Bernays Project: Text No. 16

Über die aktuelle Methodenfrage der Hilbertschen Beweistheorie† (1938/1941)

On the current question of method in Hilbert's proof theory

(Manuscript from the *Nachlass*)

---

1 [1] |Mein Bericht über den gegenwärtigen Stand der Hilbertschen Beweistheorie verbindet sich mit grundsätzlichen Erwägungen. Zum voraus bemerke ich, dass inbetreff der Stellungnahme zu der vorhandenen Situation die hier dargelegten Ansichten nicht beanspruchen können, schlechthin als der Standpunkt der Hilbertschen Schule zu gelten.

[2] Die Verknüpfung der grundsätzlichen Erörterungen mit der Darlegung der gegenwärtigen Situation der Beweistheorie wird durch diese Situation selbst herausgefordert. Wie sie wohl wissen, hat die Beweistheorie eine Art von Krise durchgemacht, und von manchen ist das Hilbertsche Unternehmen schon geradezu als gescheitert erklärt worden. Diese Beurteilung der Situation gründet sich darauf, dass dasjenige Programm, wie es Hilbert für die
2 Beweistheorie in seinen Publikationen von 1922–1927 darlegte, | allem Anschein nach einer Revision bedarf, und zwar in Hinsicht auf den zugrunde zu legenden methodischen Standpunkt.

[3] Technisch betrachtet handelt es sich darum, dass man für die metamathematischen Überlegungen weitergehende Methoden des Schliessens nötig

†A French version, "Sur les questions méthodologiques actuelles de la théorie Hilbertienne de la démonstration," was published in *Les entretiens de Zürich sur le fondements et la méthode des sciences mathématiques, 6–9 décembre 1938*, ed. F. Gonseth, Zürich: Leemann & Co. (1941), pp. 144–152 (*vide* [?]). The French text, however, introduced—besides several passages obscured in translation—roughly one hundred changes, apparently none of which was approved by Bernays, that we decided to include the text and a translation of the original German manuscript. The sections of the German text are consecutively numbered "[n]" for easy cross-reference and comparison with the 'official' French version of the text given at the bottom of the pages/at the end of the bi-lingual section.

hat als die, auf welche sich Hilbert ursprünglich im Sinne der „finiten Einstellung“ beschränken wollte. Dieses Erfordernis machte sich bereits bei derjenigen Aufgabe geltend, die man zuvor als schon erledigt glaubte, nämlich des Nachweises der Widerspruchsfreiheit für den vollen arithmetischen Formalismus.

[4] Im Zusammenhang damit erwies sich auch, dass der von Hilbert intendierte finite Standpunkt mit dem Brouwerschen Intuitionismus nicht – wie es zuvor den Anschein hatte – gleichwertig ist. Gödel konnte zeigen, dass im Bereich des zahlentheoretischen Formalismus alle Schlussweisen der klassischen Mathematik durch eine verhältnismässig einfache Umdeutung in intuitionistisch zulässige Schlussweisen überführt werden können, sodass sich damit vom Standpunkt des Intuitionismus ohne weiteres die Widerspruchsfreiheit
3 des zahlentheoretischen Formalismus ergibt. |

[5] Unter dem zahlentheoretischen Formalismus soll hier dasjenige formaldeduktive System verstanden werden, welches gebildet wird von dem logischen Kalkul der ersten Stufe („Prädikatenkalkul“ oder auch „engerer Funktionenkalkul“ genannt), den Gleichheitsaxiomen, den zahlentheoretischen Axiomen

$$a' \neq 0, \quad a' = b' \ \rightarrow \ a = b, \quad (a' \text{ stellt die auf } a \text{ folgende Zahl dar})$$

sowie dem Schema der vollständigen Induktion, und den elementaren rekursiven Definitionen. (Der in den zahlentheoretischen Deduktionen auftretende Begriff der kleinsten Zahl von einer gewissen Eigenschaft kann mittels der Methode der Elimination des Begriffs „derjenige, welcher“ für die Untersuchung der Widerspruchsfreiheit ausgeschaltet werden.)

