Bernays Project: Text No. 21

Die Mathematik als ein zugleich Vertrautes und Unbekanntes† (1954)

Mathematics as both familiar and unknown

(*Synthese* IX (1953–55), S. 465–471;
repr. in *Abhandlungen*, S. 107–112)

465/A107 | Wenn der Menschengeist sich beschwert oder herabgedrückt fühlt durch das viele Rätselhafte im Dasein, durch den Eindruck unserer weitgehenden Unwissenheit in so vielen Bereichen, der Mangelhaftigkeiten der sprachlichen Wiedergabe und Verständigung, dann wendet er sich wohl gern dem Gebiet der Mathematik zu, in welchem ein deutliches und genaues Erfassen von Gegenständlichkeiten sich findet und Gewinnung von Einsicht durch angemessene Begriffe in so befriedigender Weise erreicht wird. Hier fühlt der menschliche Geist sich heimisch, hier erlebt er den Triumph, daß die Verwendung und Verbindung von ganz elementaren Vorstellungen, wie sie uns aus dem Kinderspiel vertraut sind, bedeutsame, überraschende und weittragende Resultate zu Tage bringt. An Konkretes als Ausgangspunkt anknüpfend betätigt sich das mathematische Denken in anschaulicher Fixierung und Vergegenwärtigung seiner Gegenstände und von da führt es durch Begriffsbildungen und gedankliche Verflechtung von Feststellungen zu Ergebnissen, die wiederum sich auf das Konkrete anwenden lassen und sich hier in imponierender Weise als erfolgreich erweisen.

In dreifacher Art also zeigt sich die mathematische Tätigkeit als potent und leistungskräftig: einmal haben wir hier ein originäres Vorstellen in ausgeprägter Form als Quelle des Erkennens und auch als Quelle einer sich an dieses Vorstellen knüpfenden Begriffsbildung. Wir haben ferner hier das logische Schließen als ein mächtiges Erkenntnismittel, welches eigentlich nur in diesem Gebiet auf wirklich wesentliche Art fungiert. Es kommt aber noch ein Drittes hinzu: wir haben in der Mathematik nicht nur die Betätigung

†The subtitle reads, “Vortrag zur Gedächtnisfeier für B. Nieuwentijt in Purmerend.”

der Anschauung und des logischen Denkens, in welcher diese in unserer inneren Natur beheimateten Kräfte zur freien und ergiebigen Entfaltung gelangen, sondern auch die Anknüpfung an vertraute Gegenständlichkeiten der
466 alltäglichen Wahrneh|mung und überdies noch jene erstaunliche Bewährung, welche die Mathematik in dem erweiterten Bereich der Erfahrung findet, in welchem unsere gewöhnliche Wahrnehmung nicht mehr zur Orientierung ausreicht.

Diese drei Arten des Erfolges und des Befriedigenden der Mathematik
A108 entsprechen etwa den drei von F. Gonseth unterschiedenen | Aspekten: dem intuitiven, dem theoretischen und dem experimentellen Aspekt.

Bei der näheren Betrachtung der Entwicklung der Mathematik und ihrer Anwendungen kommen wir freilich bald zu Momenten des Problematischen. Beginnen wir mit der Anwendung der Mathematik auf die Naturerklärung, so zeigt uns hier die historische Entwicklung eine zweimalige Enttäuschung in dem Sinne, daß man durch die Mathematik eine Vertrautheit mit der Wirklichkeit zu erlangen glaubte, welche sie in solcher Art de facto nicht liefert.

Das erstemal geschah dieses bei der Lehre der Pythagoräer, welche die Möglichkeit jener Zurückführung von qualitativen Unterschieden in den Wahrnehmungsobjekten auf Zahlenverhältnisse entdeckten, wie sie in der theoretischen Physik vollzogen wird. In der Verfolgung dieser Entdeckung entstand die Hoffnung, an Hand des Zahlbegriffes ein letztes eindringendes Verstehen der Wirklichkeit und somit eine geistige Vertrautheit mit dem Wirklichen zu gewinnen. Wie bekannt, erlitt diese Lehre eine grundsätzliche Anfechtung durch die Entdeckung der irrationalen Größen. Freilich lernten die Griechen bald auch mit den irrationalen Größen korrekt deduktiv umzugehen, aber dieses Verfahren des Eudoxos war doch recht abstrakt, und die an sie anknüpfende Geometrie Euklids war in ihrer ganzen axiomatischen Haltung viel zurückhaltender als die pythagoräische Lehre. Hier wurde auch bereits einmal eine strikte Absonderung des rein Mathematischen von der Naturwissenschaft vollzogen.

