Bernays Project: Text No. 2

Über Hilberts Gedanken zur Grundlegung der Arithmetik.[†] (1922)

On Hilbert's thoughts concerning the founding of arithmetic

(*Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 31, S. 10–19)

10 | Der neue methodische Ansatz Hilberts zur Grundlegung der Arithmetik, von dem ich sprechen will, stellt eine modifizierte und bestimmtere Fassung des Planes dar, welchen Hilbert schon seit langem im Auge hatte und dem er zuerst in seinem Heidelberger Vortrag Ausdruck verliehen hat. An die Stelle der damaligen, recht dunklen Andeutungen ist nun ein scharf umrissenes, faßliches Programm getreten, von dem auch bereits die Anfänge ausgeführt sind.

Die Aufgabe, deren Lösung hier erstrebt wird, ist der Nachweis der Widerspruchslosigkeit der Arithmetik. Wir müssen uns zunächst vergegenwärtigen, wie man zu dieser Problemstellung kommt.

Der Aufbau der Arithmetik (im weiteren Sinne, also einschließlich der Analysis und der Mengenlehre), wie er seit der Einführung der strengen Methoden geschieht, ist ein *axiomatischer*, das heißt, man geht dabei – entsprechend wie bei der automatischen Begründung der Geometrie – aus von der Annahme eines *Systems von Dingen*, von welchem bestimmte Verknüpfungseigenschaften vorausgesetzt werden. Bei der Dedekindschen Begründung der Analysis ist es das System der Elemente des Kontinuums, in Zermelos Aufbau der Mengenlehre ist es der Operationsbereich $\mathfrak{B}$, welcher zu Grunde gelegt wird. Und auch bei derjenigen Begründung der Analysis, welche von der Betrachtung der Zahlenfolgen ausgeht, wird die Zahlenreihe als ein abgeschlossenes, überblickbares System, etwa wie eine unendliche Klaviatur, vorgestellt.

In der Annahme eines solchen Systems mit bestimmten Verknüpfungseigenschaften liegt nun etwas für die Mathematik gleichsam *transzendentes*,

[†] *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 31, S. 10–19. The original publication had the subtitle „Vortrag, gehalten auf der Mathematikertagung in Jena, September 1921." According to a note added at the end, the paper was received October 13, 1921.

und da entsteht die Frage, welche grundsätzliche Stellung man dazu einnehmen soll.

Ein Berufen auf ein anschauliches Erfassen der Zahlenreihe sowie der
11 Mannigfaltigkeit der Größen ist durchaus in Betracht zu ziehen. | Aber jedenfalls könnte es sich dabei nicht um Anschauung im primitiven Sinne handeln; denn in der primitiven anschaulichen Vorstellungsweise sind uns jedenfalls keine unendlichen Mannigfaltigkeiten gegeben. Und wenn es auch ganz voreilig wäre, jede weitergehende Art von anschaulicher Evidenz von vornherein abzustreiten, so werden wir doch derjenigen Tendenz der exakten Wissenschaft Rechnung tragen, welche darauf gerichtet ist, die feineren Organe der Erkenntnis nach Möglichkeit auszuschalten und nur die primitivsten Erkenntnismittel zu Hilfe zu nehmen.

Unter diesem Gesichtspunkt werden wir versuchen, ob es nicht möglich ist, jene transzendenten Annahmen in einer solchen Weise zu begründen, daß nur *primitive anschauliche Erkenntnisse zur Anwendung kommen.* In Anbetracht dieser Beschränkung der Erkenntnismittel werden wir andererseits von dieser Begründung nicht verlangen können, daß sie uns die zu begründenden Annahmen als Wahrheiten (im philosophischen Sinn) erkennen läßt, sondern wir werden zufrieden sein, wenn es gelingt, die auf jene Annahmen aufgebaute Arithmetik als ein mögliches, d. h. widerspruchsfreies Gedankensystem zu erweisen.