[6] Dieser Formalismus geht schon etwas über dasjenige hinaus, was man unbedingt für die Formalisierung der zahlentheoretischen Beweise braucht. Hierfür kommt man in der Tat, wie zuerst Skolem zeigte, mit einem engeren Formalismus der „rekursiven Zahlentheorie“ aus, welcher noch einer direkten
4 finiten Deutung fähig ist. |

[7] Der hier betrachtete zahlentheoretische Formalismus unterscheidet sich von der rekursiven Zahlentheorie und auch von der intuitionistischen Zahlentheorie durch die unbeschränkte Anwendung der Begriffe „alle“ und „es gibt“.

[8] Es kann aber im Bereich der Schlüsse, die sich durch den zahlentheoretischen Formalismus darstellen lassen, eine Einigung zwischen dem Vertreter des üblichen mathematischen Standpunktes, der jene Schlussweisen sämtlich

als berechtigt erachtet, und dem Intuitionisten, der den Satz vom ausgeschlossenen Dritten nicht generell anerkennt, in der Weise erreicht werden, dass der erste erklärt: eine Aussage „es gibt ein x, für welches $\mathfrak{A}(x)$ gilt“ soll nur eine andere Ausdrucksweise dafür sein, dass jedenfalls nicht für alle x das Gegenteil von $\mathfrak{A}(x)$ gilt, und eine Aussage „$\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$“ soll nichts anderes besagen als, dass nicht sowohl das Gegenteil von $\mathfrak{A}$ wie das Gegenteil von $\mathfrak{B}$ gilt. Bei dieser Interpretation des Existentialurteils und der Disjunktion muss der Intuitionist alle Schlussweisen aus dem genannten Bereich der klassischen Mathematik anerkennen, – wenigstens sofern er die von Heyting
5 angegeben Regeln des intuitionistischen Schliessens akzeptiert. |

[9] Diese Feststellung nun, dass die intuitionistischen Schlussweisen der Zahlentheorie zu den „klassischen“ in einer so engen Beziehung stehen, ergibt einerseits ohne weiteres einen Nachweis der Widerspruchsfreiheit des zahlentheoretischen Formalismus vom Standpunkt des Intuitionismus, andrerseits geht aus ihr hervor, dass der intuitionistische Standpunkt sich von dem finiten wesentlich unterscheidet. Insbesondere zeigt sich der folgende Unterschied inbezug auf Allaussagen (Aussagen allgemeiner Form): Während der Intuitionismus nur die Anwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten auf solche Aussagen anficht, vermeidet der finite Standpunkt überhaupt die Bildung der Negation von Allaussagen sowie deren Verwendung als Vorderglieder hypothetischer Sätze.

[10] Eine Negation einer Aussage hat nur dann einen finiten Sinn, wenn sie einer Behauptung positiven Inhalts gleichkommt – so wie z. B. die negative Aussage „die Ziffer $\mathfrak{a}$ ist nicht gleich der Ziffer $\mathfrak{b}$“, dasselbe besagt wie die positive Behauptung, dass die Ziffer $\mathfrak{a}$ von der Ziffer $\mathfrak{b}$ verschieden ist. Und eine Bedingung oder eine Annahme ist nur dann finit, wenn sie eine anschaulich bestimmte Konstellation oder Operation bzw. das Ergebnis anschaulich bestimmter Operationen zum Inhalt hat. Hiernach ist z. B. die Annahme, dass
6 der grosse | Fermatsche Satz zutreffe, nicht finit, wohl aber die Annahme, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{n}$ seien positive ganze Zahlen (Ziffern), $\mathfrak{n} > 2$ und $\mathfrak{a}^{\mathfrak{n}} + \mathfrak{b}^{\mathfrak{n}} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{n}}$, – also die Annahme, dass die Zahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{n}$ ein Gegenbeispiel gegen den grossen Fermatschen Satz bilden. Ferner: die Annahme der Ableitbarkeit dieses Satzes durch den zahlentheoretischen Formalismus ist finit in dem Sinne, dass eine Formelfigur von den Eigenschaften einer Ableitung im zahlentheoretischen Formalismus mit einer den grossen Fermatschen Satz darstellenden Endformel als vorliegend angenommen wird; dagegen die Annahme, dass irgend ein inhaltlich bündiger Beweis des grossen Fermatschen Satzes vorgelegt sei, ist nicht finit.