Die zweitmalige Erweckung der Hoffnung auf mathematisches Verstehen der Wirklichkeit war die, welche sich mit dem Beginn der Neuzeit einstellte. Unter dem Einfluß der mächtigen Entwicklung, welche damals die theoretische Naturwissenschaft, vor allem aber auch die Mathematik selbst nahm, entstand jene mechanistische Naturansicht, die so viele Geister gefangennahm. Diese war zwar von vornherein paradox, aber die Kantische Philosophie lieferte einen Modus, durch die Gegenüberstellung des An-sich-

wirklichen und der Erscheinungen, die mechanistische Ansicht für den Bereich der Erscheinungen durchzuführen und diesen Bereich als etwas anzuse-
467 hen, was durch die Art unseres anschaulichen Vorstel|lens beherrscht ist. Die durch unsere Anschauungsformen beherrschte, mathematisch strukturierte Natur erhielt damit den Charakter des uns Vertrauten.

Daß die heutige Entwicklung der theoretischen Physik sich von dieser Auffassung grundsätzlich entfernt hat, davon ist so oft und so viel die Rede, daß ich hierüber nicht näher zu sprechen brauche. Mathematik wird frei-
A109 lich heute in der theoretischen Physik in großem Ausmaße | und auch mit großem Erfolge verwendet. Aber von einem Standpunkt der anschaulichen Vertrautheit ist keine Rede mehr.

Doch diese Schwierigkeiten betreffen die theoretische Naturwissenschaft, nicht die Mathematik selbst. Wenn wir für diese die Entwicklung kurz überblicken, so ist das Bild, das sich uns zeigt, zunächst das eines imposanten Siegeszuges. Dieser hebt an mit der formalen Entfaltung der Infinitesimalrechnung, durch welche insbesondere auch das dem Namen nach Irrationale in der Größenlehre seinen Charakter als Apeiron verlor. Die mannigfachen schönen und gesetzlich einfachen Darstellungen irrationaler Größen versetzten solche Größen in den Bereich des uns Vertrauten. Allerdings entbehrte anfangs das Verfahren der Infinitesimalrechnung einer hinlänglichen methodischen Präzision, aber diese wurde ja dann im 19. Jahrhundert erreicht.

In diese Zeit fällt zugleich jener gewaltige Ausbau der Mathematik, welcher um so mehr verdient hervorgehoben zu werden, als er in der gebildeten Menschheit nicht hinlänglich zum Bewußtsein gelangt ist. Es entwickelte sich eine freiere Abstraktion und eine verstärkte Begriffsbildung. So wurden neue Methoden ausgebildet und es entstanden eine ganze Reihe von neuen mathematischen Disziplinen, in denen das mathematisch begriffliche Operieren sich zu großer Kraft und Schönheit und einem großen Reichtum der Gedankenbildung entfaltete. Ein hohes Niveau des rationalen Verstehens ist hier erreicht und eine neue Art der geistigen Vertrautheit mit Gegenständlichkeiten gewonnen.

Im Zusammenhange dieser Entwicklung erfolgten auch zwei geistesgeschichtlich bedeutsame Ereignisse: Die Entdeckung der nicht-euklidischen Geometrie und ferner die Erfüllung des Leibnizschen Programmes im Gebiete der Logik durch die Aufstellung des logischen Kalkuls, der zwar in seiner anfänglichen Form als spielerisch erscheinen konnte, dann aber so ausgebaut wurde, daß er die kalkulmäßige Gestaltung der mathematischen Beweisführungen ermöglichte.