Hiermit sind wir schon bei der Hilbertschen Problemstellung angelangt. Ehe wir aber zusehen, wie das Problem in Angriff zu nehmen ist, müssen wir uns erst fragen, ob es nicht eine andere und vielleicht naturgemäßere Art der Stellungnahme zu den transzendenten Annahmen gibt.

In der Tat liegen zweierlei Versuche nahe und sind auch unternommen worden. Der eine Versuch geht gleichfalls auf den Nachweis der Widerspruchslosigkeit aus, aber nicht mit den Mitteln der primitiven Anschauung, sondern mit Hilfe der *Logik*.

Man erinnert sich daran, daß ja die Widerspruchslosigkeit der Euklidischen Geometrie durch die Methode der Zurückführung auf die Arithmetik von Hilbert bewiesen wurde. So scheint es nun auch sachgemäß, die Widerspruchslosigkeit der Arithmetik durch die Zurückführung auf die Logik zu beweisen.

Es sind besonders Frege und Russell, welche das Problem der logischen Begründung der Arithmetik mit großer Energie in Angriff nahmen.

Das Resultat war in Hinsicht auf das eigentliche Ziel ein negatives.

Zunächst zeigte sich an den berühmten *Paradoxien der Mengenlehre*, daß

durch das Zurückgehen auf die Logik gar keine größere Sicherheit des Operierens erreicht wird. Die Widersprüche der naiven Mengenlehre ließen sich ebensogut logisch wie mengentheoretisch wenden, und auch die Kontrolle
12 der Schlüsse durch den Logikkalkul, der ja | gerade zur Sicherung des mathematischen Schließen ausgebaut worden war, half nicht, die Widersprüche zu vermeiden.

Als dann Russell das ganz vorsichtige Verfahren des Stufenkalkuls einführte, stellte sich heraus, daß auf diesem Wege die Analysis und Mengenlehre in der üblichen Form nicht gewonnen werden kann. Und so sahen sich Russell und Whitehead in den *Principia Mathematica* genötigt, eine Annahme über das System der Prädikate „erster Stufe“ einzuführen, das sogenannte *Axiom der Reduzibilität*.

Damit kehrte man aber wieder ganz zu dem axiomatischen Standpunkt zurück und gab das Ziel der logischen Begründung preis.

Die Schwierigkeit zeigt sich übrigens schon innerhalb der Theorie der ganzen Zahlen. Hier gelingt es zwar, indem man gemäß dem Fregeschen Grundgedanken die Anzahlen logisch definiert, die Rechengesetze der Addition und Multiplikation sowie die bestimmten Zahlengleichungen als logische Sätze zu beweisen. Aber man erhält durch dieses Verfahren nicht die übliche Zahlentheorie, weil man nicht beweisen kann, daß es zu jeder Zahl eine größere gibt, – es sei denn, daß man eigens irgendeine Art von Unendlichkeitsaxiom einführt.

Wenngleich nun die Ausgestaltung der mathematischen Logik nicht grundsätzlich über den axiomatischen Standpunkt hinausgeführt hat, so ist doch auf diesem Wege ein großartiger systematischer Aufbau der gesamten Arithmetik entstanden, welcher dem System von Zermelo gleichgeordnet zur Seite steht.

Überdies hat die symbolische Logik uns in der methodischen Erkenntnis weiter gebracht: Während man sich früher nur von den *Voraussetzungen* der mathematischen Theorien Rechenschaft gab, werden jetzt auch die *Schlüsse* präzisiert, und es zeigt sich, daß man das mathematische Schließen, soweit es nur auf die daraus hervorgehenden Resultate ankommt, ersetzen kann durch ein rein formales Handeln nach bestimmten Regeln, bei welchem das eigentliche Denken ganz ausgeschaltet ist.

Aber, wie schon gesagt, das Ziel einer logischen Begründung der Arithmetik erreicht die mathematische Logik nicht, und es ist nicht anzunehmen, daß der Grund für dieses Mißlingen in der besonderen Form des Fregeschen Ansatzes liegt. Vielmehr scheint es sich so zu verhalten, daß das Problem der

Zurückführung der Mathematik auf die Logik überhaupt falsch gestellt ist, weil nämlich Mathematik und Logik zueinander gar nicht in dem Verhältnis von Besonderem und Allgemeinem stehen.

