Bernays Project: Text No. 29

Vorwort[†] (1974)

Preface

(*Abhandlungen*, S. vii–x)

Avii | Von der Wissenschaftlichen Buchgesellschaft wurde mir das freundliche Anerbieten gemacht, meine in Zeitschriften veröffentlichten Aufsätze zur Philosophie der Mathematik gemeinsam in einem Sammelband zu publizieren. Gern nehme ich diesen Vorschlag an, zumal da mehrere der in Betracht kommenden Abhandlungen nur schwer zugänglich sind.

Der vorliegende Sammelband kann auch als vorläufiger Ersatz für eine zusammenfassende Behandlung der Philosophie der Mathematik[1] dienen, insbesondere, da meine Ansichten über die einschlägigen Fragen in dem Zeitraum, in welchen die in den Band aufgenommenen Publikationen fallen, sich fast nur insoweit gewandelt haben, als es durch die in der mathematischen Grundlagenforschung gewonnenen neuen Einsichten bedingt wurde.

Aus der Vereinigung der verschiedenen Abhandlungen dürfte sich für den Leser eine hinlängliche Kennzeichnung der vertretenen Ansichten über die Mathematik ergeben.

Insbesondere in Hinsicht auf das, was man die „Grundlagenkrisis" der Mathematik genannt hat, wird es – wie ich hoffe – ersichtlich sein, daß nach meiner Auffassung hier berechtigterweise nicht von Krisis in dem Sinne gesprochen werden kann, als ob die klassische Mathematik als fragwürdig erwiesen worden sei. Problematisches hat sich freilich in verschiedener Richtung ergeben.

Zunächst einmal ist man sich bewußt geworden, daß die Vorstellung von der Selbstverständlichkeit der Mathematik nicht berechtigt ist, sofern wir

[†]The last line reads:
Zürich, im Dezember 1974 Paul Bernays

[1]Eine solche schon seit längerem beabsichtigte (aber vorerst noch ausstehende) Monographie soll bei dem Verlag Duncker & Humblot erscheinen.

nicht unter dem Selbstverständlichen bloß das verstehen, was uns durch Gebrauch und Übung vertraut geworden ist. Eine solche Vertrautheit können auch Vorstellungen erlangen, die an sich nicht trivial sind, und wir können im Gebrauch solcher Vorstellungen praktische Sicherheit gewinnen. Die Idee einer absoluten Sicherheit ist vermutlich für das menschliche Denken überhaupt illusorisch.

Aviii Das Hinausgehen über das Triviale findet sich insbesondere bei all | den Idealisierungen, die für die mathematische Begriffsbildung charakteristisch sind. Man ist sich darüber klargeworden, daß bereits der Allgemeinbegriff der natürlichen Zahl und der daran sich knüpfende Begriff der Zahlenreihe auf einer Idealisierung beruht.

Hier macht sich auch bereits eine Opposition geltend, welche eine Einschränkung der Beweismethoden verlangt. So wird in der eingeschränkten Methodik des Brouwerschen „Intuitionismus" sowie bei derjenigen des „finiten" Standpunktes, wie ihn Hilbert nannte, die Schlußweise vermieden, wonach ein Zahlenprädikat entweder auf alle Zahlen zutrifft, oder sonst mindestens eine Zahl existiert, auf die es nicht zutrifft. Erst recht wird hier diese Art der Anwendung des „tertium non datur" vermieden in Bezug auf Prädikate von Mengen und von Funktionen. Aber selbst bei solch eingeschränkter Methodik geht man in den rekursiven Erzeugungen von Funktionen über das konkret rechnerisch Durchführbare hinaus.

Die Vermeidung der genannten Anwendung des „tertium non datur" macht sich übrigens für die elementare Zahlentheorie noch nicht wesentlich geltend. Für die Analysis aber bedeutet sie eine erhebliche Einschränkung.

Was die klassische Analysis betrifft, so war es anfangs die Meinung, daß mit deren Begründung nach den Methoden von Dedekind und Cantor eine restlose Arithmetisierung erreicht worden sei. Bald aber wurde unter dem Gesichtspunkt der Forderung einer strikten Arithmetisierung die klassische Analysis kritisiert. Und diese Kritik verstärkte sich unter dem Einfluß der Anforderungen der finiten bzw. intuitionistischen Methodik. Im Rahmen der mathematischen Grundlagenforschung wurden dann verschiedene Programme für eine strikter arithmetische Behandlung der Analysis entwickelt.

Es wäre ungerecht, nicht anzuerkennen, daß diese verschiedenen Arten einer stärker arithmetisierten Analysis durchaus ihr mathematisches Interesse besitzen. Andererseits aber sollte zugestanden werden, daß es ein Vorurteil ist zu meinen, daß die Analysis unbedingt restlos arithmetisiert werden müsse. Bei der Analysis handelt es sich um die begriffliche Präzisierung geometrischer Vorstellungen. Durch die erwähnten Methoden von Dedekind und

Cantor wird eine Anknüpfung an die Zahlentheorie erreicht, wobei aber noch *mengentheoretische* Begriffe hinzutreten. Wenn man sich darüber im klaren ist, daß diese Begriffe nicht restlos arithmetisch sind, so hat das Verfahren nichts Anstößiges.