468 Während nun so die Mathematik sich zu immer neuen Formen | und Bereichen des Verstehens aufschwang, verlor sich gleichwohl in mancher Hinsicht der Charakter des Vertrauten, insbesondere dadurch, daß dasjenige, was anfänglich den Ausgangspunkt und das Zentrale bildete, diese Stellung einbüßte: Nicht nur, daß die Euklidische Geometrie ihre ausgezeichnete Stellung und damit ihre Rolle als evidente Raumlehre verlor, auch die arithmetische Größenlehre erscheint jetzt mehr nur als die Lehre von einer Struktur unter anderen. Der beherrschende Gesichtspunkt ist jetzt der einer allgemeinen formalen Strukturlehre. Dieser aber führte in zweifacher Weise auf Schwierigkeiten: einerseits durch Antinomien, welche sich daraus ergeben, daß Inbe-
A110 griffe möglicher | Strukturen, die sich in analoger Weise wie die Zahlenreihe als mathematische Gegenständlichkeiten präsentieren, gleichwohl nicht ohne Widerspruch so aufgefaßt werden können, andererseits in dem befremdlichen Aspekt, welcher sich in der Cantorschen Mengenlehre darbot, indem hier ein ungeheurer Aufstieg unendlicher Kardinalzahlen hervortrat, angesichts dessen die unendliche Zahlenreihe und die Mannigfaltigkeit des mathematischen Kontinuums zu einer Winzigkeit herabsinken, noch in einem grundsätzlich stärkeren Ausmaß, als es für die Größe unserer Erde im Vergleich mit astronomischen Ausdehnungen der Fall ist. Man wurde so vielerseits an der Berechtigung und Sinnhaftigkeit der angewandten Methoden irre, und es ertönte der Ruf „Zurück zum Konkreten!“ Vorher anerkannte und gebräuchliche Begriffsbildungen und Schlußweisen wurden nicht mehr gebilligt. Man unternahm Gestaltungen der Mathematik in neuem Rahmen. Ein solcher ist ja insbesondere der des Brouwerschen Intuitionismus. Andererseits faßte Hilbert den Gedanken, durch Verwertung der Formalisierung des mathematischen Schließens eine stärkere Anknüpfung der Mathematik an das konkrete Vorstellen zu gewinnen.

Kürzlich hat Herr Heyting in seinem Vortrag auf dem Brüsseler Kongreß die Sachlage in der mathematischen Grundlagenforschung erörtert. Er kommt hier auf die Frage nach dem Gegenstand der Mathematik zu sprechen und findet, daß sie für die klassische Mathematik (d. h. die im 19. Jahrhundert ausgebildete Mathematik) nicht befriedigend beantwortbar sei. Den Grund hierfür erblickt er in dem Umstande, daß in der klassischen Mathematik intuitive und formale Elemente ohne deutliche Unterscheidung kombiniert sind. Andererseits erscheint ihm auch die schärfere Herausarbeitung der beiden Momente, wie sie für das intuitive Moment durch Brouwers Intuitionismus, für das formale durch Hilberts Beweistheorie erfolgt, für eine erschöpfende
469 Auseinandersetzung mit der | hier vorliegenden erkenntnistheoretischen Pro-

blematik nicht als zulänglich, und er sieht hierin ein Anzeichen dafür, daß die Frage nach dem Objekt schlecht formuliert ist und durch eine adäquatere Fragestellung ersetzt werden muß.

Diesem Fazit können wir sicherlich zustimmen. Tatsächlich knüpft sich an die Frage nach dem Gegenstand leicht eine Voraussetzung, die keineswegs selbstverständlich ist, nämlich, daß in der wissenschaftlichen Forschung der Gegenstand uns allenthalben vorgängig gegeben sein müsse, während doch die Betrachtung der Wissenschaften zeigt, daß die Gegenstände theoretischer Disziplinen in genauerer Bestimmtheit meist erst aus den begrifflichen Konzeptionen erwachsen. Auch brauchen wir die von Herrn Heyting an der
A111 klassischen Mathematik vermerkte | Mischung intuitiver und formaler Elemente nicht als etwas Mangelhaftes anzusehen, oft besteht die Rolle wichtiger begrifflicher und methodischer Konzeptionen gerade darin, daß sie eine Art von Ausgleich zwischen anschaulichen und theoretisch-formalen Intentionen liefern.

Ein solcher Ausgleich liegt bereits in der Grundeinstellung der Zahlentheorie vor, und zwar auch schon bei ihrer elementaren („finiten“) Behandlung. Wir müssen uns darüber klar sein, daß wir uns bereits bei der finiten Zahlentheorie nicht mehr im Bereich des eigentlich Konkreten befinden; die großen Zahlen können ja nicht mehr in der Vorstellung oder in der Wahrnehmung vorgeführt werden. Insbesondere ist vom Standpunkt einer im eigentlich Konkreten verbleibenden Betrachtung nicht ersichtlich, was eine auf beliebige Zahlen sich erstreckende Allaussage bedeuten soll. Der Versuch, eine solche Allaussage durch das Vorhandensein eines Beweises zu deuten, führt nicht zum Ziel. Nämlich, wenn ein inhaltlicher Beweis, etwa im Sinne des Intuitionismus, gemeint ist, so besteht ja ein solcher in einem gewissen Verfahren, welches aufgezeigt wird. Es muß dann aber ersichtlich sein, daß dieses Verfahren in jedem Einzelfall das Gewünschte liefert; eine solche Feststellung ist jedoch wieder eine zahlentheoretische Allaussage. Meint man aber eine formale Herleitung im Rahmen eines deduktiven Systems, so muß man sich doch von dem sachgemäßen Funktionieren des deduktiven Formalismus überzeugen, und damit kommt man wiederum auf eine Feststellung von der Form einer zahlentheoretischen Allgemeinheit.