Mathematik und Logik beruhen auf zwei verschiedenen Richtungen der
13 Abstraktion. Während die Logik es mit dem *inhaltlich* Allge|meinsten zu tun hat, ist die (reine) Mathematik die allgemeine Lehre von den *formalen* Beziehungen und Eigenschaften, – so daß einerseits jede mathematische Überlegung den logischen Gesetzen untersteht, andererseits jedes logische Gedankengebilde, wegen der ihm notwendig anhaftenden äußeren Struktur, in den Bereich der mathematischen Betrachtung fällt.

Angesichts dieser Sachlage wird man zu einem Versuch angetrieben, welcher dem der logischen Begründung der Arithmetik gewissermaßen entgegengesetzt ist. Da es nicht gelingt, die mathematisch transzendenten Grundannahmen als logisch notwendig zu erweisen, so fragt man sich, ob diese Annahmen nicht überhaupt entbehrt werden können.

In der Tat scheint eine Möglichkeit zur Ausschaltung der axiomatischen Grundannahmen darin zu bestehen, daß man die existentiale Form der Axiome durchgängig beseitigt und an Stelle der existentialen Annahmen *Konstruktionspostulate* setzt.

Das Verfahren einer solchen Ersetzung ist dem Mathematiker nicht neu; besonders in der elementaren Geometrie wird vielfach die konstruktive Fassung der Axiome angewandt. Anstatt z. B. das Axiom aufzustellen, daß je zwei Punkte eine Gerade bestimmen, postuliert man das Verbinden zweier Punkte durch eine Gerade als eine mögliche Konstruktion.

Ebenso kann man nun auch bei arithmetischen Axiomen vorgehen. Statt z. B. zu sagen „zu jeder Zahl gibt es eine folgende“, führt man das Fortschreiten um Eins, bzw. das Anhängen von +1 als Grundoperation ein.

Man gelangt somit zu dem Versuch eines *rein konstruktiven Aufbaues der Arithmetik*. Und in der Tat ist das Ziel für das mathematische Denken ein sehr verlockendes: die reine Mathematik soll sich ihr Gebäude selber zimmern und nicht angewiesen sein auf die Annahme eines gewissen Systems von Dingen.

Diese konstruktive Tendenz, welche zuerst Kronecker mit großem Nachdruck und später Poincaré in weniger radikaler Form zur Geltung gebracht hat, wird gegenwärtig von Brouwer und Weyl in ihrer neuen Grundlegung der Arithmetik verfolgt.

Weyl prüft zunächst die höheren Schlußweisen in Hinsicht auf die Möglichkeit der konstruktiven Umdeutung, d. h. er untersucht das Verfahren der Analysis sowie das der Zermeloschen Mengenlehre daraufhin, ob es sich nicht als ein konstruktives deuten lasse. Er findet, daß dies nicht möglich ist, da man bei dem Versuch, die Ersetzung der existentialen Axiome durch Konstruktionsmethoden konsequent durchzuführen, auf Schritt und Tritt in logische Zirkel verfällt.

14 | Hieraus zieht Weyl die Folgerung: die Schlußweisen der Analysis und der Mengenlehre müssen so weit beschränkt werden, daß bei ihrer konstruktiven Deutung keine logischen Zirkel zustande kommen. So sieht er sich insbesondere genötigt, den Satz von der Existenz der oberen Grenze fallen zu lassen.

