Bernays Project: Text No. 28

Zum Symposium über die Grundlagen der Mathematik[1] (1971)

On a Symposium on the Foundations of Mathematics

(*Dialectica* 25, S. 171–195;
repr. in *Abhandlungen*, S. 189–213)

171/A189 | Zu dem in Band 23 der *Dialectica* eröffneten Symposium über die Grundlagen der Mathematik,[2] welches auf Herrn Gonseths Anregung von Erwin Engeler und mir in die Wege geleitet wurde und welches von Herrn Gonseth im Editorial des Bandes 23 kurz eingeführt worden ist, seien zuerst einige erläuternde Ausführungen über die Problemsituation in den Grundlagen der Mathematik vorgebracht.

Seit den Diskussionen in den zwanziger Jahren unseres Jahrhunderts, in denen die Grundlagenfragen der Mathematik innerhalb der Philosophie besondere Aufmerksamkeit erregten, hat sich die Problematik der Grundlagen der Mathematik erheblich verändert. Die damalige Situation war ja gekennzeichnet durch die Gegenüberstellung der drei Richtungen, welche man –

[1]Eine Ankündigung des Symposiums brachte Herr Gonseths Editorial zu *Dialectica* Band 22 (1968) (siehe S. 91–95, insbesondere S. 95)

[2]Verzeichnis der Abhandlungen (nachträgliche Hinzufügung [in den *Abhandlungen*]): *Dialectica*, Vol. 23 (1969)

Heft 1: Abraham Robinson, „From a formalist's point of view“ (*vide* [**?**]). – R. L. Goodstein, „Empiricism in mathematics“ (*vide* [**?**]). – Erwin Engeler/Helmut Röhrl, „On the problem of foundations of category theory“ (*vide* [**?**]). – Paul Finsler, „Über die Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese“ (*vide* [**?**]).

Heft 2: Haskell B. Curry, „Modified basic functionality in combinatory logic“ (*vide* [**?**]). – Georg Kreisel, „Two notes on the foundations of set-theory“ (*vide* [**?**]).

Heft 3–4: F. William Lawvere, „Adjointness in foundations“ (*vide* [**?**]).

Dialectica, Vol. 24 (1970)

Heft 4: Marian Boykan Pour-El, „A recursion-theoretic view of axiomatizable theories“ (*vide* [**?**]). – Richard Montague, „Pragmatics and intensional logic“ (*vide* [**?**]). – Eduard Wette, „Vom Unendlichen zum Endlichen“ (*vide* [**?**]).

darin L. E. J. Brouwer folgend – als Logizismus, Intuitionismus, Formalismus bezeichnet hat. Es wurde der Eindruck erweckt, als ob diese drei Richtungen eine vollständige Alternative der in Betracht kommenden Stellungnahmen zu den Grundlagenfragen der Mathematik bildeten. In Wahrheit handelte es
A190 sich ja um | drei besondere Schulen, durch welche drei verschiedene Unternehmungen hinsichtlich der Grundlegung der Mathematik vertreten wurden.

Die Gedanken, die für diese Unternehmungen richtunggebend waren, haben auch für die heutige Diskussion der Grundlagenfragen der Mathematik ihre Aktualität behalten. Auch ist von den Methoden und Ergebnissen, die im Rahmen dieser Unternehmungen gewonnen wurden, vieles von bleibender
172 Bedeutung, so insbesondere: |

1. die Erkenntnis der Möglichkeit der Formalisierung der mathematischen Theorien mittels der logischen Symbolik; das Umgehen mit dieser ist dem heutigen Mathematiker schon etwas Vertrautes,

2. die Verwertung der Formalisierung für eine metatheoretische Betrachtung. Die Anfänge einer solchen finden sich ja bereits in der aristotelischen Syllogistik; über deren sehr begrenzte Fragestellung führt die Untersuchung der mathematischen Beweismöglichkeiten weit hinaus,

3. die Gegenüberstellung einer konstruktiven, auf das Prozeßhafte gerichteten Behandlung der Mathematik als Ergänzung zu der klassischen Behandlungsweise, welche auf Seins-Beziehungen gerichtet ist.

In Hinsicht auf die Grundlagenprobleme der Mathematik hat jedoch keiner der ursprünglichen Ansätze die erstrebte Ausschließlichkeit erlangt, vielmehr hat die Entwicklung zu einer Kombination der verschiedenen Gesichtspunkte geführt, und andererseits mußten manche mit den Ansätzen verbundene Auffassungen fallengelassen werden.

Was zunächst die Formalisierung betrifft, so enthielt der Rahmen der formalisierten Mathematik, der in den *Principia Mathematica* aufgestellt war, unnötige Komplikationen und wurde auf Anregung von F. P. Ramsey durch das System der einfachen Stufentheorie ersetzt. Als ein anderes, stufenfreies Rahmensystem bestand übrigens vorher schon, allerdings zunächst nicht in formalisierter Gestalt, dasjenige der axiomatischen Mengenlehre von Zermelo. Dieses wurde dann auch in formalisierte Gestalt gebracht. Dazu bedurfte es freilich einer einschränkenden Präzisierung des von Zermelo in einem der Axiome benutzten Begriffes einer „definiten Eigenschaft“, wie sie etwa gleichzeitig von A. Fraenkel und Th. Skolem vollzogen wurde. Eine Art Vermittlung zwischen der Stufentheorie und den Systemen der axiomatischen

Mengenlehre bilden die von W. V. Quine aufgestellten Systeme.

Für alle die strikt formalen Rahmensysteme der Mathematik erwies sich jedoch anhand der Ergebnisse von Kurt Gödel und Th. Skolem, daß sie nicht die gesamte Mathematik darzustellen vermögen. Und im Zusammen-
A191 hang damit zeigte sich, daß sogar schon bei der axiomatisch | behandelten
Zahlentheorie für jedes strikt formalisierte Axiomensystem „Non-Standard-Modelle“ existieren, die nicht die intendierte Struktur der Zahlenreihe besitzen. In diesen Tatsachen macht sich geltend, daß gewisse Begriffe *nicht* einer voll adäquaten Formalisierung zugänglich sind, so insbesondere der Begriff der Endlichkeit (der endlichen Zahl) und der allgemeine Begriff eines
173 Prädikates. |

Was ferner den Gesichtspunkt der (durch die Formalisierung ermöglichten) metatheoretischen Betrachtung angeht, so wurde ja eine solche von Hilbert für die Mathematik („Metamathematik“) intendiert als ein Verfahren, um mit elementar-kombinatorischen Methoden die Widerspruchsfreiheit der klassischen Mathematik zu erweisen und damit der Kritik zu begegnen, welche von verschiedenen Seiten, insbesondere zuerst von Kronecker, gegen die Methoden der klassischen Mathematik gerichtet worden war. In dieser Beziehung zeigte sich, wiederum auf Grund der Ergebnisse von Gödel, daß man die Zielsetzung sehr abschwächen muß, insofern als man sich für die Widerspruchsfreiheitsbeweise nicht auf elementar-kombinatorische Methoden beschränken kann, vielmehr jedenfalls stärkere Mittel konstruktiver Mathematik verwenden muß. Wieviel hier erfordert wird, das ist bisher noch nicht restlos abgeklärt.

Diese Schwierigkeit betrifft freilich nur eine Art der metatheoretischen Untersuchungen. Solche sind ja, auch nach Hilberts Intentionen, nicht nur für Widerspruchsfreiheitsbeweise, sondern auch für die Behandlung von Fragen der Entscheidbarkeit und der Vollständigkeit von Bedeutung. Es braucht daher mit einer metatheoretischen Untersuchung mathematischer Theorien nicht notwendig eine Reduktion der üblichen Beweismethoden verbunden zu werden.

Auf eine Metamathematik mit Anwendung der üblichen (klassischen) Methoden wurde man zuerst durch den Gödelschen Vollständigkeitssatz geführt, durch welchen die Vollständigkeit der Regeln der gebräuchlichen Prädikatenlogik (Prädikatenlogik der ersten Stufe) erwiesen wurde, und an den sich etliche für die Mathematik sehr fruchtbare Überlegungen anschlossen.

Ein großes Gebiet metamathematischer Untersuchungen ohne methodi-

sche Beschränkung wurde ferner durch die in der Schule A. Tarskis gepflegte Modelltheorie eröffnet, die dann noch zu einer Theorie der relationalen Systeme erweitert wurde. Bei diesen Untersuchungen werden mengentheoretische Begriffe stark herangezogen, insbesondere auch die der transfiniten Ordinal- und Kardinal-Zahlen, und zwar nicht nur für die Beweismethoden, sondern auch bei der Bestimmung der zu betrachtenden Gegenstände. So untersucht
A192 man formale Sprachen, | welche Namen für unendlich viele Individuen enthalten, ja sogar für Individuen-Gesamtheiten von beliebig hoher transfiniter Kardinalzahl. Ferner werden auch unendlich lange Satzformeln betrachtet.