[11] Beim Intuitionismus lassen sich die Negationen, und damit insbesondere die Negationen von Allaussagen, freilich eliminieren. Man kann, unter Auszeichnung einer bestimmten falschen Aussage von elementarer Form, etwa $0 = 1$, die Negation $\overline{\mathfrak{A}}$ einer Aussage $\mathfrak{A}$ interpretieren durch $\mathfrak{A} \rightarrow 0 = 1$ („die Annahme, dass $\mathfrak{A}$, führt auf $0 = 1$“). Durch diese Interpretation gehen die mit Verwendung der Negation erfolgenden intuitionistischen Schlüsse wieder
7 in intuitionistisch zulässige Schlüsse über. |

[12] Die auf diese Art vollziehbare Ausschaltung der Negation ist aber insofern nur eine scheinbare, als wir dadurch genötigt werden, mit irrealen Bedingungssätzen zu operieren. Das heisst es treten Implikationen $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ auf, die in einem irrealen Sinne zu deuten sind: „wäre $\mathfrak{A}$, so würde $\mathfrak{B}$ folgen“. Und zwar werden solche indirekten Argumentationen nicht nur für elementare Aussagen $\mathfrak{A}$ gebraucht – für solche sind sie auch im finiten Schliessen zulässig – sondern wesentlich auch für Allsätze sowie für Implikationen mit Allsätzen als Vordergliedern und auch noch logisch komplizierteren Sätzen.[a]

[13] Es bleibt jedenfalls die Anwendung des Begriffs der „Absurdität“ auf beliebige Aussagen als wesentliches Hilfsmittel der intuitionistischen Überlegungen.

[14] Nun erhebt sich, in Anbetracht des Umstandes, dass der finite Standpunkt sich als zu eng für die Beweistheorie erwiesen hat, die Frage: Ist es erforderlich, die gesamte methodische Voraussetzung des Intuitionismus zu übernehmen?

[15] Wir können zurzeit wenigstens eine partielle Antwort auf diese Frage ge-
8 ben. Nämlich für den | zahlentheoretischen Formalismus hat Gentzen einen Nachweis der Widerspruchsfreiheit erbracht, dessen methodische Erfordernisse eine Art von Zwischenglied zwischen dem finiten Standpunkt und dem des Intuitionismus bilden.

[16] Es empfiehlt sich, die neuere von Gentzen gegebene Fassung seines Bewei-

[a] This sentence is ambiguous; it is not clear exactly what the phrase “logisch komplizierteren Sätzen” refers to. If the indended meaning was:

> A) it holds for general sentences and for implications with general or even more logically complex sentences as premisses,

then one has to add the words “als Vordergliedern” at the end of the otherwise elliptic sentence. But if the indended meaning was:

> B) it holds for general sentences, for implications with general sentences as premisses, and for sentences even more logically complex than implications,

then one has to correct the grammatical case and read “logisch kompliziertere Sätze.” Our translation follows reading A).

ses zugrunde zu legen, die gegenüber der zuerst erschienenen nicht nur den Vorzug hat, dass hier der Beweisgedanke durchsichtig gemacht ist, sondern auch denjenigen, dass gewisse bei dem früheren Beweise noch vorhandene methodische Komplikationen wegfallen.

[17] Kürzlich ist der neuere Gentzensche Beweis von Kalmár noch vereinfacht worden, wobei sich insbesondere zeigte, dass die von Gentzen benutzte Transformation des zahlentheoretischen Formalismus in einen gewissen ihm äquivalenten Kalkul entbehrlich ist.

[18] Es sei hier kurz das logische Schema des Gentzenschen Widerspruchsfreiheitsbeweises, im Hinblick auf die Art der Überschreitung des finiten Standpunktes, skizziert – (mit gewissen unerheblichen Abweichungen von der Gentzenschen Darstellung).

[19] Aufgrund einer schon bei den früheren Widerspruchsfreiheitsbeweisen benutzten Bemerkung ist die Behauptung der Widerspruchsfreiheit des zahlen-
9 theoretischen Formalismus gleichbedeutend mit derjenigen, | dass in diesem Formalismus die Formel $0 = 1$ – bezeichen wir sie mit „$\mathfrak{f}$“ – nicht ableitbar ist, dass also jede Ableitung in diesem Formalismus eine von $\mathfrak{f}$ verschiedene Endformel hat.