Brouwer geht in dieser Richtung noch weiter, indem er das konstruktive Prinzip auch auf die großen Zahlen anwendet. Wenn man, wie Brouwer es tut, die Annahme einer abgeschlossen vorhandenen Gesamtheit aller Zahlen vermeiden will und nur den unbegrenzt ausführbaren Akt des Fortschreitens um eins als Grundlage nimmt, dann haben Aussagen von der Form: „Es gibt Zahlen von der und der Art ...“ nicht ohne weiteres einen Sinn, und man ist daher auch nicht berechtigt, allgemein für jede zahlentheoretische Behauptung die Alternative aufzustellen, daß sie entweder für alle Zahlen gilt oder daß es eine Zahl (bzw. ein Zahlenpaar, Zahlentripel, ...) gibt, durch welche sie widerlegt wird. Diese Art der Anwendung des „tertium non datur“ ist dann zum mindesten bedenklich.

So geraten wir nun in eine große Verlegenheit: die erfolgreichsten, elegantesten und bewährtesten Schlußweisen sollen preisgegeben werden, und zwar bloß deshalb, weil man von einem bestimmten Standpunkt keine Begründung für sie hat.

Über das Unbefriedigende eines solchen Vorgehens helfen uns auch nicht die Erwägungen hinweg, durch welche Weyl zu zeigen sucht, daß die in der üblichen Analysis zu Grunde liegende Begriffsbildung des mathematischen Kontinuums nicht der bildhaften Vorstellung des Stetigen entspricht. Denn für die Anwendbarkeit und Fruchtbarkeit der Analysis ist eine genaue Analogie zum Inhalt der Wahrnehmung gar nicht nötig, vielmehr genügt es vollkommen, daß die in ihr ausgeübte Methode der Idealisierung und begrifflichen Interpolation folgerichtig durchführbar ist. Es kommt für die Frage der reinen Mathematik nur darauf an, ob das übliche, axiomatisch charakterisierte mathematische Kontinuum ein in sich mögliches, das heißt widerspruchsfreies Gebilde ist.

Diese Frage könnte höchstens dann abgewiesen werden, wenn uns an Stelle des bisherigen mathematischen Kontinuums eine einfachere und übersichtlichere Gedankenbildung zu Gebote stände, durch welche jenes in Schatten gestellt würde. Sieht man sich aber die neuen Ansätze von Weyl und Brouwer des näheren an, so bemerkt man, daß ein Gewinn an Einfachheit hier nicht zu erhoffen ist, daß vielmehr die erforderlichen Komplikationen in den Begriffsbildungen und Schlußweisen statt vermindert nur noch vermehrt werden.

Es besteht also keine Berechtigung, die Frage nach der Wider|spruchslosigkeit des üblichen Axiomensystems der Arithmetik zurückzuweisen. Und was wir aus den Untersuchungen von Weyl und Brouwer zu entnehmen haben, ist das Ergebnis, daß ein Nachweis der Widerspruchslosigkeit auf dem Wege einer Ersetzung der Existenzaxiome durch Konstruktionspostulate nicht möglich ist.

Somit kommen wir zurück zu der Hilbertschen Idee einer Theorie der Widerspruchslosigkeit auf primitiv-anschaulicher Grundlage. Und ich möchte nun den Plan schildern, nach welchem Hilbert sich den Aufbau einer solchen Theorie denkt, und die Richtlinien, welche er dabei verfolgt.

Hilbert macht sich von den beiden besprochenen Begründungsversuchen das positiv Fruchtbare zu eigen. Aus der logischen Theorie entnimmt er die Methode der strengen Formalisierung des Schließens. Die Notwendigkeit dieser Formalisierung ergibt sich unmittelbar aus der Aufgabestellung. Denn es sollen die mathematischen Beweise zum Gegenstand einer konkret-anschaulichen Betrachtungsweise gemacht werden; hierzu aber ist nötig, daß sie gleichsam in das Gebiet des Formalen projiziert werden. Wir haben demnach bei der Hilbertschen Theorie scharf zu sondern: einerseits das formale Abbild der arithmetischen Sätze und Beweise, als *Gegenstand* der Theorie, andererseits das inhaltliche Denken über diesen Formalismus, als *Inhalt* der Theorie. Die Formalisierung geschieht so, daß an Stelle der inhaltlichen mathematischen Sätze Formeln treten und an Stelle eines Schlusses eine Aufeinanderfolge von Formeln nach gewissen Regeln. Und zwar wird den Formeln nicht etwa eine Bedeutung beigelegt; die Formel gilt nicht als Ausdruck eines Gedankens, sondern sie entspricht nur insofern einem inhaltlichen Urteil, als sie innerhalb des Formalismus die analoge Rolle spielt wie das Urteil innerhalb der inhaltlichen Überlegung.