174 In dieser Art der mengentheoretisch betriebenen Metamathematik | kommt unter anderem zum Ausdruck, daß der Anspruch des Brouwerschen Intuitionismus, die einzige berechtigte Art der Behandlung der Mathematik zu sein, im allgemeinen keine Anerkennung gefunden hat. Vielmehr wird zumeist die intuitionistische Mathematik neben der üblichen klassischen Mathematik als eine mögliche methodische Variante angesehen. Als solche wird sie auch metamathematisch untersucht, nachdem A. Heyting dem Bedürfnis nach einer genaueren Beschreibung der intuitionistischen Methoden durch Aufstellung eines formalen Systems der intuitionistischen Logik und Arithmetik Genüge leistete.

Anhand dieser von Heyting gegebenen Formalisierung ergab sich auch, daß der methodische Standpunkt des Intuitionismus nicht mit dem von Hilbert für die Beweistheorie intendierten finiten Standpunkt zusammenfällt, wie man es vielfach geglaubt hatte, vielmehr über diesen hinausgeht. Insbesondere zeigte sich dieses daran, daß es gelang, für verschiedene formale Systeme Beweise der Widerspruchsfreiheit mit intuitionistisch zulässigen Methoden zu führen, für welche die finiten Methoden sich als nicht zulänglich erwiesen hatten. Dieser Unterschied in der Tragweite der Methoden beruht darauf, daß die vom Intuitionismus verwendeten Evidenzen nicht nur solche elementarer Anschaulichkeit sind, sondern abstrakte Begrifflichkeit in sich schließen. So wird von Brouwer der Allgemeinbegriff eines Beweises verwendet; und zwar handelt es sich dabei nicht um Beweise nach festen Deduktionsregeln, sondern um inhaltliche Beweise, also nicht um etwas anschaulich Abgegrenztes. Dieser allgemeine Begriff des Beweises wurde dann insbesondere für die Interpretationen des Heytingschen Formalismus angewendet, mittels deren sich (durch eine Umdeutung einiger der geläufigen logischen Operationen) ein sehr einfacher Widerspruchsfreiheitbeweis für den (klassischen) zahlentheoretischen Formalismus ergibt. Freilich geht man mit der Anwendung jenes Begriffes nicht nur über den finiten Standpunkt, sondern

auch über die übliche Mathematik hinaus, welche den Begriff wohl zur heuristischen Überlegung, nicht aber systematisch verwendet. Für die Nachweise von Widerspruchsfreiheit kann man allerdings den Allgemeinbegriff des Beweises durch andere Begriffe der intuitionistischen Mathematik ersetzen, so einerseits durch den Brouwerschen Begriff einer Wahlfolge, d. h. einer unbegrenzten Folge sukzessiver Wertbestimmungen, andererseits – worauf Gödel
A193 aufmerk|sam gemacht hat –, durch den Begriff eines Funktionals, d. h. einer
Funktion, welche ihrerseits Funktionen als Argumente hat.

Mit Hilfe des Begriffes der Wahlfolge läßt sich insbesondere die konstruk-
175 tive Verwendung transfiniter Ordnungszahlen begründen, | indem sich für ge-
wisse elementar beschreibbare Bereiche solcher Ordnungszahlen zeigen läßt, daß jede absteigende Folge von Ordnungszahlen nach endlich vielen Schritten zum Abschluß kommt. – In der Anwendung des Begriffes „Funktional“ geht man auch zu höheren Stufen („Typen“) von Funktionalen über: Funktionale können ihrerseits wieder Argumente von Funktionalen eines höheren Typus sein.

So bieten sich verschiedene Methoden, durch die man den finiten Standpunkt für die beweistheoretischen Überlegungen erweitern kann.

In dem bisher Besprochenen ist eine Richtung der mathematischen Grundlagenforschung noch nicht zur Erwähnung gekommen. Nur beiläufig wurde anfangs gesagt, daß das System der *Principia Mathematica* unnötige Komplikationen enthielt, die dann durch das System der einfachen Stufentheorie beseitigt wurden. Die „Unnötigkeit“ bestand aber hier nur insofern, als eine mit der Anlage des Systems verbundene Zielsetzung, welche in der Gestaltung der „verzweigten Stufentheorie“ zum Ausdruck kam, ohnehin nicht eingehalten wurde, vielmehr durch die nachträgliche Hinzufügung eines „Axioms der Reduzierbarkeit“ im Effekt preisgegeben wurde.

Jene Zielsetzung geht zurück auf eine Kritik an dem Verfahren der Begründung der Analysis (durch Dedekind, Cantor, Weierstraß), wie sie von Seiten einiger französischer Mathematiker geübt wurde – eine Kritik, welche nicht so weit geht wie diejenige durch Kronecker und die spätere durch Brouwer, aber mit diesen beiden Arten der Kritik das gemeinsam hat, daß sie auf eine striktere Art der Arithmetisierung der Theorie des Kontinuums abzielt. Man beanstandet, daß in den Existenzbeweisen der Analysis öfters solche Definitionen („imprädikative Definitionen“) verwendet werden, bei denen Bezug genommen wird auf die Gesamtheit der reellen Zahlen, indem etwa eine Entscheidung danach getroffen wird, ob es eine reelle Zahl von einer gewissen

Eigenschaft gibt oder nicht gibt, während doch im Sinne der Arithmetisierung die Gesamtheit der reellen Zahlen erst aus den möglichen arithmetischen Definitionen hervorgehen soll.

Eine präzisere Fassung der hiermit gestellten Forderung der Prädikativität wurde zuerst wohl von Bertrand Russell gegeben, der sie aber, wie gesagt, nicht konsequent beibehielt. Später kam Hermann Weyl in seiner Schrift *Das*
A194 *Kontinuum*[a] auf die Forderung zurück. Seitdem | wurde auf verschiedenen Wegen eine prädikative Gestaltung der Analysis, bzw. der Mengenlehre unternommen, insbesondere von Leon Chwistek, Frederic B. Fitch, Paul Lorenzen,
176 Hao Wang.[b] |

In der Stellungnahme zu der Forderung der Prädikativität besteht unter den Mathematikern und auch unter den Grundlagenforschern keine Einhelligkeit. Man kann aber hier eine ähnliche vermittelnde Haltung einnehmen, wie es – gemäß dem, was vorhin erwähnt wurde – gegenüber den Forderungen des Intuitionismus geschehen ist: man kann die Möglichkeit einer prädikativen Behandlung der Analysis, d. h. der Theorie der reellen Zahlen und der stetigen Funktionen von einer oder mehreren Variablen würdigen, zugleich aber anerkennen, daß die Mathematik über diese Methoden hinausgeht und daß es für die Untersuchungen in manchen Gebieten angezeigt ist, die Vorstellungen der allgemeinen Mengentheorie zu verwenden, daß insbesondere auch die Idee des Kontinuums nur auf diese Weise eine ausreichende theoretische Behandlung findet.

Zu der Situation in den mathematischen Grundlagenfragen ist vor nicht langem ein neues Moment hinzugetreten durch die Ergebnisse betreffend das Cantorsche Kontinuumsproblem, d. h. die Frage, ob die Kardinalzahl der Menge der Teilmengen der Zahlenreihe, welche zugleich die Kardinalzahl des Kontinuums ist, die nächstgrößere ist nach der Kardinalzahl der Menge der natürlichen Zahlen. Die Annahme, daß dieses zutrifft, heißt die Kontinuumshypothese.

Nachdem zuerst Gödel bewiesen hatte, daß die Kontinuumshypothese im Rahmen der axiomatischen Mengenlehre widerspruchsfrei ist (sofern diese selbst widerspruchsfrei ist), wurde neuerdings von P. Cohen gezeigt, daß durch die axiomatische Mengenlehre die Kardinalzahl des Kontinuums im Bereich der überabzählbaren Kardinalzahlen, bis auf gewisse bekannte Ein-

[a] *Vide* [**?**].
[b] *Vide* ■■■ .

schränkungen, völlig unbestimmt gelassen wird. Dabei handelt es sich freilich um die erwähnte enger gefaßte Form der axiomatischen Mengenlehre, welche deren strikte Formalisierung ermöglicht. Jedoch ist bei dem Kontinuumsproblem, wenigstens bisher, nicht ersichtlich, wie man durch Verzicht auf die verschärfte axiomatische Präzisierung die Möglichkeit einer Entscheidung über die Mächtigkeit des Kontinuums gewinnen kann.

Der hier angetroffene Sachverhalt ist von ähnlicher Art wie derjenige, welcher in der erwähnten Unvollkommenheit der formalisierten Axiomensysteme besteht, wie sie sich in der Existenz von Non-Standard-Modellen äußert.