Gewiß enthalten die Methoden der klassischen Analysis starke Idealisie-
Aix rungen. Diese beeinträchtigen aber nicht die praktische Sicher|heit. Tatsächlich wird ja hier eine Art von Anschaulichkeit gewonnen, die den Überlegungen eine große Sicherheit verleiht. –

Eine Problematik ist ferner entstanden im Zusammenhang mit der Entdeckung der Formalisierbarkeit der mathematischen Beweise anhand der symbolischen Logik. Diese Formalisierung kann ja als eine Verschärfung des axiomatischen Verfahrens angesehen werden. Es gelang auch, für die Disziplinen der Zahlentheorie, der Analysis und der Mengenlehre formale Systeme, bestehend je aus einer Symbolik und aus Regeln des Deduzierens, so aufzustellen, daß im Rahmen eines solchen Systems die bekannten Beweise der betreffenden Theorie sich formal darstellen lassen.

Formal-deduktive Systeme können auch unabhängig von bereits vorliegenden Theorien aufgestellt werden, und man kann dann umgekehrt nach inhaltlichen Deutungen (Modellen) für sie suchen. Das ist ein Thema der „Semantik“, welche sich generell mit den Beziehungen zwischen Theorien und formalen Systemen beschäftigt.

Eine andere Art der Forschung, welche sich an die Formalisierung mathematischer Theorien knüpft, besteht darin, daß man die formalisierten Beweise zum Gegenstand mathematischer Untersuchung macht. Es ist das die Aufgabenstellung der Hilbertschen Beweistheorie. Bei dieser handelt es sich insbesondere um die Untersuchung der inneren Widerspruchsfreiheit formalisierter Theorien. Hierfür ergibt sich bei den Theorien des Unendlichen die Möglichkeit einer methodischen Reduktion, da ja die formalisierten Beweise endliche Objekte sind und auch die Widerspruchsfreiheit sich formal charakterisieren läßt. Widerspruchsfreiheitsbeweise dieser Art sind in der Tat für die formalisierte Zahlentheorie und die formalisierte Analysis gelungen, jedoch nicht mit so elementaren Mitteln wie Hilbert es anstrebte, der die Methoden solcher Beweise auf eine Kombinatorik gemäß dem finiten Standpunkt beschränken wollte. Es mußten stärkere Methoden des konstruktiven Beweisens herangezogen werden.

Dieses Erfordernis, in den Widerspruchsfreiheitsbeweisen die elementaren „finiten“ Methoden zu überschreiten, steht in Zusammenhang mit einer anderen Schwierigkeit, welche sich gemeinsam mit jener auf Grund von Er-

gebnissen von Kurt Gödel und Th. Skolem herausstellte: Es zeigte sich, daß ein formales System, wenn es die Bedingungen der strikten Kontrollierbarkeit erfüllt, die jeweils intendierte Theorie nicht vollständig auszudrücken vermag. Dieses äußert sich insbesondere darin, daß das formale System außer der normalen Deutung durch die intendierte Theorie auch abweichende
Ax Deutungen zuläßt, „Non-Standard“-Modelle, wie sie genannt werden. |

Man hat sich mit dieser Tatsache innerhalb der Grundlagenforschung auf verschiedene Arten auseinandergesetzt, einerseits indem man non-standard-Modelle des näheren studiert hat, andererseits indem man Möglichkeiten betrachtete, durch eine erweiterte Art der Formalisierung die non-standard-Modelle auszuschließen. Für die Zahlentheorie hat man zweierlei Verfahren einer solchen Erweiterung des Formalisierens in Betracht gezogen: einerseits die „unendliche Induktion“, andererseits die Zulassung unendlicher Konjunktionen und Disjunktionen. In beiden Fällen geht der finite Charakter der Beweisfiguren verloren.

Für die grundsätzliche Betrachtung ergibt sich so, daß die Rolle der Formalisierung keine so einfache ist, wie sie ihr ursprünglich zugedacht war, und zugleich auch dieses, daß wir die Forderung der Formalisierung nicht so unbedingt zu stellen haben. Ohnehin bedient sich die Semantik, ihrer Aufgabe gemäß, eines mengentheoretischen Denkens, welches nicht an ein formales System gebunden ist. –

Wie wir sehen, fehlt es nicht an Problematik für die Philosophie der Mathematik. Gleichwohl gilt aber doch, was ich in einer der Abhandlungen[2] aussprach: „Wenn wir die … Auffassung zu Grunde legen, wonach die Mathematik die Wissenschaft von den idealisierten Strukturen ist, so haben wir damit für die Grundlagenforschung der Mathematik eine Haltung, welche uns vor übersteigerten Aporien und vor forcierten Konstruktionen bewahrt, und welche auch nicht angefochten wird, wenn die Grundlagenforschung vieles Erstaunliche zutage bringt.“

[2] „Die schematische Korrespondenz und die idealisierten Strukturen“ (*vide* Kap. **??**, S. **??**).