlichkeit und damit die erhebliche Rolle der Anschauung. Von Wittgenstein wird eigentlich nur im Vorübergehen auf dieses Moment hinge-
A129 wiesen. „Die Vorstellung lehrt es uns. Und darin liegt | die Wahrheit; man muß es nur recht verstehen“ (siehe oben, S. 127). Der Ausdruck „Vorstellung“ ist sehr allgemein, und der letzte Zusatz bedeutet eine Einschränkung, welche zeigt, daß der Autor das Thema der Anschauung als sehr heikel empfindet. Tatsächlich ist es recht schwierig, die erkenntnistheoretische Rolle der Anschauung befriedigend zu kennzeichnen. Die schroffe Gegenüberstellung von Anschauung und Begriff, wie sie in der Kantischen Philosophie auftritt, erscheint bei näherem Zusehen als nicht gerechtfertigt. Insbesondere ist es bei der Betrachtung des geometrischen Denkens schwierig, den Anteil der Anschauung von dem der Begrifflichkeit scharf zu trennen, da hier eine gewissermaßen von der Anschauung gelenkte Begriffsbildung vorliegt, die in der Schärfe ihrer Intentionen über das im eigentlichen Sinn Anschaubare hinausgeht, aber andererseits losgelöst von der Anschauung nicht angemessen auffaßbar ist. Merkwürdig ist, daß Wittgenstein der Anschauung keine bestimmte erkenntnistheoretische Rolle zuweist, obwohl sein Denken im Zeichen einer Dominanz des Visuellen steht. Ein Beweis ist für ihn stets ein Bild. Einmal setzt er als Beispiel eines geometrischen Beweises eine bloße Figur hin. Es fällt auch auf, daß er gar nicht auf die anschauliche Evidenz der topologischen Tatsachen zu sprechen kommt, etwa derjenigen, daß eine Kugelfläche den (restlichen) Raum in ein Inneres und ein Äußeres zerlegt, derart, daß die Verbindung eines inneren Punktes mit einem äußeren durch eine Kurve stets über einen Punkt der Kugelfläche führt.

9 | Die auf die Geometrie und ihre Axiome bezüglichen Grundlagenfragen gehören noch vornehmlich in den Fragenkreis der allgemeinen Erkenntnistheorie. Die heutige im engeren Sinn so bezeichnete mathematische Grundlagenforschung richtet sich vor allem auf die Grundlagen der Arithmetik. Das Spezifische des Geometrischen sucht sie nach Möglichkeit zu eliminieren, indem sie Geometrie in eine arithmetische und physikalische Seite aufspaltet.

Ob dieses Vorgehen berechtigt ist, sei hier dahingestellt; von Wittgenstein wird diese Frage nicht erörtert. Hingegen befaßt er sich sehr eingehend mit den grundsätzlichen Fragen der Arithmetik. Auf seine Ausführungen zu diesem Fragengebiet wollen wir nun näher zu sprechen kommen.

Die Perspektive, unter der Wittgenstein die Arithmetik betrachtet, ist nicht die übliche des Mathematikers. Wittgenstein hat sich mehr mit den Grundlagentheorien der Arithmetik (insbesondere derRussellschen) befaßt als mit der Arithmetik selbst. Besonders was die Zahlentheorie betrifft, so gehen seine Beispiele meist nicht über das Numerische hinaus. Ein unkundiger Leser könnte meinen, daß die Zahlentheorie fast nur aus numerischen
A130 Gleichungen bestehe, – die man doch für gewöhnlich | gar nicht als zu beweisende Sätze, sondern als simple Feststellungen ansieht. Mehr Mathematisches kommt in den Abschnitten zur Sprache, wo Wittgenstein sich mit den mengentheoretischen Fragen der Abzählbarkeit und der Überabzählbarkeit sowie mit der Dedekindschen Schnitttheorie auseinandersetzt.

Wittgenstein verficht allenthalben den Standpunkt eines strikten Finitismus. Dabei kommen die verschiedenen Arten der Problematik des Unendlichen, wie sie für einen finitistischen Standpunkt bestehen, zur Sprache, so insbesondere die des Tertium non datur und die der imprädikativen Definitionen. Die hier gebrachten, recht eindringlichen und lebendigen Darlegungen sind wohl geeignet, einem noch Unvertrauten die Auffassung des Finitisten näherzubringen. Sie liefern jedoch für die Argumentation kaum etwas wesentlich Neues; und wer die Anschauungsweise der klassischen Mathematik mit Bewußtsein hegt, wird dadurch kaum überzeugt werden.