A195 Die gegebene Beschreibung der Situation in der mathematischen | Grundlagenforschung kann gewiß nicht Anspruch auf Vollständigkeit der Aspekte
177 erheben; sie mag aber als Einleitung dienen zu den nun | folgenden Bemerkungen, die sich auf die verschiedenen Beiträge zu dem Symposium beziehen und welche teils als Erläuterungen gedacht sind, teils die philosophische Diskussion betreffen. Dabei werden sich auch Ergänzungen zu den vorausgehenden Ausführungen ergeben.

Die Reihe der Abhandlungen des Symposiums wurde eröffnet durch diejenige von Abraham Robinson „From a formalist's point of view"[c], worin eine Ansicht vorgelegt wird, welche der Autor selbst nicht mit Bestimmtheit vertritt, aber mindestens zur Diskussion stellt. Die Ansicht besteht darin, daß es unendliche Gesamtheiten *nicht* gibt und daß jede Bezugnahme auf solche strenggenommen sinnlos ist, daß aber andrerseits dieses uns nicht hindern soll, die Mathematik in der klassischen Weise zu betreiben, bei der man von Begriffen des Unendlichen freien Gebrauch macht.

Diese Ansicht ist offensichtlich schon in sich problematisch; sie hat eher den Charakter einer Fragestellung als eines aufklärenden Aspektes. Indem wir uns um eine Klärung bemühen, ist zunächst zu bedenken, daß die Behauptung der Nichtexistenz unendlicher Gesamtheiten jedenfalls nur für die Naturwirklichkeit Geltung hat und daß aus ihrer Anerkennung keineswegs entnommen werden kann, daß die Vorstellung unendlicher Gesamtheiten – wie etwa derjenigen der Gitterpunkte einer (mit Koordinatenachsen und Einheitspunkt versehenen) Ebene – sinnlos ist.

Zuzugeben ist, daß wir keine eigentlich visuelle Vorstellung von unendlichen Gesamtheiten besitzen; aber eine solche besitzen wir auch schon nicht

[c] *Vide* [**?**].

von sehr großzahligen Gesamtheiten, obwohl doch solche nach unserer Erfahrung in der Natur existieren. Die volle visuelle Vorstellbarkeit ist also gar nicht maßgebend für unsere Behauptungen und Annahmen von Existenz, auch im Sinne der Naturwirklichkeit. Andrerseits gibt es Arten eines *repräsentativen Vorstellens*, in welchem Begrifflichkeit und Anschauung vermischt sind und dessen Reichweite schwer abzugrenzen ist. Die Ansicht von der scharfen Trennung von Begriff und Anschauung in unserem Geistesleben, wie sie insbesondere in der Kantischen Philosophie behauptet wird, muß gewiß revidiert werden.

Durch das repräsentative Vorstellen ist insbesondere die Möglichkeit der Überschreitung des Endlichen gegeben. Der Mathematiker, welcher Überlegungen über Unendliches anstellt, denkt gewiß nicht nur in Worten. Insbe-
A196 sondere in der Analysis besitzt das mathematische Ver|fahren eine Art der Anschaulichkeit und Sicherheit, wie sie durch ein bloß verbales Operieren
178 nicht gewonnen werden kann. |

Wenn wir unserer geistigen Erfahrung gerecht werden wollen, so dürfen wir uns nicht mit einem allzu simplen Schema vom Vorstellbaren begnügen. Ebensowenig kommen wir aus mit der Anerkennung von nur einer Art des Objektiven. So sind ja von der Physik aus betrachtet die Sinnesqualitäten etwas bloß Subjektives. Gleichwohl ist eine Farbe als solche etwas objektiv Gegenständliches, und die Beziehungen zwischen den Farben bilden objektive Sachverhalte (von denen es nicht im vornherein ausgemacht ist, inwieweit und in welcher Weise ihnen physikalische oder physiologische Sachverhalte entsprechen). Auch Werke der Dichtkunst und der Musik sind etwas objektiv Gegenständliches, wobei diese Gegenständlichkeit nicht zusammenfällt mit derjenigen einer einzelnen Vorführung, die ja eventuell dem Werke unangemessen sein kann.

In Anbetracht all dessen besteht kein grundsätzliches Hindernis, den mathematischen Objekten eine Gegenständlichkeit sui generis zuzuerkennen. Die Gegenständlichkeit ist diejenige der idealisierten Strukturen, wobei die Idealisierung in einer Vermittlung zwischen Begriff und Anschauung besteht. Daß solche idealisierten Strukturen ihre Eigengesetzlichkeit besitzen, ist gewiß etwas sehr Merkwürdiges, aber doch kaum merkwürdiger als die Tatsache der eminenten Anwendung, welche die Mathematik in der Naturwissenschaft findet.

Der Anstoß, den viele Philosophen und Mathematiker an der Anerkennung einer spezifischen Objektivität der mathematischen Gegenstände, an diesem „Platonismus“ nehmen, beruht wohl größtenteils darauf, daß man sich jene Objektivität in zu weitgehendem Maße analog der Naturwirklichkeit denkt.

Daß die mathematischen Gegenstände und Sachverhalte einen grundsätzlich anderen Charakter haben als diejenigen der Naturwissenschaft, wird in dem Artikel von R. L. Goodstein, „Empiricism in Mathematics“[d] nachdrücklich dargelegt und ersichtlich gemacht.

Wenn andrerseits Goodstein, auf Grund der Verschiedenheit der mathe-
matischen Gegenstände von denen der Naturwirklichkeit, die Mathematik
schlechtweg als ein Spiel (game) erklärt, indem er insbesondere auf die Ge-
meinsamkeiten mit dem Schachspiel hinweist, so ist diese wohl an Wittgen-
stein anknüpfende Kennzeichnung der Mathematik doch schwerlich ausrei-
chend. Die Gemeinsamkeit des Schachspiels und überhaupt der Brettspiele
mit der Mathematik beruht ja nicht darauf, daß wir es hier mit Spielen zu
tun haben, sondern darauf, daß diese Spiele auf Grund einerseits der Brett-
A197 Konfiguration, andrerseits der | Regeln für die Bewegung der Steine einen
179 geometrischen und einen | arithmetischen Charakter besitzen. So knüpfen
sich auch an solche Spiele, insbesondere an das Schachspiel, Feststellungen
und Fragestellungen von durchaus mathematischer Art. Freilich kann man
die Mathematik spielerisch betreiben; doch das ist nicht spezifisch für die
Mathematik; man kann sich ja auch mit anderen Wissenschaften spielerisch
beschäftigen. (Momente des Spielerischen treten ja bei vielen der geistigen
Betätigungen auf, bei denen der Mensch eine gewisse Freiheit besitzt.) Die
Regeln für die mathematischen Verfahren sind aber nicht im Hinblick auf die
Unterhaltsamkeit angelegt, sondern für die Kennzeichnung und das Studium
ausgezeichneter (meist idealisierter) Strukturen. Das Aufstellen der Regeln
gehört selbst mit zur Mathematik.

Speziell mit den Fragen der Mengenlehre befassen sich die Beiträge von Paul Finsler und von Georg Kreisel.

Finsler hebt in seiner Abhandlung „Über die Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese“[e] mit Nachdruck hervor, daß die von Paul Cohen und inzwischen noch auf andere Art von Dana Scott festgestellte Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese im Rahmen der axiomatischen Mengenlehre nur auf Grund der axiomatischen Beschränkung des Begriffes der Teilmenge besteht, d. h. nicht für das Kontinuum (bzw. die Menge der Teilmengen der Zahlen-

[d] *Vide* [**?**].
[e] *Vide* [**?**].

reihe) im *ursprünglichen* Sinne. Finsler spricht in diesem Sinne von einem „formalen Kontinuum“, das nicht alle Eigenschaften des eigentlichen Kontinuums besitzt. Er führt ein Beispiel eines „Hyperkontinuums“ vor, das er ausgehend von der ersten und zweiten Cantorschen Zahlenklasse gewinnt und das mit dem Kontinuum viele Eigenschaften gemeinsam hat, von dem sich aber ziemlich leicht erweisen läßt, daß – im Gegensatz zur Kontinuumshypothese – seine Mächtigkeit nicht die nächste nach derjenigen des Abzählbaren ist. Dieses Beispiel soll zeigen, daß die Möglichkeit, ein „formales Kontinuum“ zu definieren, welches die Kontinuumshypothese nicht erfüllt, nichts Erstaunliches ist.

Freilich ist das Beispiel insofern nicht sehr überzeugend, als das konstruierte Hyperkontinuum sehr deutliche Abweichungen gegenüber dem Kontinuum der Analysis zeigt, während sich für das Kontinuum der axiomatischen Mengenlehre alle die Eigenschaften, die man üblicherweise (unabhängig von der mengentheoretischen Axiomatik) feststellt, beweisen lassen.