[20] Mit Bezug auf solche Ableitungen, in denen weder die vollstndige Induktion noch die Regeln für „alle“ und „es gibt“ angewandt werden, – wir wollen sie kurz „elementare Ableitungen“ nennen – lässt sich unsere Behauptung auf einem direkten Wege als zutreffend erkennen.

[21] Für den allgemeinen Nachweis werden „Ordnungszahlen“ aus einem Bereich von Zahlen der Cantorschen ersten und zweiten Zahlenklasse (es sind diejenigen unterhalb der ersten Cantorschen ϵ-Zahl) verwendet. Die Einführung kann auf independente Art geschehen, d. h. ohne Bezugnahme auf die Cantorsche Theorie: die betreffenden Ordnungszahlen lassen sich als gewisse (endliche) Figuren charakterisieren, für die sich in anschaulicher Weise eine Beziehung „kleiner“ mit den Eigenschaften einer Ordnungsbeziehung so definieren lässt, dass für zwei verschiedene Ordinalzahlen sich stets entscheiden lässt, welche von beiden die kleinere ist.

[22] Es wird nun jeder Ableitung aus dem zahlentheoretischen Formalismus
10 durch eine einfache Berechnungsvorschrift | eine Ordnungszahl beigelegt. Aufgrund dieser Zuordnung lässt sich zu jeder nicht elementaren Ableitung eine solche von kleinerer Ordnungszahl bestimmen, welche die gleiche Endformel besitzt. Daraus ergibt sich: wenn jede Ableitung, deren Ordnungszahl kleiner ist als eine gewisse Ordnungszahl α, eine von $\mathfrak{f}$ verschiedene Endformel hat, dann gilt das gleiche für jede Ableitung von der Ordnungszahl α.

[23] Bis hierher erfolgt der Beweis im Rahmen finiter Betrachtungen. Um nun von der erhaltenen Konsequenz zu dem Ergebnis zu gelangen, dass überhaupt jede Ableitung im zahlentheoretischen Formalismus eine von $\mathfrak{f}$ verschiedene Endformel hat – was ja die zu beweisende Behauptung ist –, bedarf es noch der Rechtfertigung der folgenden Schlussweise: „Wenn eine Aussage $\mathfrak{B}(\alpha)$ über eine Ordnungszahl α für 0 (die kleinste der Ordnungszahlen) zutrifft und wenn sich zu jeder Ordnungszahl α eine kleinere Ordnungszahl β so bestimmen lässt, dass, sofern $\mathfrak{B}(\beta)$ zutrifft, auch $\mathfrak{B}(\alpha)$ zutrifft, so trifft $\mathfrak{B}(\alpha)$ für jede Ordnungszahl α zu“. Diese Schlussweise wiederum wird entnommen aus dem Prinzip: „Wenn eine Aussage $\mathfrak{B}(\alpha)$ über eine Ordnungszahl α auf 0 zutrifft und wenn sie auf die Ordnungszahl α zutrifft, sofern sie auf jede
11 kleinere Ordnungszahl | zutrifft, so trifft sie auf jede Ordnungszahl zu.“

[24] Dieses Schlussprinzip ist eine Art der Verallgemeinerung der vollständigen Induktion. In der Mengenlehre wird eine solche verallgemeinerte Induktion, da sie sich auf transfinite Ordnungszahlen erstreckt, als „transfinite Induktion“ bezeichnet. Diese Bezeichnung ist jedoch für unsere Betrachtung ungeeignet, weil wir ja das Wort „finit“ in einem methodischen Sinne verwenden und der Unterschied von gewöhnlicher Induktion (Schluss von n auf $n+1$) und transfiniter Induktion keineswegs mit demjenigen von finiter und nicht-finiter Schlussweise zusammenfällt. Eine gewöhnliche Induktion ist im allgemeinen nur dann finit, wenn das Prädikat, um dessen Zutreffen auf eine Zahl es sich dabei handelt, ein elementares ist. Andererseits gibt es transfinite Induktionen (im Sinne der üblichen Terminologie) die noch durchaus finiten Charakter haben.