Einige Punkte seien etwas näher besprochen. Wittgenstein behandelt die Frage, ob in der unendlichen Entwicklung von π eine bestimmte Zahlenfolge F, wie etwa „777“, irgendeinmal auftritt. Im Sinne des Brouwerschen Standpunktes weist er auf die Möglichkeit hin, daß die Frage überhaupt noch keine bestimmte Antwort besitzt. In diesem Zusammenhang sagt er dann (S. 138, Nr. 9): „So seltsam es klingt, die Weiterentwicklung einer irrationalen Zahl ist eine Weiterentwicklung der Mathematik.“ Diese Formulierung ist offensichtlich zweideutig. Wenn bloß gemeint ist, daß jede Bestimmung einer noch nicht berechneten Dezimalstelle einer Irrationalzahl ein Beitrag zur Entwicklung der Mathematik ist, so wird jeder Mathematiker damit einverstanden sein. Da die Behauptung aber als eine „seltsam klingende“ aufgestellt wird, ist gewiß etwas anderes gemeint, etwa daß der Gang der Entwicklung der Mathematik zu gegebener Zeit unentschieden ist und daß diese Unentschiedenheit auch den Verlauf der Entwicklung einer durch Definition gegebenen Irrationalzahl

betreffen kann, so daß es etwa eine geistesgeschichtliche Entscheidung wäre, welche Ziffer an die zehntausendste Dezimalstelle von π gesetzt würde. Eine solche Ansicht ist aber nicht einmal nach der Auffassung von Wittgenstein selbst angemessen, denn er sagt (S. 138, Nr. 9): „Die Frage … verändert ihren Status, wenn sie entscheidbar wird.“ Nun ist aber bis zu jeder beliebig gewählten | Stellenzahl hin der Verlauf der Dezimalbruchentwicklung von π entscheidbar. Die genannte Auffassung von der Weiterentwicklung der Mathematik ist also jedenfalls nicht zum Verständnis der Sachlage bei der Entwicklung von π verwendbar. Wir können in Bezug auf diese sogar folgen-
A131 des bemerken: Gesetzt, wir behaupten mit | Bestimmtheit, daß die Frage des Vorkommens der Zahlenfolge F unentscheidbar ist, so schließt das die Behauptung ein, daß die Figur F in der Entwicklung von π niemals auftreten kann; denn käme sie vor und wäre k die Stellennummer, welche die letzte Ziffer von F beim erstmaligen Auftreten in der Dezimalbruchentwicklung von π hat, so wäre ja die Frage, ob bis zur $k+1$sten Stelle die Figur F auftritt, eine entscheidbare Frage, sie würde sich dann positiv beantworten, und damit wäre zugleich auch die ausgängliche[b] Frage entscheidbar. (Diese Überlegung erfordert übrigens nicht das Prinzip des Tertium non datur.)

An späteren Stellen kommt Wittgenstein noch wiederholt auf das Beispiel der Dezimalbrudientwicklung von π zurück, insbesondere findet sich an einer Stelle die für seine Auffassung charakteristische Äußerung (S. 185, Nr. 34): „Angenommen, die Menschen berechnen die Entwicklung von π immer weiter und weiter. Der allwissende Gott weiß also, ob sie bis zur Zeit des Weltuntergangs zu einer Figur ‚777‘ gekommen sein werden. Aber kann seine *Allwissenheit* entscheiden, ob die Menschen nach dem Weltuntergang zu jener Figur gekommen *wären*? Sie kann es nicht … . Auch für ihn kann die bloße Regel des Entwickelns nichts entscheiden, was sie für uns nicht entscheidet.“

Das ist gewiß nicht überzeugend. Wenn wir schon den Gedanken einer göttlichen Allwissenheit konzipieren, so würden wir dieser doch zuschreiben, daß sie eine Gesamtheit, deren jedes einzelne Element uns grundsätzlich zugänglich ist, in *einem* Blick überschaut. Des genaueren müssen wir hier achthaben auf die doppelte Rolle der rekursiven Definition der Dezimalbruchentwicklung: einmal als bestimmende Festlegung des Dezimalbruchs und ferner als Mittel der „effektiven“ Berechnung der Stellen. Verstehen wir hier

[b]This word is highly unusual, most probably Bernays meant „Ausgangsfrage;“ we translated accordingly.

„effektiv" im üblichen Sinn, so kann allerdings auch eine göttliche Intelligenz nichts anderes *effektiv* berechnen, als wir dazu imstande sind (ebensowenig wie sie imstande wäre, die Winkeltrisektion mit Zirkel und Lineal vorzunehmen oder den Gödelschen unableitbaren Satz in dem betreffenden Formalismus herzuleiten); dagegen ist nicht auszuschließen, daß sie auf eine andere (nicht menschlich effektive) Art die sämtlichen möglichen Ausrechnungsergebnisse der Anwendung einer rekursiven Definition überblicken könnte.