Kreisel setzt sich in seinen „Two notes on the foundations of set theory“[f] eingehend mit allen denen auseinander, welche sich entweder überhaupt
180/A198 ablehnend zur Mengentheorie stellen oder Einschränkungen | in den Regeln der Mengenbildung befürworten, insbesondere mit denjenigen, welche aus den Schwierigkeiten betreffend die Kontinuumshypothese Einwände gegen die Mengenlehre oder Argumente für deren Beschränkung entnehmen. Die unbeschränkte Weitherzigkeit, die er dabei vertritt, ist bei ihm nicht etwa, wie bei manchen Mengentheoretikern, verbunden mit einer Geringschätzung der Gesichtspunkte des Konstruktiven. Vielmehr hat Kreisel sich ja selbst eingehend mit finiter und mit intuitionistischer Mathematik sowie auch mit deren genauerer Kennzeichnung befaßt. Um so mehr haben seine Überlegungen auch für diejenigen Gewicht, welche auf die Auszeichnung der konstruktiven Methoden Wert legen.

Zur Diskussion mag die einleitende kurze Darstellung der Anfänge der Mengenlehre Anlaß geben. Nach Kreisels Ansicht erschien den Zeitgenossen Cantors der Mengenbegriff in Anbetracht der sehr verschiedenen Arten seiner Anwendung (auf konkrete Objekte, auf Zahlen, auf geometrische Punkte) als ein Gemisch von Begriffen (mixture of notions). Aus dem Bestreben, einen schärfer bestimmten Allgemeinbegriff der Menge zu gewinnen, erfolgte, dieser Ansicht gemäß, nach einigen unbefriedigenden Ansätzen die Abgrenzung

[f] *Vide* [**?**].

der *cumulative type structure*, womit die entscheidende Abklärung gewonnen wurde.

Freilich bemerkt Kreisel selbst in einer Fußnote, er fühle sich nicht kompetent in der Frage, wie man seinerzeit die Dinge beurteilte. Aus einer freilich gleichfalls nur unvollständigen Kenntnis der einschlägigen Hergänge sei hier doch einiges historisch Ergänzende vorgebracht.

Die Aussonderung der *cumulative type structure* – man spricht in diesem Sinne ja heute auch von *natural models* der Axiome der Mengenlehre – stand in engem Zusammenhang mit der Aufstellung des Fundierungsaxioms, durch welches in der Tat eine Art von Typenstruktur für das System der Mengen gefordert wird. Der Gedanke des Fundierungsaxioms wurde wohl zuerst von D. Mirimanoff gefaßt[3], der anknüpfend daran (ungefähr gleichzeitig mit Zermelo und von Neumann) die independente[4] Theorie der Ordnungszahlen fand.[g]

Mirimanoff wurde zu seinen Betrachtungen durch die mengentheoreti-
A199 schen Paradoxien angeregt. Diese gaben ja auch die Ver|anlassung für Zermelos Aufstellung seines Axiomensystems der Mengenlehre und für Russells Aufstellung seiner Typentheorie.

Der Gedanke der Beschränkung auf solche Mengen, die man, beginnend mit einer Ausgangsmenge (etwa der Menge der natürlichen Zahlen) durch
181 Potenzmengenbildungen, Vereinigungsprozesse und Aussonde|rungen bilden kann, wurde – wie ich aus Erzählungen von Hilbert weiß – seinerzeit auch erwogen; er führte aber zunächst gerade zu einer Verschärfung der Paradoxien, da man die Vereinigungsprozesse nicht genügend deutlich normierte, vielmehr die Zusammenfassung der durch die angegebenen Prozesse gewinnbaren Mengen zu einer Menge ihrerseits als einen zulässigen Vereinigungsprozeß ansah.

Daß man zuerst an der Verschiedenartigkeit der Anwendungen des Mengenbegriffes Anstoß genommen hätte – dazu war doch eigentlich kein Anlaß. Man erachtet doch auch den elementaren Anzahlbegriff, der ja gleichfalls sowohl auf konkrete Dinge wie auf arithmetische und geometrische Gegenstände

[3]Die inhaltliche Voraussetzung, die durch dieses Axiom zum Ausdruck kommt, ist freilich implizite bereits in der intuitiven Mengenvorstellung enthalten.

[4]„Independent“ bedeutet hier, daß die Ordnungszahlen nicht als Abstraktionsklassen von ordnungsgleichen Wohlordnungen eingeführt zu werden brauchen.

---

[g] *Vide* [redacted] .

Anwendung findet, deshalb nicht etwa als ein Gemisch von Begriffen.

Allerdings hat man auch bei der theoretischen Behandlung der Zahlenlehre die Betrachtung einer Struktur (der Zahlenreihe) abgesondert, die als solche rein für sich untersucht werden kann und an die sich dann erst die Anwendung für die Anzahlbestimmungen anschließt. Es ist aber zu beachten, daß die axiomatische Fassung der Zahlentheorie durch Dedekind und Peano, welche die Kennzeichnung der Struktur der Zahlenreihe liefert, erst in einem Stadium erfolgte, als die Zahlentheorie bereits weitgehend entwickelt war.

Entsprechend war ja auch die Mengenlehre schon in einem beträchtlichen Maße durch Cantor ausgebildet, als Zermelo sie axiomatisierte. Und auch mit dieser Axiomatik war die *cumulative type structure*, wie sie Kreisel meint, noch nicht herausgearbeitet. Bis zur Aufstellung des Fundierungsaxioms verging noch fast ein Jahrzehnt, und in diese Zeit fällt das Erscheinen des klassischen Werkes von Hausdorff *Grundzüge der Mengenlehre*[h], welches ja für die neuere Ausgestaltung der Mengenlehre und der mengentheoretischen Topologie wegleitend wurde. Hier aber ist die Mengenlehre ohne Verwendung einer Axiomatik entwickelt. Hausdorff erklärt selbst, er wolle in seiner Behandlung der Mengenlehre „den naiven Mengenbegriff zulassen, dabei aber die Beschränkungen innehalten“, die den Weg zu den mengentheoretischen Paradoxien abschneiden.

Bemerkenswert ist, daß dieses Verfahren auch heute noch in der methodisch nicht beschränkten Metamathematik, d. h. in der Modell|theorie, verwendet wird und auch von Zermelo in seiner modelltheoretischen Untersuchung „Über Grenzzahlen und Mengenbereiche“[i] benutzt wurde.

A200

182 Daß wir einer solchen anschaulichen Handhabung der Mengenlehre | bedürfen, ist verständlich, sofern die Mengenlehre nicht nur eine gewisse Struktur repräsentieren, sondern auch die Methode unseres Denkens über Strukturen liefern soll.

Bemerkung zu der „Discussion“ (S. 101–102):[j]

Angesichts der Beispiele von eingeschränkter Methodik, welche Kreisel hier anführt, könnte mancher Leser denken, daß mit der vorgeschlagenen Konzentration auf ein *relatively restricted system* auch eine jener von Kreisel erwähnten Beschränkungen gemeint sei. Tatsächlich aber handelt es sich

[h] *Vide* [**?**].
[i] *Vide* [**?**].
[j] ■ Zitat/Inhaltsangabe geben?■

nur um eine Abgrenzung gegenüber gewissen Ansätzen von riesigen Unendlichkeiten, welche weit über das hinausführen, womit man üblichermaßen in den mathematischen Theorien zu tun hat. Jene von Kreisel erwähnten eingeschränkten Theorien sind auch von ihm gewiß nur im Sinne einer methodischen Vergleichung angeführt.

Zwei der Abhandlungen aus dem Symposium handeln von der Theorie der „Kategorien“: diejenige von Erwin Engeler und Helmut Röhrl „On the problem of foundations of category theory“ und die von F. William Lawvere „Adjointness in foundations“.[k]

Lawvere ist einer der Ausgestalter der von Eilenberg und MacLane ins Leben gerufenen Theorie der „Kategorien“. Es handelt sich bei dieser um eine allgemeine Theorie der mathematischen Abbildungen.

Der Grundbegriff ist hier die Beziehung $A \xrightarrow{f} B$ d. h. „f bildet A in B ab“. A heißt der „domain“ (Vorbereich), B der „codomain“ (Nachbereich) von f.[5]

Die Grundverknüpfung ist die der Zusammensetzung von Abbildungen $fg = h$, welche immer dann möglich ist, wenn der codomain von f mit dem domain von g zusammenfällt; domain und codomain sind als strukturierte Mengen zu denken; jedoch wird die Elementbeziehung nicht als Grundbeziehung eingeführt. Man spricht schlechtweg von „Objekten“, zwischen denen eine Abbildung stattfindet.