Wir können den geistigen Schritt, der zu der spezifisch zahlentheoretischen Betrachtung führt, uns etwa so vergegenwärtigen: Zunächst sind wir uns der Freiheit bewußt, von einer erreichten Stelle im Zählprozeß jeweils
470 noch um Eins fortzuschreiten; nun | aber machen wir den Ansatz einer Bindung, wodurch eine Funktion gesetzt ist, die jedweder Zahl einen Nachfolger

zuordnet; damit tritt an die Stelle eines progressus in indefinitum ein progressus in infinitum. Daß diese Vorstellung von der unendlichen Zahlenreihe durchführbar ist, ist von vornherein gar nicht selbstverständlich, und erst auf Grund der geistigen Erfahrung des Gelingens bildet sich hier ein Gefühl der Vertrautheit, ja der Selbstverständlichkeit, als eine erworbene Evidenz.

Die Philosophie der Mathematik tendiert zumeist dahin, anstelle solcher erworbener Evidenz eine Evidenz ab ovo zu setzen. Dadurch wird man entweder verleitet, die Evidenz ihrem Umfange nach zu überspannen, da man alle eventuell erreichbaren Stufen einbegreifen will, was zu den Antinomien
A112 führt, oder aber eine bestimmte Stufe der | Evidenz als absolut zu setzen, woraus sich dann ein Erfordernis zur Einschränkung der Mathematik ergibt, und zwar in einer Weise, bei der wir die Freiheit der geistigen Entscheidung unnötigerweise einbüßen.

Diesen Unzuträglichkeiten können wir entgehen, wenn wir darauf verzichten, die Mathematik als etwas ihrerseits Selbstverständliches anzusehen. Das Moment des Vertrauten, dass wir in mathematischen Bereichen, besonders in der elementaren Mathematik finden, ist eine erworbene Vertrautheit. Wohl ist Mathematik vornehmlich ein Begreifen, aber nicht etwas Begriffenes. Die Möglichkeit, die in der Vorstellung verfolgbaren Beziehungen von Zahlen und Figuren durch strenge mathematische Gesetze mit Erfolg zu extrapolieren, ist im Grunde ebensowenig selbstverständlich wie die Möglichkeit der Auffindung physikalischer Naturgesetze. Wir müssen wohl diesbezüglich auf die sokratische Weisheit, d. h. das Erkennen unseres Nichtwissens, zurückkommen. Die Kantische Meinung, daß die Struktur unseres eigenen Erkennens für uns a priori bestimmbar sein müsse, beruht offensichtlich auf einer Täuschung. Die Struktur unserer geistigen Organisation ist ja für unser Bewußtsein gleichermaßen transzendent wie die Beschaffenheit der äußeren Natur.

Auch ist es wohl schwerlich zutreffend, daß das Moment des Mathematischen nur durch die Art unseres anschaulichen Vorstellens in die Naturbetrachtung hineinkommt. Freilich können wir anerkennen, daß die Welt des Mathematischen uns als ein Gebiet des Phänomenalen entgegentritt, so daß man mit Bezug auf die Mathematik, in einem gegenüber Hegel abgewandelten Sinne, von einer Phänomenologie des Geistes sprechen kann. Dieses Phänomenale geht aber gewiß über das hinaus, was wir im Individuum als von vornherein angelegt annehmen können, schon darum, weil es seiner Struktur nach etwas Offenes ist. Wenn man aber von „Geist“, „Verstand“ oder „Form der Anschauung“ im Sinne von etwas spricht, das über die konkrete psychische Konstitution hinausgeht, dann gibt es keinen ersichtlichen Unterschied mehr zwischen dem, was zum Subjekt gehört, und irgendeinem Element der Weltordnung.

Tatsächlich führt die philosophische Spekulation über die Mathematik in so hohe Regionen. Wenn wir die Mathematik nicht vom Standpunkt des unmittelbaren Gebrauchs ansehen, wo sie uns das Erlebnis des Vertrauten und der Evidenz verschafft, sondern philosophisch ihren Gründen nachgehen wollen, so dürfen wir uns von der Mathematik wahrlich keine zu einfache Vorstellung machen.