Bei der Kritik der Dedekindschen Schnitttheorie ist Wittgensteins Hauptargument, daß in dieser Theorie die extensionale Betrachtungsweise mit der intensionalen vermengt werde. Dieser Vorwurf trifft in der Tat gewisse Darstellungen dieser Theorie, bei denen der Eindruck eines stärker konstruktiven
A132 Charakters des Verfahrens erweckt werden | soll, als er tatsächlich erreicht wird. Will man die Schnitte nicht bloß als Zahlenmengen, sondern als definierende arithmetische Gesetze solcher Mengen einführen, so muß man entweder einen ganz vagen Begriff des „Gesetzes" benutzen, womit wenig gewonnen ist, oder man stößt, wenn man darauf ausgeht, den Begriff zu verdeutlichen, auf die Schwierigkeit, welche Hermann Weyl als den circulus vitiosus in der Begründung der Analysis bezeichnet hat und welche instinktiv schon längere Zeit vorher von verschiedenen Mathematikern empfunden wurde, die daraufhin eine Einschränkung des Verfahrens der Analysis befürworteten.
11 Diese Kritik der imprädikativen Begriffsbildung spielt | noch heute in den Gedankengängen der mathematischen Grundlagenforschung eine erhebliche Rolle. Man gerät jedoch nicht in Schwierigkeit, wenn man den extensionalen Standpunkt konsequent beibehält, und die Dedekindsche Überlegung läßt sich durchaus in diesem Sinne auffassen und wurde wohl auch von Dedekind in diesem Sinne angestellt. Erforderlich ist hier nur, daß man außer dem Begriff der Zahl selbst auch den Begriff einer Menge von natürlichen Zahlen (und infolgedessen auch den einer Menge von Brüchen) als einen anschaulich bedeutungsvollen, nicht der Zurückführung bedürftigen Begriff anerkennt. Das bedeutet in Hinsicht auf das Ziel der Arithmetisierung der Analysis, und damit auch der Geometrie, eine gewisse Bescheidung. Aber – so könnte man hier wiederum in Wittgensteins Art fragen – „muß denn die Geometrie restlos arithmetisiert werden?" – Die Wissenschaftler sind oft in ihren Versuchen zu Reduktionen sehr dogmatisch. Auch wenn ein solcher Versuch nicht in der Weise gelingt, wie es angestrebt war, sondern nur so einigermaßen, in einer gewissen Annäherung, sind sie oft geneigt, dies wie einen vollen Erfolg zu nehmen. Gegenüber derartigen Einstellungen können Betrachtungsweisen, wie sie Wittgensteins Buch anregt, von Nutzen sein. –

Die nähere Erörterung der Dedekindschen Beweisführung bei Wittgenstein ist nicht befriedigend. Manche Einwendungen können schon durch eine deutlichere Darstellung von Dedekinds Gedankengang behoben werden.

Bei den Betrachtungen über Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit hat der Leser darauf zu achten, daß Wittgenstein unter Kardinalzahl immer endliche Kardinalzahl versteht und unter einer Reihe eine solche vom Ordnungstypus der natürlichen Zahlen. Die Polemik gegenüber dem Satz von der Überabzählbarkeit der Gesamtheit der reellen Zahlen leidet vor allem daran, daß die Analogie zwischen den Begriffen „überzählbar“ und „unendlich“ nicht deutlich exponiert wird. Entsprechend wie „Unendlichkeit einer Gesamtheit
A133 G“ erklärt werden kann | als die Eigenschaft, daß zu endlich vielen Dingen aus G sich stets ein weiteres bestimmen läßt, so wird ja die Überzählbarkeit einer Gesamtheit G dadurch erklärt, daß sich zu jeder abzählbaren Teilgesamtheit ein in ihr noch nicht enthaltenes Element von G bestimmen läßt. In diesem Sinn wird die Überabzählbarkeit der Gesamtheit der reellen Zahlen durch das Diagonalverfahren nachgewiesen, und es findet da nicht etwa eine Erschleichung statt, wie es nach der Argumentation von Wittgenstein den Anschein hat. Der Satz von der Überabzählbarkeit der Gesamtheit der reellen Zahlen ist zunächst noch unabhängig von der Größenvergleichung der transfiniten Kardinalzahlen. Es ist übrigens zu beachten, was oft nicht berücksichtigt wird, daß für diesen Satz auch andere mehr geometrische Beweise als der durch das Diagonalverfahren vorhanden sind. Der Sachverhalt kann vom Geometrischen aus als eine ganz grobe Tatsache angesprochen werden. Merkwürdig ist es auch, wenn vom Verfasser eine Frage wie die aufgeworfen wird (S. 57, Nr. 5): „Wie macht man denn von dem Satz Verwendung: ‚Es gibt keine größte (scil, endliche) Kardinalzahl?‘ ... Vor allem ist zu bemerken, daß wir das überhaupt fragen, was darauf deutet, daß die Antwort nicht auf der Hand liegt.“ Man sollte meinen, daß man hier nicht lange nach der Antwort zu suchen hat. Unsere *ganze* Analysis mit ihren Anwendungen in Physik und Technik beruht auf der Unendlichkeit der Zahlenreihe. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik macht ständig implizite von dieser Unendlichkeit Gebrauch. Wittgenstein tut so, als ob die Mathematik fast nur für die Zwecke der häuslichen Besorgungen diente.