Mehr grundsätzlich als diese Anknüpfung an die symbolische Logik ist die Berührung des Hilbertschen Ansatzes mit den konstruktiven Theorien Weyls und Brouwers. Denn Hilbert will die konstruktive Tendenz, welche auf die Selbständigkeit der Mathematik ausgeht, keineswegs preisgeben, vielmehr ist er gerade bestrebt, sie aufs stärkste zur Geltung zu bringen. Dies scheint zunächst – angesichts dessen, was wir bezüglich der konstruktiven Methode feststellten – unvereinbar zu sein mit dem Zweck des Nachweises für die Widerspruchslosigkeit der Arithmetik. Tatsächlich aber liegt das Hindernis

für die Vereinigung der beiden Ziele nur in einer vorgefaßten Meinung, von
welcher die Vertreter der konstruktiven Tendenz bisher immer ausgegangen
sind, daß nämlich im Gebiete der Arithmetik jede Konstruktion durchaus
16 eine *Zahlenkonstruktion* (bzw. Mengenkonstruktion) | sein müsse. Diese An-
sicht erachtet Hilbert als ein Vorurteil. Eine konstruktive Umdeutung der Existenzaxiome ist nicht nur in der Weise möglich, daß man sie in Erzeugungsprinzipien zur Konstruktion von Zahlen umwandelt, sondern die durch ein solches Axiom ermöglichte Schlußweise kann als Ganzes durch einen formalen Prozeß ersetzt werden, derart, daß an Stelle der Allgemeinbegriffe wie Zahl, Funktion usw. bestimmte Zeichen treten.

Wo Begriffe fehlen, da stellt ein Zeichen zu rechter Zeit sich ein. Dies ist das methodische Prinzip der Hilbertschen Theorie.[a] Wie das gemeint ist, soll ein Beispiel erläutern. In der Zahlentheorie gilt das Existenzaxiom „Zu jeder Zahl gibt es eine folgende". Im Sinne der Beschränkung auf das Konkret-Anschauliche handelt es sich nun darum, den Allgemeinbegriff der Zahl sowie die existentiale Form der Behauptung zu vermeiden.

Die übliche konstruktive Umdeutung besteht (wie schon erwähnt) in diesem Falle darin, daß man das Existenzaxiom durch das Verfahren des Fortschreitens um eins ersetzt. Dies ist ein Verfahren der *Zahlen*-konstruktion. Hilbert dagegen ersetzt den Begriff der Zahl durch ein Symbol Z und stellt die Formel auf:

$$Z(a) \to Z(a+1).$$

Hier ist a eine Variable, für welche irgendein mathematischer Ausdruck eingesetzt werden kann, und das Zeichen $\to$ vertritt die hypothetische Aussagenverknüpfung „wenn – so", das heißt, es gilt die Regel: wenn zwei Formeln $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ aufgeschrieben stehen, so kann auch $\mathfrak{B}$ aufgeschrieben werden.

Auf Grund dieser Festsetzungen leistet die genannte Formel im Rahmen des Formalismus ganz dasselbe, was sonst das Existenzaxiom für die inhaltliche Beweisführung leistet.

Wir sehen hier, wie Hilbert die Methode des Formalisierens der Schlüsse im Sinne der konstruktiven Tendenz verwertet; sie bildet für ihn keineswegs nur ein Hilfsmittel zum Nachweis der Widerspruchslosigkeit, sondern zugleich auch den Weg zu einem *streng konstruktiven Aufbau* der Arithmetik. Und zwar wird der methodische Gedanke der Konstruktion hier so weit gefaßt, daß sich auch alle höheren mathematischen Schlußweisen in den konstruktiven

[a] *Vide* [**?**], p. 163.