Mit den genannten Begriffen, welche die Abbildungen betreffen, wird der Begriff der *Kategorie* verknüpft. Unter einer Kategorie versteht man hier eine Gattung von Strukturen, wie sie durch die Anforderungen eines abstrakten
A201 Axiomensystems bestimmt wird (d. h. die | Strukturen einer solchen Gattung bilden die Modelle eines Axiomensystems). Die Abbildungen von einem Objekt einer Kategorie in ein anderes solches Objekt werden als „Morphismen“ bezeichnet. Es ist die Absicht, die Strukturen (Kategorien) durch die jeweils in ihnen bestehenden Morphismen zu charakterisieren.

183 Jedoch nicht alle Abbildungen sind Morphismen in einer Kategorie. |
Es gibt auch solche Abbildungen, die von einer Kategorie zu einer anderen führen. Dem wird Rechnung getragen, indem man außer den Morphismen

[5] Die Abbildung braucht nicht eine solche *auf* B zu sein. Der Nachbereich B braucht also nicht mit der Wertemenge von f übereinzustimmen.

[k] *Vide* [?], resp. [?]

auch „Funktoren“ betrachtet. Ein Funktor wird aufgefaßt als eine Abbildung einer Kategorie in eine Kategorie. Die Kategorien erhalten damit die Rolle von Objekten; sie werden angesehen als die Objekte einer „Kategorie der Kategorien“.

Damit gerät man jedoch in Schwierigkeiten; man wird in den Bereich solcher Begriffsbildungen geführt, wie sie zu den mengentheoretischen Paradoxien Anlaß geben. Das ist auch nicht zu verwundern. In der Tat ist ja eine Kategorie eine Gesamtheit nur im Sinne eines Begriffsumfanges, nicht aber eine mathematische Struktur. Es ist daher wohl auch kaum berechtigt, Kategorien als „Objekte“ zu behandeln.

In der Abhandlung von Engeler und Röhrl werden die genannten Schwierigkeiten zur Sprache gebracht, und es wird ein Vorschlag zu ihrer Behebung gemacht, der aber die Autoren selbst nur teilweise befriedigt.

Hier möchte ich einen anderen, wohl einfacheren Vorschlag (freilich nur programmatisch) vorbringen:

1. Als gleichberechtigt mit den Morphismen innerhalb einer Kategorie werden die Abbildungen behandelt, welche zwischen Objekten verschiedener Kategorien stattfinden.

2. Die Funktoren werden ersetzt durch Abbildungen, bei welchen der domain innerhalb einer Kategorie *variabel* ist und welche (im Sinne dieser Variabilität) die Objekte jener Kategorie in solche wieder einer bestimmten Kategorie überführen.

Ein einfaches Beispiel einer Abbildung eines variablen Objektes bildet der Übergang von einer beliebigen Booleschen Algebra zu einem Ring nach der Methode von M. H. Stone.

Das intensive Studium der Abbildungen und der Formen ihrer Zusammensetzungen, wie es in der Theorie der Kategorien ausgeübt wird, hat sich für verschiedene Gebiete der mathematischen Forschung als höchst fruchtbar und erfolgreich erwiesen. Indem wir diese Erfolge würdigen, brauchen wir jedoch nicht der oft mit den Darstellungen der Theorie verbundenen Tendenz
A202 beizupflichten, den geläufigen Element|begriff aus der Mathematik zu eliminieren. Diese Tendenz macht sich in der Weise geltend, daß eine explizite Erwähnung der Elemente von Objekten sowie der Argumentwerte und der Funktionswerte von Morphismen, selbst nur in der Form gebundener Varia-
184 blen, geflissentlich vermieden wird. |

Eine Art von Elementbeziehung wird freilich eingeführt, indem ein spezielles Objekt „1“ postuliert wird von der Eigenschaft, daß für jedes Objekt

A eine und nur eine Abbildung $A \to 1$ existiert, und nun als Elemente eines Objektes C die Abbildungen von 1 in C erklärt werden. Hiernach stellt sich der Wert, den eine Funktion (ein Morphismus) f mit dem domain C und einem codomain D für ein Element a von C (als Argumentwert) hat, durch die Zusammensetzung der Abbildung a von 1 in C mit der Abbildung f von C in D dar, welche ja eine Abbildung von 1 in D, also ein Element von D ergibt. In dieser Beziehung erscheint die Darstellung der Elemente durch Abbildungen als befriedigend. In anderer Hinsicht aber erweist sie sich als unzulänglich: Da ein Element a eines Objektes C als eine Abbildung in C erklärt ist, so wird durch ein solches Element a das Objekt C, als der codomain von a, eindeutig bestimmt; es können also nicht zwei verschiedene Objekte ein Element gemeinsam haben. So kommt die geläufige Struktur der Booleschen Algebra hier gar nicht zustande.

Als Motivierung für die Ausschaltung der üblichen Elementbeziehung wird zuweilen geltend gemacht, daß die Mathematik es nicht mit dem Substantiellen, sondern mit dem Strukturellen zu tun hat. Dieses Argument trifft als Aussage über die Mathematik sicherlich zu. Jedoch die Zugehörigkeit von Elementen zu einem gegenständlichen Ganzen, etwa von Punkten zu einer Punktmenge, ist doch eine strukturelle Beziehung.

Gewiß ist an sich nichts dagegen einzuwenden, daß man eine Theorie der Funktionalität entwickelt, in welcher die Elemente der abgebildeten „Objekte“ nur implicite auftreten. Das allgemeine Verfahren, das dabei zur Anwendung kommt, besteht ja darin, daß man Gegenständlichkeiten, die zunächst als solche der zweiten Stufe (Mengen, Funktionen) auftreten, zu den unmittelbaren Gegenständen einer Theorie macht, wie es ja bereits in der Booleschen Algebra geschieht.

Nur wird durch eine Theorie von dieser Art schwerlich die übliche mengentheoretische Betrachtungsweise für die Mathematik überhaupt entbehrlich gemacht.

Von einer ganz anderen Art einer Theorie der Funktionalität als derjeni-
A203 gen in der Theorie der Kategorien handelt der Beitrag von | Haskell B. Curry „Modified basic functionality in combinatory logic“.[1] Die von ihm aufgestellte typenfreie kombinatorische Logik steht in enger Beziehung zu dem von Alonzo Church entwickelten λ-Kalkül und liefert einen Formalismus der Dar-

[1] *Vide* [**?**].

185 stellung konstruktiver Funktionalität durch | Zusammensetzungen gewisser *atomic combinators*. Da der Wertbereich der Variablen, auf welche die Kombinatoren angewandt werden, zunächst ganz unbeschränkt ist, so stellen die Zusammensetzungen der Kombinatoren nicht ohne weiteres eine sinnvolle Funktionalität dar. Generell ergibt sich die Frage nach dem funktionalen Charakter der kombinatorischen Ausdrücke.

Die Funktionalitätseigenschaften kombinatorischer Ausbrüche sind in dem Lehrbuch der kombinatorischen Logik von Curry & Feys eingehend erörtert. Die vorliegende Abhandlung bringt zu den diesbezüglichen Ausführungen jenes Buches gewisse vereinfachende Modifikationen und gewisse Ergänzungen im Hinblick auf die neueren Anwendungen der Funktionale in der mathematischen Grundlagenforschung. Insbesondere beweist hier Curry einen Satz des folgenden Inhalts: Wenn für gewisse „atomische" Kombinatoren der funktionale Charakter gegeben ist, so läßt sich für jeden aus diesen gebildeten kombinatorischen Ausdruck entscheiden, ob er einen funktionalen Charakter besitzt, und im positiven Falle läßt sich dieser Charakter bestimmen.

Seine generellen Ansichten über die Mathematik hat Curry anderwärts mehrfach auseinandergesetzt: in seiner Schrift *Outlines of a formalist philosophy of mathematics*, ferner in seinen Notre Dame Mathematical Lectures und in dem vorhin erwähnten Lehrbuch *Combinatory Logic*.[m]

Curry erklärt die Mathematik als die Wissenschaft von den formalen Systemen. Unter einem formalen System versteht er dabei eine formalisierte Theorie, für welche durch Festsetzungen bestimmt wird, wie die Sätze mit Hilfe von Prädikatoren aus Termen und die Terme aus primitiven Termen mittels Operatoren gebildet werden, und ferner, welche Sätze als „elementare Theoreme" gelten. So wie die Terme aus den primitiven Termen rekursiv durch Anwendungen der Operatoren gewonnen werden, so werden die elementaren Theoreme rekursiv aus „Axiomen" durch Anwendung von Ableitungsregeln gewonnen, wobei die Axiome gewisse schlechtweg als gültig postulierte Sätze sind. Die Feststellung der elementaren Theoreme als solcher rechnet Curry noch zu dem formalen System, im Unterschied von den weitergehenden Feststellungen über das System, den „$\varepsilon\pi\iota$-Theoremen".