[25] Hier handelt es sich für uns nicht sowohl um eine scharfe Fixierung der Grenze, bis zu der die finiten Induktionen reichen, als vielmehr darum, uns vom anschaulichen Standpunkt klarzumachen, worauf die Berechtigung des betrachteten Schlussprinzips beruht und inwiefern dieses eine sachgemässe
12 Verallgemeinerung der gewöhnlichen Induktion bildet. | Vergegenwärtigen wir uns, wie die finite Motivierung der gewöhnlichen Induktion erfolgt: Wir haben die Voraussetzung, dass $\mathfrak{A}(0)$ gilt und dass wir von $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ auf $\mathfrak{A}(\mathfrak{n}+1)$ schliessen können. Da wir von 0 aus durch wiederholtes Fortschreiten um 1 zu jeder endlichen Zahl gelangen können, so können wir auch von $\mathfrak{A}(0)$ bis zu jeder endlichen Zahl n hin auf $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ schliessen.

[26] Nun ist die Ordnung der betrachteten Ordnungszahlen derjenigen in der gewöhnlichen Zahlenreihe insofern analog, als sie auch die Eigenschaft der Wohlordnung besitzt, dass auf jedes Anfangsstück ein unmittelbar nächstes Element folgt, und zwar lässt sich der Ordnungstypus dieser Wohlordnung in

einer rekursiven Weise auf die natürliche Ordnung der Zahlenreihe zurückführen. Hierdurch wird eine Art von anschaulicher „Durchlaufung“ ermöglicht. In der Cantorschen Mengenlehre wird mit Bezug hierauf von einem „Hinüber-
13 zählen über das Unendliche“ gesprochen. |

[27] Dieses Hinüberzählen über das Unendliche bedeutet nicht etwa ein Operieren mit der Vorstellung eines Aktual-Unendlichen sondern den Übergang von einem Fortschreitungsprozess zu seiner metamathematischen Betrachtung in der Art, wie er bereits bei der gewöhnlichen Induktion stattfindet, mit der wir über die Gewinnung der einzelnen Aussagen $\mathfrak{A}(0)$, $\mathfrak{A}(1)$, $\mathfrak{A}(2)$, ... hinausgehen durch die generelle metamathematische Feststellung, dass wir für jede Zahl $\mathfrak{n}$ zu der Aussage $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ gelangen können.

[28] Bei der Durchlaufung des zu betrachtenden Wohlordnungstypus treten Induktionen überlagert auf, das heisst wir gewinnen aus der gewöhnlichen Induktion höhere Induktionen, indem wir auf die Prozesse der Iteration von Induktionen die metamathematische Betrachtung anwenden. Dieser Über-
14 lagerung von Induktionen entspricht nun | in der logischen Ausdrucksform eine Überlagerung von hypothetischen Sätzen, in denen Allsätze als Vorderglied auftreten. Dabei handelt es sich jedoch stets um solche Allsätze, die an Hand der Überlegung sich als erfüllt erweisen, sodass die hypothetische Form hier den Sinn der Vorwegnahme einer Etappe in einem progressiven Folgerungsprozess hat.

[29] Die Verwendung des betrachteten Prinzips der transfiniten Induktion bedeutet hiernach eine Erweiterung des methodischen Rahmens der Beweistheorie, wenn auch nicht ein volles Übernehmen der intuitionistischen Schlussweisen. Das Verfahren dieser Erweiterung ist auch verallgemeinerungsfähig; denn es besteht die Möglichkeit, noch für höhere Wohlordnungstypen als den in dem Gentzenschen Widerspruchsfreiheitsbeweis benutzten (der Ordnungszahlen unterhalb der ersten Cantorschen ϵ-Zahl) die „Durchlaufung“ anschaulich zu beherrschen und damit das auf den Wohlordnungstypus bezügliche Prinzip der transfiniten Induktion anschaulich zu rechtfertigen.

[30] Ob ein derartiges höheres Induktionsprinzip als zusätzliches (d. h. zu den finiten Methoden hinzutretendes) Hilfsmittel für einen Nachweis der Widerspruchsfreiheit[b] der Analysis ausreicht, lässt sich zurzeit noch nicht beurtei-
15 len.|

[31] Nach dem allgemeinen Gödelschen Theorem über formal unableitbare

[b]The qualification “der Widerspruchsfreiheit” (of the consistency) is a later addition to the manuscript in Gabelsberger shorthand.

