Bernays Project: Text No. 11

Methoden des Nachweises von Widerspruchsfreiheit und ihre Grenzen[†] (1932)

Methods for demonstrating consistency and their limitations

(*Internationaler Mathematiker-Kongreß Zürich, II. Band: Sektionsvorträge*, S. 201–202)

---

201 |Die Methoden, mit denen vom finiten Standpunkt Beweise der Widerspruchsfreiheit für formalisierte Theorien geführt worden sind, lassen sich nach folgender Einteilung überblicken.

202 |1. *Methode der Wertung.* Ihre wesentliche Ausbildung hat diese durch das Hilbertsche Verfahren des Ausprobierens der Wertung erhalten. Nach diesem Verfahren haben Ackermann und v. Neumann den Nachweis für die Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie – allerdings unter der einschränkenden Bedingung erbracht, daß die Anwendung des Schlusses von n auf $(n+1)$ bloß auf Formeln mit nur freien Variablen zugelassen wird.

2. *Methode des Ausintegrierens.* Diese ist nur auf solche Gebiete anwendbar, die man mathematisch vollkommen beherrscht. Für diese gestattet sie, nicht nur die Frage der Widerspruchsfreiheit, sondern auch die der Vollständigkeit und Entscheidbarkeit in einem völlig positiven Sinne zu beantworten. Solche Gebiete sind insbesondere

a) der einstellige Funktionenkalkul, welcher von Löwenheim, Skolem und Behmann abschließend behandelt worden ist.

b) Teilformalismen der Zahlentheorie. Auf solche haben Herbrand und Presburger die Methode angewendet. Es zeigt sich dabei, daß die Peanoschen Axiome bei Zugrundelegung des Funktionenkalkuls der „ersten Stufe“ (und der Gleichheitsaxiome) noch nicht zur Entwicklung der Zahlentheorie genügen. Erst durch die Hinzunahme der Rekursionsgleichungen für die Ad-

[†]The original title had a second line, reading „Von P. Bernays, Göttingen.“

dition und die Multiplikation kommt die volle Zahlentheorie zustande[1]).

3. *Methode der Elimination.* Diese findet sich der Idee nach schon bei Russell und Whitehead, insbesondere in Anwendung auf den Begriff „derjenige, welcher". Die wirkliche Durchführung des Gedankens ist allerdings mühsam. Eine wesentliche Vereinfachung wird durch einen Ansatz von Hilbert bewirkt, der an die Einführung des „ε-Symbols" anknüpft.

Dieser liefert erstens – was Ackermann ausgeführt hat – noch einmal auf einem einfacheren Wege das Ergebnis der Wertungsmethode. Außerdem aber gelangt man von hier aus zu einem neuen Beweise eines zuerst von Herbrand gefundenen und bewiesenen Satzes, welcher eine Umkehrung bildet von dem berühmten Löwenheimschen Satz über die Erfüllbarkeit im Abzählbaren, und der ein allgemeines Verfahren zur Behandlung von Fragen der Widerspruchsfreiheit liefert.

Die trotz der mannigfachen gewonnenen Einsichten vorliegende Begrenztheit der Ergebnisse stellt sich auf Grund des neuen Gödelschen Satzes über die Grenzen der Entscheidbarkeit in formalen Systemen, in Verbindung mit der daran geknüpften Vermutung v. Neumanns, als eine grundsätzliche dar.

[1] Anders steht es, wenn man, wie Dedekind, von vornherein den Standpunkt der Klassenlogik zu Grunde legt; dieser enthält jedoch stärkere Voraussetzungen, als für die Zahlentheorie nötig sind.