12 | Daß im ganzen Wittgenstein in seiner Stellungnahme zu den mathematischen Grundlagenproblemen die finitistische und konstruktive Auffassung vertritt, liegt in der Richtung seines Philosophierens. Man kann aber kaum sagen, daß er aus der grundlagentheoretischen Situation eine Bestätigung für seinen Standpunkt gewinnt. Er zeigt nur, in welcher Weise dieser Standpunkt

bei der Beurteilung der strittigen Fragen anzulegen ist. Generell ist es charakteristisch für die Situation bei den Grundlagenproblemen, daß für keine der beiden hauptsächlich gegenüberstehenden philosophischen Auffassungsweisen – die finitistisch-konstruktive und die „platonisch"-existentiale – die bisher erhaltenen Ergebnisse eine eindeutige Begünstigung liefern. Jede der beiden Ansichten kann Argumente zum Nachteil der anderen geltend machen. Die existentiale Auffassung hat aber den Vorzug, daß von ihr aus die auf das Konstruktive gerichteten Untersuchungen gewürdigt werden können (so wie die Untersuchung der Konstruktionen mit Zirkel und Lineal auch
A134 für denjenigen Mathematiker Bedeutsamkeit | hat, der andere Methoden der Konstruktion gelten läßt), während für den grundsätzlichen Konstruktivisten ein großer Teil der klassischen Mathematik einfach wegfällt.

In gewissem Maße unabhängig von der Parteinahme in der besprochenen Opposition der Standpunkte sind diejenigen grundlagentheoretischen Betrachtungen Wittgensteins, die sich auf die Rolle der Formalisierung, auf die Zurückführung der Zahlentheorie auf Logik und auf die Frage der Widerspruchsfreiheit beziehen. Hier zeigt er in seinen Gesichtspunkten mehr Selbständigkeit, und diese Ausführungen bieten daher auch ein stärkeres Interesse.

In Bezug auf die Frage der Widerspruchsfreiheit macht er insbesondere das geltend, was seither auch von manchen Grundlagentheoretikern hervorgehoben wurde: daß im Rahmen eines formalen Systems der Widerspruch nicht so ausschließlich unter dem Aspekt des Abschreckenden betrachtet werden sollte und daß ein formales System als solches auch von Interesse sein kann, selbst wenn es auf einen Widerspruch führt. Zu bemerken ist allerdings, daß bei den früheren Systemen von Frege und Russell der Widerspruch bereits in wenigen Schritten, gewissermaßen durch die Grundstruktur des Systems, zustande kommt. Vieles ferner, was Wittgenstein in diesem Zusammenhang sagt, schießt weit über das Ziel hinaus. Unbefriedigend ist inbesondere das von ihm häufig gebrauchte Beispiel der Erzeugbarkeit von Widersprüchen durch Zulassung der Division durch Null. (Man braucht sich doch nur die Begründung der Regel des Kürzens zu überlegen, um zu sehen, daß diese auf den Fall des Faktors Null nicht Anwendung findet.)

Wittgenstein erkennt die Bedeutsamkeit eines Nachweises der Widerspruchsfreiheit jedenfalls an. Es ist aber doch fraglich, ob er sich die Rolle, welche die Bedingung der Widerspruchsfreiheit in den beweistheoretischen Überlegungen spielt, hinlänglich vergegenwärtigt. So leidet insbesondere die Erörterung des Gödelschen Unableitbarkeitstheorems und seines Beweises an

dem Mangel, daß hier die bei Gödel ganz explizit auftretende Prämisse der Widerspruchsfreiheit des betrachteten formalen Systems übergangen wird. Ein zutreffender Vergleich, der anknüpfend an den Gödelschen Satz von Wittgenstein vorgebracht wird, ist derjenige eines Beweises der formalen Unbeweisbarkeit mit einem Beweis der Unmöglichkeit einer gewissen Konstruktion mit Zirkel und Lineal. Ein solcher Beweis enthält, sagt Wittgenstein, ein Element der Vorhersage. Sonderbar ist aber die anschließende Bemerkung (S. 52,
13 Nr. 14): „Ein Widerspruch ist als eine solche Vorhersage un|brauchbar.“ Tatsächlich werden doch solche Unmöglichkeitsbeweise in der Regel durch Herleitung eines Widerspruchs geführt.

A135 | In den Ausführungen zur Zahlentheorie findet sich als etwas Bemerkenswertes eine reservierte Haltung gegenüber der Frege-Russellschen Begründung der Zahlentheorie, wie sie wohl in den früheren Stadien der Wittgensteinschen Philosophie nicht vorhanden war. So sagt er an einer Stelle (S. 67, Nr. 4): „... der logische Kalkül sei nur – Fransen, die dem arithmetischen Kalkül angehängt seien.“ So prägnant ist dieser Gedanke wohl kaum sonst formuliert worden. Es mag gut sein, sich zu überlegen, in welchem Sinne das Gesagte gelten kann. Daß eine Einordnung der arithmetischen und insbesondere der numerischen Sätze in die Logistik gelungen ist, läßt sich nicht bestreiten. Das heißt, es ist gelungen, diese Sätze in rein logischen Termini zu formulieren und auf Grund dieser Formulierung im Rahmen der Logistik zu beweisen. Es fragt sich jedoch, ob dieses Ergebnis so zu beurteilen ist, daß damit ein eigentlich philosophisches Verständnis der arithmetischen Sätze gewonnen wird. Wenn wir uns den logistischen Beweis einer Gleichung wie $3+7 = 10$ vornehmen, so bemerken wir, daß innerhalb dessen ganz dieselbe vergleichende Verifikation auszuführen ist, wie sie beim üblichen Abzählen erfolgt. Dieses Erfordernis tritt besonders deutlich in der formalistischen Gestalt der Logik hervor; aber es besteht auch, wenn wir die Formel inhaltlich logisch interpretieren. Die logische Definition zum Beispiel der Dreizahligkeit ist strukturell so beschaffen, daß sie in sich gewissermaßen das Moment der Dreizahligkeit enthält. Es wird ja die Dreizahligkeit eines Prädikats P (beziehungsweise der Klasse, welche den Umfang von P bildet) erklärt durch die Bedingung, daß es Dinge x, y, z von der Eigenschaft P gibt, die paarweise voneinander verschieden sind, und daß ferner jedes Ding von der Eigenschaft P mit x oder y oder z identisch ist. Die Feststellung nun, daß für ein dreizahliges Prädikat P und ein siebenzahliges Prädikat Q, im Falle, daß die Prädikate nicht gemeinsam auf ein Ding zutreffen, die Alternative $P \vee Q$ ein zehnteiliges Prädikat ist, erfordert für ihre Begründung gerade solche Vergleichungen, wie sie im elementaren Rechnen gebraucht werden, nur daß hier noch ein zusätzlicher logischer Apparat (die „Fransen“) in Funktion tritt. Wenn man sich dieses klarmacht, dann stellt es sich so dar, daß der betrachtete prädikatenlogische Satz gilt, weil $3 + 7 = 10$ ist, und nicht umgekehrt.