Sätze müsste das betreffende Induktionsprinzip – welches sich jedenfalls als Satz über eine gewisse Wohlordnung der gewöhnlichen Zahlen aussprechen liesse – so beschaffen sein, dass sein Beweis nicht im Rahmen der Analysis formalisierbar ist. Es scheint zunächst unmöglich, dass dieser Bedingung genügt werden könnte; denn die allgemeine Theorie der Wohlordnungen der Zahlenreihe einschliesslich des allgemeinen Satzes von der transfiniten Induktion lässt sich im Formalismus der Analysis entwickeln. Jedoch ist zu bedenken, dass der allgemeine Satz von der transfiniten Induktion noch nichts darüber besagt, ob eine bestimmte definierte Ordnung der Zahlenreihe eine Wohlordnung ist; und auf eine solche Feststellung könnte das betreffende höhere Induktionsprinzip hinauskommen. –

[32] Jedenfalls erscheint es angesichts dieser Erwägungen nicht als tunlich, den methodischen Rahmen für die beweistheoretischen Untersuchungen von vornherein festzulegen. Die Erwartung, dass der finite Standpunkt (im ursprünglichen Sinn)[c] für die gesamte Beweistheorie ausreichen werde, ist durch
16 den Umstand erweckt worden, dass die Probleme der Beweistheorie | sich von diesem Standpunkt aus schon formulieren lassen. Es besteht jedoch keine einfache Beziehung zwischen der Darstellbarkeit und der Beweisbarkeit von Sätzen und daher auch nicht zwischen der Formulierbarkeit und der Lösbarkeit von Problemen.

[33] Nun erhebt sich aber die Frage, was denn das Charakteristische der methodischen Beschränkung der Beweistheorie sein soll, wenn es nicht in der Forderung jener elementaren Evidenz besteht, durch die der finite Standpunkt gekennzeichnet ist. Hierauf ist zu erwidern, dass die Tendenz der methodischen Beschränkung grundsätzlich dieselbe bleibt, nur dass wir – wenn wir uns die Möglichkeit von Erweiterungen des methodischen Rahmens offen halten wollen – vermeiden müssen, die Begriffe der Evidenz und der Sicherheit in einem zu absoluten Sinne zu gebrauchen. Damit gewinnen wir andrerseits den grundsätzlichen Vorteil, dass wir nicht genötigt sind, die üblichen Methoden der Analysis als ungerechtfertigt oder bedenklich zu problematisieren.

[34] Das allgemein Kennzeichnende der methodischen Einstellung der Hilbertschen Beweistheorie ist darin zu erblicken, dass hier auf das Einhalten einer im strengen Sinne arithmetischen Betrachtungsweise Wert gelegt wird,
17 während die üblichen Methoden der Analysis und Mengenlehre zu | einem wesentlichen Teil von geometrischen Vorstellungen, insbesondere der Punkt-

[c]This remark in parenthesis is a later addition to the manuscript in Gabelsberger shorthand.

Mannigfaltigkeit, inspiriert sind und aus diesen ihre Überzeugungskraft entnehmen. In der Tat kann man sagen – und das ist wohl auch das Hauptsächliche an der finitistischen und intuitionistischen Kritik des üblichen Verfahrens der Mathematik –, dass in der Analysis und Mengenlehre die Arithmetisierung der Geometrie keine restlose ist.

[35] Die methodische Richtung der Hilbertschen Beweistheorie kann dazu beitragen, dass die spezifisch arithmetische Denkweise stärker zur Entwicklung gelangt und dass die Stufen der arithmetischen Begriffsbildung deutlicher hervortreten.

[36] Im übrigen ist inbetreff der Leistungen der Beweistheorie hervorzuheben, dass die Nachweise der Widerspruchsfreiheit für den zahlentheoretischen Formalismus keineswegs die einzigen Fortschritte bilden, welche die metamathematische Untersuchung in den letzten Jahren aufzuweisen hat. Insbesondere sind in den Fragen der Entscheidbarkeit von Problemen und der effektiven Berechenbarkeit von Funktionen durch die Untersuchungen von Gödel, Church, Turing, Kleene und Rosser sehr prägnante Ergebnisse erzielt worden. Die Metamathematik steht heute bereits so da, dass ihre Würdigung unabhängig ist von der Stellungnahme zu den philosophischen Fragen der Grundlagenforschung. –