Aufbau einfügen lassen.

Nachdem hiermit die Zielrichtung der Hilbertschen Theorie gekennzeichnet ist, will ich nun die Anlage der Theorie in den Grundzügen beschreiben. Es sind folgende drei Fragen zu beantworten:

1. Wie gestaltet sich der konstruktive Aufbau, welcher das formale Abbild
17 des Lehrgebäudes der Arithmetik darstellen und zugleich | das Objekt bilden soll für die anschauliche Theorie der Widerspruchslosigkeit?

2. Wie wird die Behauptung der Widerspruchslosigkeit gefaßt?

3. Welches sind die Mittel der inhaltlichen Überlegung, durch welche der Nachweis der Widerspruchslosigkeit geführt wird?

Was erstens den konstruktiven Aufbau betrifft, so vollzieht sich dieser folgendermaßen. Es werden zunächst die verschiedenen Arten von Zeichen eingeführt und dabei die Regeln für das Einsetzen festgelegt. Ferner werden gewisse Formeln als Grundformeln aufgestellt. Und nun handelt es sich darum, „Beweise“ zu bilden.

Und zwar gilt als Beweis eine konkret hingeschriebene Aufeinanderfolge von Formeln, in welcher für jede vorkommende Formel die Alternative erfüllt ist, daß sie entweder übereinstimmt mit einer Grundformel oder einer vorhergehenden Formel, bzw. aus einer solchen durch erlaubte Einsetzungen entsteht, oder aber daß sie in einem „Schluß“, d. h. in einer Formelfolge vom Typus

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{A}\\ \mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B}\end{array}}{\mathfrak{B}}$$

die Endformel bildet.

Hiernach ist ein „Beweis“ nichts anderes als eine Figur mit bestimmten konkreten Eigenschaften, und aus solchen Figuren setzt sich das formale Abbild der Arithmetik zusammen.

Diese Beantwortung der ersten Frage läßt die Dringlichkeit der zweiten besonders deutlich hervortreten. Denn was soll bei dem reinen Formalismus die Behauptung der Widerspruchslosigkeit besagen? Bloße Formeln können sich doch nicht widersprechen?

Hierauf lautet die einfache Entgegnung: der Widerspruch wird eben auch formalisiert. Getreu seinem Prinzip führt Hilbert für den Widerspruch den

Buchstaben Ω ein; und die Rolle dieses Buchstabens im Formalismus wird durch Aufstellung von Grundformeln so bestimmt, daß aus je zwei Formeln, denen entgegengesetzte Aussagen entsprechen, Ω abgeleitet werden kann, genauer gesagt: daß bei Hinzunahme zweier solcher Formeln zu den Grundformeln ein Beweis mit Ω als Endformel konstruiert werden kann.

Insbesondere dient hierzu die Grundformel

$$a = b \rightarrow (a \neq b \rightarrow \Omega),$$

worin $\neq$ das übliche Ungleichheitszeichen ist. (Die Beziehung der Ungleichheit wird von Hilbert als eigentliche arithmetische Beziehung, so wie die
18 Gleichheit, gefaßt, nicht etwa als logische Negation der | Gleichheit. Ein Zeichen für die Negation führt Hilbert überhaupt nicht ein.)

Die Behauptung der Widerspruchslosigkeit ist jetzt einfach so zu formulieren: Ω kann nicht als Endformel eines Beweises erhalten werden.

Für diese Behauptung gilt es also den Nachweis zu erbringen.

Nun bleibt nur noch die Frage, mit welchen Mitteln dieser Nachweis geführt werden soll. Im Prinzip ist diese Frage bereits entschieden. Denn unser ganzes Problem entspringt ja aus der Anforderung, nur das Konkret-Anschauliche als Grundlage der mathematischen Überlegungen zu nehmen. Es handelt sich also lediglich darum, uns zu vergegenwärtigen, welche Hilfsmittel uns im Rahmen der konkret-anschaulichen Betrachtungsweise zur Verfügung stehen.