Ungeachtet also der Möglichkeit der Einordnung der Arithmetik in die Logistik stellt die Arithmetik das abstraktere („reinere“) Schema dar, und dieses erscheint als paradox nur auf Grund einer traditionellen, aber bei näherem Zusehen nicht gerechtfertigten Ansicht, wonach die Allgemeinheit des Logischen in jeder Hinsicht die höchste Allgemeinheit bildet.

A136 | Es mag gut sein, den Sachverhalt noch von einer anderen Seite her zu betrachten. Eine Anzahl ist nach Frege als Eigenschaft eines Prädikates zu erklären. Diese Ansicht bietet bereits für den geläufigen Gebrauch des Anzahlbegriffes Schwierigkeiten, da in vielen Zusammenhängen, wo eine Zahlbestimmung auftritt, die Aufweisung eines Prädikates, von dem sie eine Eigenschaft sein soll, sich als höchst gezwungen erweist. Besonders ist dabei zu beachten, daß Anzahlen gar nicht nur in Feststellungen, sondern gleichermaßen in Anweisungen und Aufforderungen vorkommen, etwa wenn eine Hausfrau zu einem Boten sagt: „Hole mir 10 Äpfel!“ Ferner hat auch die theoretische Ausgestaltung der Auffassung ihre Komplikationen. Einem Prädikat kommt
14 im allgemeinen nicht ohne weiteres eine bestimmte | Anzahl zu, sondern nur mit Bezug auf einen Bereich von Dingen, ein universe of discourse (abgesehen noch von den vielen Fällen von außerwissenschaftlichen Prädikaten, denen sich überhaupt keine bestimmte Anzahl zuschreiben läßt). Die Anzahl müßte hiernach genauer als eine Beziehung zwischen einem Prädikat und einem Individuenbereich gekennzeichnet werden. In Freges Theorie fällt freilich diese Komplikation deshalb weg, weil er einen sozusagen absoluten Individuenbereich zu Grunde legt. Gerade dieser Ansatz führt ja aber, wie man weiß, auf den von Russell bemerkten Widerspruch. Abgesehen hiervon bedeutet ferner die Fregesche Konzeption seiner Prädikatentheorie, bei welcher die Wertverläufe der Prädikate als Dinge ganz auf gleicher Stufe wie die gewöhnlichen Individuen behandelt werden, bereits ein deutliches Abgehen von unserer gewöhnlichen Logik im Sinne einer theoretischen Konstruktion einer Rahmentheorie. Der Gedanke einer solchen Rahmentheorie hat seine methodische Bedeutung behalten, und die Frage einer theoretisch möglichst günstigen Gestaltung einer derartigen Rahmentheorie ist noch immer eine der grundlagentheoretischen Problemstellungen. Es kann aber bei einer solchen Rahmentheorie jedenfalls nur in einem erweiterten Sinn von einer „Logik“ die Rede sein; die Logik im üblichen Sinn, welche bloß die allgemeinen Regeln

für das deduktive Schließen angibt, muß hiervon unterschieden werden.