A204 Im ganzen unterscheiden sich diese Begriffsbildungen nicht erheblich | von denen der Hilbertschen Beweistheorie. Während aber diese als eine zusätzliche Unternehmung zu der vorhandenen Mathematik gedacht ist, stellen nach der

[m] *Vide* [**?**], [**?**].

Auffassung Currys die formalen Systeme überhaupt das Thema der Mathe-
186 matik dar. Es ist dabei nicht die Meinung, daß | man ein formales Gesamtsystem der Mathematik gewinnen könne. Vielmehr hebt Curry hervor, das Wesentliche der Mathematik liege nicht in einer speziellen Art formaler Systeme, sondern in formaler Struktur als solcher.

Mit dieser Formulierung kann man generell auch von einem nichtformalistischen Standpunkt einverstanden sein, sofern man unter formaler Struktur nicht nur die Strukturen formaler Systeme von der eben beschriebenen Art, sondern allgemein idealisierte Strukturen versteht. Strukturen sind es ja in der Tat, wovon die mathematischen Untersuchungen handeln.

Die Strukturen der formalen Systeme aber interessieren uns nur mittelbar. Diese Systeme dienen ja dazu, mathematische Theorien auf eine Form zu bringen, welche für die beweistheoretische Betrachtung geeignet ist.[6] Mathematik aber ist doch gewiß nicht erst da vorhanden, wo diese Form der Theorien hergestellt ist.

Unter dem beweistheoretischen Aspekt allerdings können zumindest die meisten der mathematischen Theorien als Entfaltungen je eines formalen Systems dargestellt und betrachtet werden.

Gemeinsam ist den formalen Systemen ein zahlentheoretischer Charakter, der auf ihrem rekursiven Aufbau beruht. Dieser äußert sich insbesondere in der Anwendbarkeit des Gödelschen Numerierungsverfahrens, durch welches den Formeln einer formalisierten Theorie sowie auch den Formelfolgen natürliche Zahlen als ihre Nummern zugeordnet werden.[7] Dieses Verfahren enthält jeweils viele Momente willkürlicher Wahl, so daß verschiedene Numerierungen zu einem und demselben System gehören. Andererseits gibt es auch für eine und dieselbe mathematische Theorie verschiedene Formalisie-
A205 rungen, die durch | manchmal einfache, manchmal kompliziertere Übergänge ineinander überführbar sind.

[6]Für die beweistheoretischen Betrachtungen sieht man sich übrigens veranlaßt – wie auch Curry erwähnt – unter Umständen den Rahmen des formalen Systems zu sprengen und zu „halbformalen“ Systemen überzugehen.

[7]Beiläufig sei darauf hingewiesen, daß die allgemeinere Methode der Gödel-Numerierung, wie sie in den *Grundlagen der Mathematik* (*vide* [?], pp. ■) angewendet wird, der allgemeinen Art der formalen Systeme bei Curry entspricht, während die übliche speziellere Methode, welche sich auf die Aufeinanderfolge der Zeichen in einer Formel stützt, jener Art formaler Systeme angepaßt ist, welche Curry als „logistische Systeme“ bezeichnet.

Man kann sich daher fragen, inwieweit sich für je zwei formale Systeme anhand der (nach einem gemeinsamen Verfahren ausgeführten) Gödelnumerierung erkennen läßt, ob sie die gleiche Theorie oder verschiedene zur formalen Darstellung bringen.

Eine Untersuchung in dieser Richtung wurde von John Myhill angestellt. Diese geht aus von der Kennzeichnung eines formalen Systems durch die Menge der Gödelnummern der beweisbaren Formeln. Myhill zeigt, daß für je zwei formale Systeme, welche beide eine gewisse Bedingung erfüllen, die auf
187 ein Mindestmaß der Ausdrucksfähigkeit | hinauskommt, die kennzeichnenden Zahlenmengen sich mittels eines effektiven Rechenverfahrens, welches eine Permutation der Zahlenreihe liefert, umkehrbar eindeutig aufeinander abbilden lassen.

Sieht man nun daraufhin je zwei formale Systeme, welche die genannte Bedingung erfüllen, als gleichberechtigt an, so ergibt sich etwas Paradoxes: Unter den Systemen, welche jener Bedingung genügen, sind einerseits sehr elementare zahlentheoretische Systeme, für welche sich in finiter Weise die Widerspruchsfreiheit erkennen läßt, andererseits aber auch die viel stärkeren formalen Systeme der Analysis und der Mengenlehre, so wahr diese widerspruchsfrei sind.

Dieses Ergebnis ist gewiß so zu deuten, daß die effektive umkehrbar eindeutige Abbildbarkeit der Mengen der Gödelnummern der beweisbaren Formeln für zwei formale Systeme nicht als hinlängliches Kriterium der Gleichberechtigung dieser Systeme gelten kann, und es fragt sich, wie wohl eine Verschärfung der Anforderung an die umkehrbar eindeutige Abbildung zu wählen ist, damit dadurch ein angemessenes Kriterium der Gleichberechtigung formaler Systeme gewonnen wird.

Diese Frage wird von Frau Marian Boykan Pour-El in ihrem Beitrag zu dem Symposium „A recursion-theoretic view of axiomatizable theories“[n] behandelt, worin sie einen Bericht gibt über neuere Untersuchungen betreffend die Beziehungen zwischen „rekursiv aufzählbaren“ (d. h. durch Kombination von elementaren Prozessen erzeugbaren) Zahlenmengen und formalisierten Theorien.

In einer gemeinsam von Frau Pour-El und Saul A. Kripke verfaßten Ab-

[n] *Vide* [**?**].

handlung wurde die Kennzeichnung solcher effektiver Abbildungen zwischen formalen Systemen angestrebt, welche die Beweisstruktur erhalten. Als ei-
A206 ne Bedingung für diese Erhaltung wird hier zunächst | gefordert, daß nicht nur die Beweisbarkeit, sondern auch Implikation und Negation erhalten bleiben. Es zeigt sich aber, daß diese Forderung noch nicht genügt, um mittels der Abbildungen eine angemessene Charakterisierung der Gleichberechtigung formaler Systeme zu erhalten. Es bleibt also hier noch eine Problematik bestehen. Einige genauere Problemstellungen in dieser Hinsicht werden von Frau Pour-El formuliert.

Der Beitrag von Richard Montague führt uns in das Gebiet der Semantik. Unter Semantik versteht man in der mathematischen Grundlagenforschung
188 und auch in der Schule des logischen Empirismus die | Untersuchungen, welche sich auf die Interpretationen von Formelsprachen beziehen, wie diese für die Formalisierung axiomatisch-deduktiver Systeme verwendet werden. Dabei erfolgen die Interpretationen mittels der mengentheoretischen Begriffsbildungen.

Im Falle einer formalen Sprache der ersten Stufe, mit nur einer Gattung von Individuenvariablen und von Individuenkonstanten und ohne Symbole mathematischer Funktionen, geschieht die Interpretation so, daß man einen Bereich (eine Menge) von Individuen zu Grunde legt, ferner jeder Individuenkonstanten je ein Element des Individuenbereiches und jedem Prädikatensymbol mit einer Anzahl k von Argumenten je eine Menge geordneter k-tupel von Elementen des Individuenbereiches zuordnet. Ein k-stelliges Prädikaten-Symbol wird nun interpretiert durch ein k-stelliges Prädikat, welches auf ein k-tupel von Elementen des Individuenbereiches dann und nur dann zutrifft, wenn dieses der Menge von k-tupeln angehört, welche dem Symbol zugeordnet ist.

Auf Grund hiervon können nun die Begriffe der Erfüllung und der Erfüllbarkeit einer Formel im Sinne der üblichen Deutung der logischen Zeichen &, $\vee$, $\neg$, $\bigwedge x$, $\bigvee x$ (und, oder, nicht, für alle x, es gibt ein x so daß) rekursiv definiert werden:

Bei einer Primformel, d. h. einer Formel ohne logische Zeichen, die somit bloß aus einem Prädikatensymbol mit k Argumenten besteht, welche entweder Variablen oder Konstanten sind, versteht man unter einer *Erfüllung* eine Ersetzung der (als Argumente auftretenden) freien Individuenvariablen durch je ein Element des Individuenbereiches, derart, daß diese Elemente zusammen mit denen, welche den (als Argumente auftretenden) Individu-

enkonstanten zugeordnet sind, ein k-tupel ergeben, welches der Menge von k-tupeln angehört, die dem Prädikatensymbol zugeordnet ist. Man spricht auch dann von Erfüllung der Primformel, wenn alle k Argumente Konstan-
A207 ten sind, deren zu|geordnete Elemente ein k-tupel ergeben, welches der dem Pradikatensymbol zugeordneten Menge angehört.

Eine Erfüllung einer Konjunktion A & B von Formeln A, B besteht aus einer Erfüllung von A und einer Erfüllung von B, bei welchen die gemeinsam in A und B auftretenden Individuenvariablen die gleiche Ersetzung erhalten.