So viel ist gewiß, daß wir berechtigt sind, die elementaren Vorstellungen der Reihenfolge und der Anordnung sowie auch das gewöhnliche Zählen in vollem Umfange zu gebrauchen. (Zum Beispiel können wir nachsehen, ob in einer Formel das Zeichen $\rightarrow$ dreimal vorkommt oder nicht so oft.)

Damit allein kommen wir aber nicht aus, vielmehr ist es unumgänglich notwendig, gewisse Formen von vollständiger Induktion anzuwenden. Jedoch auch hiermit gehen wir nicht über den Bereich des Konkret-anschaulichen hinaus.

Nämlich es sind zwei Arten der vollständigen Induktion zu unterscheiden: die engere Form der Induktion, welche sich nur auf etwas abgeschlossen und konkret Vorliegendes bezieht, und die weitere Form der Induktion, welche entweder den Allgemeinbegriff der ganzen Zahl oder das Operieren mit Variablen wesentlich benutzt.

Während diese weitere Form der vollständigen Induktion eine höhere Schlußweise ist, deren Begründung eine der Aufgaben der Hilbertschen Theorie bildet, gehört die engere Form des Schlusses der primitiven anschaulichen Erkenntnisweise an und kann daher als Hilfsmittel der inhaltlichen Beweisführung angewandt werden.

Als typische Beispiele für die engere Form der vollständigen Induktion, wie sie in den Beweisführungen der Hilbertschen Theorie gebraucht wird, seien folgende beiden Schlüsse angeführt:[b]

1. Wenn in einem konkret vorliegenden Beweise überhaupt das Zeichen + vorkommt, so findet man beim Durchlesen eine Stelle, wo es zum erstenmal vorkommt.

2. Wenn man ein allgemeines Verfahren hat, um aus einem Beweise mit einer gewissen, konkret beschreibbaren Eigenschaft $\mathfrak{E}$ das erste vorkommende
19 Zeichen Z wegzuschaffen, ohne daß der Beweis da|durch die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ verliert, so kann man, durch wiederholte Anwendung des Verfahrens, das Zeichen Z gänzlich aus einem solchen Beweis entfernen, ohne daß er die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ verliert.

(Man beachte, daß es sich hier ausschließlich um formalisierte Beweise, d. h. Beweise im Sinne der vorhin gegebenen Definition, handelt.)

Hiermit ist im wesentlichen die Methode dargelegt, welche die Theorie der Widerspruchslosigkeit zu befolgen hat. Die Ausführung dieser Theorie befindet sich gegenwärtig noch ganz in den Anfängen; das meiste muß hier erst noch geleistet werden. Jedenfalls aber läßt sich schon aus dem, was bisher vorliegt, die grundsätzliche Möglichkeit und die Durchführbarkeit der geforderten Betrachtungsweise erkennen, und man sieht auch, daß es im gauz echten Sinne *mathematische* Überlegungen sind, welche man hier anzustellen hat.

Gerade darin liegt der große Vorzug des Hilbertschen Verfahrens, daß die Probleme und Schwierigkeiten, welche sich in der Grundlegung der Mathematik bieten, aus dem Bereich des Erkenntnistheoretisch-Philosophischen in das Gebiet des eigentlich Mathematischen übergeführt werden.

Die Mathematik schafft sich hier selbst ein Schiedsgericht, vor welchem alle grundsätzlichen Fragen in spezifisch mathematischer Weise zum Austrag gebracht werden können, ohne daß man nötig hat, sich über subtile logische Gewissensfragen den Kopf zu zerbrechen, wie etwa: ob Urteile von einer gewissen Form einen Sinn haben oder nicht.

Und so steht auch zu erwarten, daß das Unternehmen der neuen Hil-

[b] *Vide* [?], p. 164.

bertschen Theorie in den Kreisen der Mathematiker bald Anklang und auch Beteiligung finden wird.