Die Kritik des Unternehmens der Einordnung der Arithmetik in die Logik wird von Wittgenstein freilich nicht in dem Sinn geübt, daß er die arithmetischen Sätze als Sachverhalte sui generis anerkannt wissen will, sondern er tendiert dahin, jenen Sätzen überhaupt den Sachverhaltscharakter abzusprechen. Er erklärt es geradezu als den „Fluch des Einbruches der mathematischen Logik in die Mathematik, daß nun jeder Satz sich in mathematischer Schreibung darstellen läßt und wir uns daher verpflichtet fühlen,
A137 ihn zu verstehen, obwohl ja diese | Schreibweise nur die Übersetzung der vagen gewöhnlichen Prosa ist“ (S. 155, Nr. 46). Er erkennt eigentlich das Rechnen nur als eine eingelernte Technik mit Gebrauchswert an. Insbesondere versucht er, das Tatsächliche der Arithmetik definitorisch zu deuten. So überlegt er zum Beispiel (S. 33, Nr. 112): „Was nenne ich ‚die Multiplikation 13×13‘? Nur das richtige Multiplikationsbild, an dessen unterem Ende 169 steht? Oder auch eine ‚falsche Multiplikation‘?“ Auch sonst stellt er öfters die Frage, was wir „ein Rechnen nennen“ (S. 97, Nr. 73), und auf S. 92, Nr. 58, heißt es: „Denke, man sagte, durch das Rechnen lernen wir die Eigenschaften der Zahlen kennen. Aber *bestehen* die Eigenschaften der Zahlen außerhalb des Rechnens?“ Die Tendenz ist anscheinend, die richtigen Additionen und Multiplikationen zur Definition des Rechnens zu nehmen und damit als trivialerweise „richtige“ zu charakterisieren. Damit kommt man aber nicht durch, das heißt, man kann auf solche Weise nicht die Sachverhalte zum Ausdruck bringen, die in den arithmetischen Zahlenbeziehungen vorliegen. Nehmen wir etwa die Assoziativität der Addition. Man kann gewiß die einzelnen Ziffernadditionen definitorisch festlegen. Dann bleibt aber die Merkwürdigkeit bestehen, daß eine Addition $3 + (7 + 8)$ dasselbe ergibt wie $(3+7)+8$ und ebenso für beliebige Zahlen anstelle von $3, 7, 8$. Die zahlentheoretischen Ausdrücke sind in Hinsicht auf ihre mögliche Definition sozusagen überbestimmt. Auf dieser Art der Überbestimmtheit beruhen ja auch die vielen Proben, die wir beim Rechnen zur Verfügung haben.

15 | Gelegentlich wirft Wittgenstein die Frage auf, ob denn eine Rechnung, die an Hand des Dezimalsystems erfolgt, auch für die Vergleichung der Zahlen an Hand der direkten Darstellung durch Strichfolgen Gültigkeit hat. Diese Frage findet ihre Beantwortung in der mathematischen Begründung der Methode des Rechnens mit dekadischen Ziffern. Allerdings rührt hier Wittgenstein an etwas Grundsätzliches: Die Beweise zur Rechtfertigung der dekadischen Rechenregeln nämlich beruhen, wenn sie finitistisch geführt werden, auf der Voraussetzung, daß jede Zahl, die wir dekadisch bilden können, auch in der

direkten Strichzeichnung herstellbar ist und daß an solchen Strichfolgen auch die Operationen der Zusammenfügung etc. sowie die Vergleichungen stets durchführbar sind. Darin zeigt sich, daß auch die finitistische Zahlentheorie nicht in vollem Sinne „konkret“ ist, sondern Idealisierungen verwendet.

In einem gewissen Kontrast zu der Tendenz, das numerische Rechnen als bloß definitorisch charakterisiert anzusehen und überhaupt den arithmetischen Sätzen einen eigentlichen Sachverhaltscharakter abzusprechen, scheinen die schon früher erwähnten Äußerungen zu stehen, | in denen Wittgenstein vom synthetischen Charakter der Mathematik spricht. Hier sei in diesem Zusammenhang noch auf die folgende Stelle hingewiesen (S. 160, Nr. 3): „Wie kannst du behaupten, daß ‚625‘ und ‚25 × 25‘ dasselbe sagen? – Erst durch unsere Arithmetik *werden* sie *eins*.“ Hiermit ist doch ungefähr das gleiche gemeint, was Kant im Sinne hat bei der Argumentation gegen die Ansicht, daß $7 + 5 = 12$ ein bloß analytischer Satz sei, und wo er geltend macht, daß der Begriff von 12 „keineswegs dadurch schon gedacht ist, daß ich mir bloß jene Vereinigung von 7 und 5 denke“, und dann hinzufügt: „Daß 7 zu 5 hinzugetan werden *sollten*, habe ich zwar in dem Begriff einer Summe $= 7 + 5$ gedacht, aber nicht, daß diese Summe der Zahl 12 gleich sei.“ (*Kritik der reinen Vernunft*, B 14 ff.) In moderner Form könnte man dieses Kantische Argument etwa so ausdrücken: Der Begriff „$7 + 5$“ ist ein Individualbegriff (nach der Bezeichnung von Carnap), ausdrückbar durch eine Kennzeichnung $\iota_x(x = 7 + 5)$, und dieser Begriff ist verschieden von dem Begriff „12“, was nur darum nicht so offenkundig ist, weil man die Addition der kleinen Zahlen 7 und 5 unwillkürlich direkt ausführt. Wir haben hier den in der neueren Logik in Anlehnung an Frege so häufig diskutierten Fall zweier Termini von verschiedenem „Sinn“, aber gleicher „Bedeutung“, und für die Beurteilung des analytischen oder synthetischen Charakters von Urteilen muß man sich ja immer an den Sinn und nicht an die Bedeutung halten. Die Kantische Behauptung des synthetischen Charakters der Mathematik steht übrigens gar nicht im Widerspruch zu dem, was die Russellsche Schule behauptet, wenn sie die Sätze der Arithmetik für analytisch erklärt. Es liegen hier ja ganz verschiedene Begriffe des Analytischen vor, worauf in neuerer Zeit besonders E. W. Beth hingewiesen hat.[2]