Die Negation $\neg A$ von einer Formel A wird erfüllt durch eine Ersetzung der freien Variablen, bzw. (wenn keine solche vorhanden sind) ohne Ersetzung, dann und nur dann, wenn die Formel A durch die Ersetzung, bzw. ohnehin,
189 nicht erfüllt ist. |

Eine Erfüllung einer Formel $\bigvee x A(x)$ („es gibt ein x, so daß $A(x)$“) besteht in einer Erfüllung einer Formel $A(b)$, wobei b eine beliebige nicht in $A(x)$ auftretende freie Individuenvariable ist.

Hiermit ist Erfüllung bereits für beliebige Formeln erklärt, da sich die logischen Verknüpfungen $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, sowie die Allheit durch Konjunktion, Negation und den Existenzoperator $\bigvee$ ausdrücken lassen.

Eine Formel heißt *erfüllbar*, wenn es für sie eine Erfüllung gibt.

Für eine Formel ohne freie Variablen kommen bei gegebener Interpretation der Formelsprache nur die Möglichkeiten in Betracht, daß sie (ohnehin) erfüllt ist oder daß ihre Negation erfüllt ist; je nachdem heißt sie „wahr“ (zutreffend) oder „falsch“ (unzutreffend).

Alle diese Begriffe sind bezogen auf die verwendete Interpretation, d. h. auf den zu Ggrunde gelegten Individuenbereich und die gewählten Zuordnungen.

In der Semantik wird aber auch ein erweiterter Begriff der Erfüllbarkeit gebraucht, bei welchem die Prädikatszeichen als Variablen behandelt werden. Die Interpretation wird dann als wählbar genommen, und man erklärt eine Formel als erfüllbar, wenn sie bei geeigneter Interpretation erfüllbar (im vorherigen engeren Sinne) ist.

Man kann nun von diesen Begriffen mannigfaltige Anwendungen machen. Zunächst läßt sich feststellen, daß man aus zutreffenden Formeln durch Anwendungen der Regeln des Logik-Kalküls stets wieder zutreffende Formeln erhält, und zwar gilt dieses für jede Interpretation. Insbesondere folgt hiernach, daß jede beweisbare Formel des Logik-Kalküls (der ersten Stufe) bei jeder der betrachteten Interpretationen zutreffend ist. Daß auch umgekehrt, im Rahmen der Logik der ersten Stufe, jede Formel von dieser Eigenschaft durch den logischen Kalkül beweisbar ist, wird durch den Gödelschen Vollständigkeitssatz ausgesagt.

Man betrachtet ferner die im Rahmen der ersten Stufe formalisierten
A208 | Axiomensysteme. Für ein solches bilden diejenigen Interpretationen, für welche die Axiome sowie gegebenenfalls die gemäß den Axiomenschematen gebildeten Formeln wahre Formeln sind, die „Modelle“. Die gültigen Sätze der formalisierten Theorie sind diejenigen, die sich durch Formeln darstellen, welche für jedes Modell des Axiomensystems zutreffend sind. Daß jede Formel für einen (in diesem Sinne) gültigen Satz aus den formalisierten Axiomen mittels des Logik-Kalküls herleitbar ist, ergibt sich wiederum aus dem Vollständigkeitssatz. Mit anderen Worten besagt dieses, daß jeder durch eine
190 Formel der formalisierten | Theorie darstellbare, aber nicht aus den Axiomen ableitbare Satz durch ein Modell widerlegt werden kann, für welches die ihn darstellende Formel unzutreffend ist.

Alle diese Sachverhalte erhalten erst mittels der eingeführten semantischen Begriffe ihre genaue Formulierung. Obwohl diese Begriffe sich auf die Logik der ersten Stufe beziehen, führt ihre Definition und Anwendung doch über die erste Stufe hinaus; insbesondere ist der erweiterte Begriff der Erfüllbarkeit einer Formel ein Begriff der Logik der zweiten Stufe.

Die besprochenen Überlegungen der Semantik betreffen alle die extensionale Logik, mit der man ja für die mathematischen Beweisführungen auskommt. In seiner Abhandlung „Pragmatics and Intensional Logic“[o] geht nun Richard Montague darauf aus zu zeigen, daß die Methoden der Semantik sich auch auf solche formalisierten Sprachen anwenden lassen, welche über die extensionale Logik hinausführen und daß insbesondere auch die Begriffe der Erfüllung einer Formel und der des Zutreffens sich für solche formalisierte Sprachen definieren lassen.

Montague behandelt verschiedene formale Sprachen, die er teils als pragmatische, teils als intensionale bezeichnet.

Die pragmatischen Sprachen werden charakterisiert durch das Vorkommen solcher Ausdrucksmittel, deren Interpretation die Kenntnis von Bezugs-Daten *(points of reference*, nach der Bezeichnung von Dana Scott) erfordert.

Solche Ausdrucksmittel sind insbesondere Zeitbestimmungen, z. B. durch

[o] *Vide* [**?**].

das Wort „jetzt“ oder durch eine Zeitform der Konjugation. Unter intensionalen Sprachen werden solche verstanden, in denen Ausdrücke für Modalitäten oder für Stellungnahmen von Personen zu Behauptungen, wie „B ist der Ansicht, daß … “, auftreten.

Die Methode der Interpretation ist für pragmatische und intensionale Sprachen eine gemeinsame: Es wird eine Parametermenge zu Grunde gelegt;
A209 jeder Wert des Parameters bestimmt, je nach der Art der Sprache, | ein Bezugsdatum oder eine „mögliche Welt“, und jede Interpretation erfolgt in Abhängigkeit von dem Wert des Parameters. Hierfür wird insbesondere jedem Parameterwert eine Menge von Individuen zugeordnet.

Die Durchführung dieses Ansatzes zur Definition der semantischen Begriffe wird für die betrachteten formalen Sprachen genau beschrieben.

191 Freilich mag es scheinen, daß die Anwendung dieses Verfahrens | für den wissenschaftlichen Gebrauch manche Problematik hat. Pragmatische Sprachen werden doch in der Wissenschaft vor allem für empirische Forschungen verwendet, für welche die Behandlung in der Art einer formalisierten axiomatischen Theorie im allgemeinen nicht angemessen ist. Insbesondere erscheint es als sehr gezwungen, daß jedem Zeitpunkt ein Individuenbereich zugeordnet wird. Erst recht erscheint eine solche Zuordnung in Bezug auf mögliche Welten als fragwürdig. Wir wissen ja nicht einmal, ob bei der wirklichen Welt in einer bestimmten Weise von einer Gesamtheit der Individuen gesprochen werden kann. So kann wohl die von Montague beschriebene Methode der erweiterten Semantik nur für gewisse Arten von Überlegungen Verwendung finden, bei denen man mit sehr starken Schematisierungen auskommt.

Leider können diese Fragen mit dem Autor selbst nicht mehr diskutiert werden, da er nicht mehr am Leben ist. Doch hat er in seinem Artikel verschiedene Fachgenossen genannt, mit denen er die Fragen besprochen hat.

Eine extreme Ansicht wird von Eduard Wette in seiner Abhandlung „Vom Unendlichen zum Endlichem“[p] vertreten. Er behauptet hier, daß es möglich sein sollte, Formalismen der klassischen Mathematik und sogar solche der Zahlentheorie als widerspruchsvoll zu erweisen. Er hat diesen Gedanken weiter verfolgt und in verschiedenen Abhandlungen und Vorträgen von seinen Überlegungen berichtet.

Die Widersprüche, zu denen er gelangt, sind freilich nicht von der Art

[p] *Vide* [**?**].

der bekannten mengentheoretischen Paradoxien, die sich ja verhältnismäßig leicht, manche sogar ganz populär darstellen lassen. Die Beweise, um die es sich bei Wette handelt, sind höchst kompliziert, sie werden von ihm nur beschrieben, nicht eigentlich vorgeführt. Diese Beschreibung gibt keine hinlängliche
A210 Handhabe für eine genaue Prüfung.[1*] | Und obwohl die Ausführungen Wettes einen starken Eindruck geben von seiner intensiven Gedankenarbeit, seiner Beschlagenheit in grundlagentheoretischen Techniken und seiner Sorgfalt in den Einzelheiten, so ist doch bei den sehr umfänglichen Überlegungen die Möglichkeit eines Versehens nicht auszuschließen. Verdächtig ist in dieser Beziehung, daß es bei dem Widerspruch in der axiomatischen Mengenlehre nicht sein Bewenden hat, daß vielmehr Wette durch die Verfolgung seiner Gedankengänge dazu geführt wird, auch die Analysis und sogar die Zahlentheorie, wie schon erwähnt, als widerspruchsvoll zu erklären.

192 Mit der Analysis und der Zahlentheorie kommen wir auf Gebiete, | in denen unsere geistige Erfahrung uns ein hinlängliches Vertrauen verschafft hat.