Eine andere innere Gegensätzlichkeit findet sich in Wittgensteins Stellungnahme zur Logistik. Einerseits tendiert er oft dahin, Beweise als formali-

[2] *Vide* [**?**].

siert anzusehen. So heißt es auf S. 93, Nr. 64: „Denke, ich gäbe jemandem die
Aufgabe: ‚Finde einen Beweis des Satzes . . . ‘ – die Lösung wäre doch, daß er
mir gewisse Zeichen vorlegt.“ Die unterschiedliche und unentbehrliche Rolle
der Umgangssprache gegenüber derjenigen einer formalisierten Sprache tritt
16 in seinen Betrach|tungen nicht hervor. Er spricht oft vom „Sprachspiel“ und
beschränkt die Anwendung dieses Ausdrucks keineswegs auf die künstlichen
formalen Sprachen, für die er doch allein angemessen ist. Unsere natürliche
A139 Sprache ist ja keineswegs etwas von der Art eines Spiels; sie ist uns | eigen,
fast wie unsere Gliedmaßen. Anscheinend ist Wittgenstein noch beherrscht
von dem Gedanken einer alles wissenschaftliche Denken umspannenden Wis-
senschaftssprache. Dem stehen Äußerungen starker Kritik an der mathemati-
schen Logik gegenüber. Außer der schon erwähnten vom „Fluch des Einbruchs
der mathematischen Logik in die Mathematik“ ist insbesondere noch die fol-
gende bemerkenswert (S. 156, Nr. 48): „Die ‚mathematische Logik‘ hat das
Denken von Mathematikern und Philosophen gänzlich verbildet, indem sie
eine oberflächliche Deutung der Formen unserer Umgangssprache zur Ana-
lyse der Strukturen der Tatsachen erklärte. Sie hat hierin freilich nur auf der
Aristotelischen Logik weitergebaut.“

Den Gedanken, der wohl dieser Kritik zu Grunde liegt, können wir uns näherbringen, wenn wir daran denken, daß der logische Kalkül von verschiedenen seiner Begründer als eine Realisierung des Leibnizschen Gedankens der characteristica universalis gedacht war. Gegenüber Aristoteles enthält die Äußerung Wittgensteins genauer besehen keinen Vorwurf; die Aristotelische Logik bezweckt ja nichts anderes, als die gebräuchlichen Formen des logischen Argumentierens zu fixieren und auf ihre Rechtmäßigkeit hin zu prüfen. Die Aufgabe der characteristica universalis sollte aber eine viel weitergehende sein, nämlich eine Begriffswelt zu etablieren, welche ein Verstehen aller wirklichen Zusammenhänge ermöglichen sollte. Für ein in solcher Richtung gehendes Unternehmen kann es aber nicht als ausgemacht gelten, daß die grammatischen Strukturen unserer Sprache auch als Grundgerüst der Theorie zu fungieren haben; denn die Kategorien dieser Grammatik haben doch einen mindestens partiell anthropomorphen Charakter. Allerdings ist zu sagen, daß anstelle unserer üblichen Logik nichts irgendwie Gleichwertiges bisher in der Philosophie erdacht worden ist. Was insbesondere Hegel bei seiner Ablehnung der Aristotelischen Logik an deren Stelle setzte, ist ein bloßes Vergleichen von Allgemeinbegriffen an Hand von Analogien und Assoziationen ohne irgendein deutlich regulierendes Verfahren: diese Methodik kann gewiß nicht als eine auch nur annähernde Erfüllung der Leibnizschen

Ideen gelten.

Von Wittgenstein freilich können wir keine Anweisung für eine Ersetzung der üblichen Logik durch etwas philosophisch Leistungsfähigeres erhalten. Er hat vermutlich eine Analyse der Struktur des Wirklichen für eine verfehlte Aufgabenstellung angesehen, und er suchte ja keineswegs nach einem irgendwie determinierten Vorgehen. Der „logische Zwang“, die „Unerbittlichkeit der Logik“, die „Härte des logischen Muß“ sind ihm dauernd ein Stein des Anstoßes und stets aufs neue Grund zur Verwunderung. Dabei verge-
A140 genwärtigt er sich viel- | leicht nicht immer, daß doch alle diese Ausdrücke den Charakter bloß eines populären Vergleiches haben, der in vieler Hinsicht unangemessen ist. Das Strikte des Logischen und Exakten beschränkt nicht unsere Freiheit. Es ist gerade unsere Freiheit, daß wir gegenüber einer Erscheinungswelt des Unscharfen und Unexakten das Genaue in der Gedankenbildung intendieren können. Wittgenstein spricht davon, daß das „Muß der Kinematik“ (S. 37, Nr. 121) viel härter ist, als das „kausale Muß“. Ist es nicht ein Moment der Freiheit, daß wir die virtuellen, bloß der kinematischen
17 Gesetzlichkeit unterworfe|nen Bewegungen neben den wirklichen, kausal bestimmten erdenken und mit diesen vergleichen können?