Man kann freilich geltend machen, daß die Voraussetzungen, die in den Formalisierungen der klassischen Analysis implizite enthalten sind, in den tatsächlichen Beweisen der Theorien nur zum kleineren Teil zur Verwendung kommen und daß formal engere Abgrenzungen möglich sind, welche für die Beweisführungen der vorhandenen Theorien ausreichen, so daß unser durch geistige Erfahrung erlangtes Vertrauen sich eigentlich gar nicht auf die volle Formalisierung der Analysis bezieht. Vorschläge für derartige engere Abgrenzungen sind von P. Lorenzen und G. Kreisel gemacht worden. Nach den Behauptungen Wettes würden aber auch solche Abgrenzungen nicht genügen, um das Auftreten von Widersprüchen auszuschließen.

Daß diese extremen Konsequenzen der Überlegungen Wettes ihm selber diese nicht verdächtig machen, erklärt sich dadurch, daß er in diesen Ergebnissen eine Bestätigung seiner philosophischen Ansichten erblickt, auf Grund deren er gegen die üblichen Methoden der Mathematik, insbesondere gegen die Anwendung indirekter Schlußweisen und gegen das Operieren mit dem Unendlichen, opponiert.

In der Opposition, welche Wette im Namen eines strikten Finitismus gegen die indirekten Schlüsse richtet, geht er über Hilberts finiten Stand-

[1*] Eher schon könnte eine Prüfung ansetzen bei der inzwischen erschienenen Abhandlung „Contradiction within pure number theory because of a system-internal ‚consistency'-deduction" [**?**].

punkt und erst recht über den Brouwerschen Intuitionismus hinaus. Vom finiten Standpunkt und ebenso von Brouwer werden indirekte Schlüsse nur da beanstandet, wo sie zur Begründung positiver Behauptungen (Existenzbehauptungen) dienen sollen, nicht aber als Mittel für Unmöglichkeitsbeweise oder überhaupt zur Widerlegung von Annahmen. Wette sieht aber auch eine solche Anwendung indirekter Schlüsse als „problematisch“ an, wie er das gleich am Anfang seiner Abhandlung „Vom Unendlichen zum Endlichem“ in einer Auseinandersetzung mit dem Gödelschen Unableitbarkeitssatz zum
A211 Ausdruck bringt. |

An manchen Stellen klingt es so, als ob er meine, mit seinen Überlegungen in Gegensatz zu diesem Theorem gelangt zu sein.[8]

Tatsächlich ist aber der Gödelsche Beweis seines Unableitbarkeitstheorems gar kein indirekter.[9] Es wird ein Verfahren angegeben, um für ein formales System F, das gewisse Vorbedingungen erfüllt, aus einem vorgelegten, in F selbst geführten Beweis der Widerspruchsfreiheit von F einen Widerspruch in F herzuleiten. Die dabei von F zu erfüllenden Vorbedingungen sind solche der Ausdrucksfähigkeit, der deduktiven Stärke und des strikt formalen Charakters. Dagegen wird zunächst nicht die Voraussetzung benutzt,
193 daß das System F widerspruchsfrei sei. | Erst durch eine nachträgliche Kontraposition folgert man, daß im Falle der Widerspruchsfreiheit des Systems F kein im Rahmen von F vollziehbarer Beweis der Widerspruchsfreiheit von F vorgelegt werden kann.

Doch schon ohne Anwendung dieser Kontraposition erhält man das Resultat; wenn ein formales System F den erwähnten Vorbedingungen genügt, so gewinnt man aus einem in F selbst geführten Widerspruchsfreiheitsbeweis in F die Herleitung eines Widerspruchs in F.

Gerade auf diesem Prinzip beruhen nun die Beweisführungen, mit denen Wette behauptet, die Widersprüchlichkeit der formalen Systeme der klassischen Mathematik zeigen zu können. Aus diesen Beweisführungen kann sich daher jedenfalls keine Unstimmigkeit mit dem Unableitbarkeitssatz ergeben. Auch dürfte auf diesem Wege schwerlich die Ablehnung der indirekten Schlüsse zu begründen sein.

Was andererseits Wettes Kritik an dem Operieren mit dem Unendlichen

[8] Vgl. die Bemerkungen in *Dialectica* 24, 4 auf S. 315, Zeile 14–16 und S. 316, Zeile 22–24. ■ seitens der Hrsg. anführen?■

[9] Indirekt nennt man einen Beweis, bei dem eine Annahme eingeführt wird, die sich anhand des Beweises als unzutreffend herausstellt.

betrifft, so argumentiert er hier unter Berufung auf die Formalisierbarkeit der mathematischen Theorien und die Endlichkeit der symbolischen Formeln. In einem neueren Vortrag „On new paradoxes in formalized mathematics“ (Madison, Wisconsin, 1970)[q] sagt er: *“Is it not a magnificent joke of history that our symbolism tries bona fide to express each theorem on mathematical infinities and logical generalizations in the form of a string which is finite as well as particular?“*

Auf diese Frage läßt sich entgegnen, daß die einzelne Satzformel, welche die Aussage eines Theorems formalisiert, nicht für sich isoliert dieses leistet, sondern im Rahmen des jeweiligen formalen Systems, d. h. in Verbindung mit
A212 den Ausgangsformeln des Systems und seinen | Deduktionsregeln. Auf diese Weise entspricht einer jeden Formel des Systems ihre „Folgerungsmenge“, d. i. die unbegrenzte Menge der aus ihr ableitbaren Formeln. Es kommt hierin die zahlentheoretische Struktur der formalen Systeme zur Geltung, die ja in der Anwendbarkeit des Gödelschen Numerierungsverfahrens ihren deutlichen Ausdruck findet.

Man mag sich grundsätzlich fragen, warum wir uns in der Mathematik, wenigstens in der Arithmetik, nicht auf einen endlichen Rahmen beschränken. Hierauf ist die Antwort, daß das Unendliche in wesentlicher Beziehung einfacher ist als das vielzahlige Endliche. Ein Kreis ist viel einfacher zu kennzeichnen als ein approximierendes eingeschriebenes Polygon mit vielen Ecken. Eine Zahlentheorie in einem beschränkten Zahlenbereich erfordert etliche Kom-
194 plikationen. Überdies: Wie | sollte die Abgrenzung des Bereiches getroffen werden? Lassen wir sie beliebig, dann benutzen wir bereits wieder eine allgemeine Zahlenvariable als Parameter für die möglichen Abgrenzungen.

Nehmen wir aber eine bestimmte Abgrenzung, so ist deren Wahl mit einer unzuträglichen Willkür behaftet. Auch vom Standpunkt der Anwendungen ist das Verfahren problematisch: Wohl finden wir in der Physik Beschränkungen in den Größenordnungen, aber keine scharfe Grenze. Und wissen wir denn überhaupt, ob unsere heutige theoretische Physik alle möglichen Anwendungen der Mathematik umfaßt? Die Wissenschaft ist doch bei weitem nicht an einem Ende angelangt! Beiläufig: Endliche Geometrien (Geometrien mit nur endlich vielen Punkten), für welche die Euklidische Geometrie als

[q] *Vide* [**?**].

Näherung gelten kann, hat man konstruiert.[10,r]

Eine Fragestellung, sozusagen in entgegengesetzter Richtung, ist diejenige, ob die zahlentheoretische Struktur der formalen Systeme bei der Formalisierung der Analysis und der Mengenlehre nicht in einem Mißverhältnis steht zu dem Auftreten der überabzählbaren Mengen in diesen Theorien und ob dieses Mißverhältnis nicht schuld ist an den Schwierigkeiten, die sich in den früher erwähnten Feststellungen über die Existenz von Non-Standard-Modellen der formalisierten Theorien sowie über die formale Unentscheidbarkeit der Kontinuumshypothese zeigen.

In der neueren Grundlagenforschung sucht man jenem Mißverhältnis zu begegnen, indem man in den formalen Systemen einerseits unendliche Aus-
A213 drücke (nach Analogie der unendlichen Summen und Produkte | in der Analysis), andererseits überabzählbar viele Konstanten zuläßt. Ob auf diesem Wege die genannten Schwierigkeiten überwunden werden können, ist wohl zu bezweifeln. Jene Schwierigkeiten dürften vielmehr der Ausdruck dafür sein, daß die Mathematik in der Potentialität ihrer Begriffsbildungen durch kein formales System erschöpft wird – so wie ja schon an einer früheren Stelle bemerkt wurde, daß die axiomatische Mengenlehre nicht die anschauliche Handhabung der mengentheoretischen Vorstellungen als Methode unseres Denkens über Strukturen voll ersetzen kann.

[10] Derartige Geometrien sind von G. Järnefelt, P. Kustaanheimo und B. Qvist betrachtet worden.

[r] *Vide* ■■■).