Die aufgeklärte Menschheit hat in den rationalen Bestimmtheiten ihre befreiende Zuflucht gesucht vor der beherrschenden Geltung des bloß Autoritativen. In der Gegenwart ist allerdings das Bewußtsein hiervon großenteils abhanden gekommen, und von vielen wird die Geltung des Wissenschaftlichen als belastende Autorität empfunden.

Bei Wittgenstein ist es gewiß nicht dieses Moment, welches seine kritische Haltung gegenüber der wissenschaftlichen Objektivität hervorruft. Dennoch geht seine Tendenz dahin, die intersubjektive Einhelligkeit im Gebiet des Mathematischen als heteronom zu erklären. Die Übereinstimmung soll dadurch begriffen werden, daß wir zunächst gemeinsam in elementarer Technik „abgerichtet“ sind und daß die so erzeugte Übereinstimmung sich durch diese Beweise fortsetzt (vgl. Zitat auf S. 125). Daß diese Art der Erklärung unzulänglich ist, fällt wohl jedem auf, der sich nicht durch den Eindruck der Originalität des Aspektes bestechen läßt. Schon die Möglichkeit der Rechentechnik mit ihren mannigfachen Freiheiten der Zerlegung von Aufgaben in einfachere, wie sie ja durch die Gültigkeit der Rechengesetze gegeben ist, kann nicht als Folge von Übereinkunft verstanden werden (vgl. die Bemerkung auf S. 137). Wenn wir weiterhin an die so ungeheuer reichhaltigen aufeinandergetürmten Begriffsbildungen, etwa in der Funktionentheorie, denken – wo dann von den jeweils erreichten Sätzen gilt, was Wittgenstein einmal

sagt: „Wir lehnen uns an sie oder fußen auf ihnen“ (S. 124, Nr. 35) –, so wird doch durch die genannte Auffassung nicht im mindesten erklärt, warum diese begrifflichen Gebäude nicht immerfort einstürzen. Auf Grund von Wittgensteins Standpunkt ist es in der Tat nicht erstaunlich, daß er den Widerspruch nicht als etwas Befremdliches empfindet; aber was in seiner Darstellung nicht hervortritt, ist, daß doch Widersprüche in der Mathematik nur bei ganz pe-
A141 ripheren Extrapolationen und sonst überhaupt nicht angetroffen | werden. Man kann in diesem Sinne sagen, daß das Faktum der Mathematik durch Wittgensteins Philosophie gar nicht verständlich wird.

Woher aber entspringt bei Wittgenstein die ausgängliche Überzeugung, daß es im Bereich des Mathematischen keine eigentlich gegenständliche Erkenntnis geben, vielmehr alles nur in Technik, Maßstäben und gewohnheitsmäßigen Einstellungen bestehen könne? Er denkt gewiß: „Hier ist doch gar nichts, worauf sich Erkenntnis beziehen sollte.“ Das hängt damit zusammen, daß er, wie erwähnt, keinerlei Phänomenologie anerkennt. Was hier seine Opposition hervorruft, sind vermutlich Redeweisen wie etwa, wenn man vom „Wesen“ einer Farbe spricht, wobei das Wort „Wesen“ die Vorstellung von verborgenen Eigenschaften der Farbe weckt, während doch die Farben als solche nichts anderes sind, als was sich in ihren erscheinenden Eigenschaften und Beziehungen zeigt. Aber dieses hindert doch nicht, daß solche Eigenschaften und Beziehungen Inhalt von objektiven Feststellungen sein können; die Farben sind ja nicht einfach ein Nichts. Auch wenn wir die Prätentionen etwa der Husserlschen Philosophie in Bezug auf die „Wesensschau“ nicht übernehmen, so wird damit doch nicht eine objektive Phänomenologie ausgeschlossen. Daß in den Gebieten der Farben und Töne die phänomenologische Betrachtung noch in den Anfängen steht, hängt sicherlich damit zusammen, daß ihr für die theoretische Physik keine erhebliche Bedeutung zukommt, da wir in der
18 Physik schon auf einer | frühen Stufe veranlaßt werden, die Farben und Töne qualitativ als solche zu eliminieren. Die Mathematik aber läßt sich auffassen als theoretische Phänomenologie der Strukturen. In der Tat ist das, was dem Qualitativen phänomenologisch gegenübersteht, nicht das Quantitative, wie es die traditionelle Philosophie lehrt, sondern das Strukturelle, bestehend in den Formen des Nebeneinander-, Nacheinander- und des Zusammengesetztseins, mit all den Begriffsbestimmungen und Gesetzlichkeiten, die sich darauf beziehen.

Eine solche Auffassung von der Mathematik läßt die Stellungnahme zu den Grundlagenproblemen der Mathematik noch weitgehend offen. Sie kann aber für jemanden, der von den Ansichten Wittgensteins ausgeht, den Weg frei machen für eine Betrachtungsweise, welche der Eigenart und der Bedeutsamkeit des Mathematischen besser gerecht wird.