Bernays Project: Text No. 14

Hilberts Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik (1935)

Hilbert's investigations into the foundations of arithmetic

(Hilbert's *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin: Springer, Bd. 3, S. 196–216)

---

196 | Die ersten Untersuchungen Hilberts über die Grundlagen der Arithmetik schließen sich zeitlich und auch gedanklich an seine Untersuchungen der Grundlagen der Geometrie an. Hilbert beginnt in der Abhandlung „Über den Zahlbegriff“[1] damit, daß er für die Arithmetik, entsprechend wie für die Geometrie, die axiomatische Methode zur Geltung bringt, die er der sonst gewöhnlich angewandten „genetischen“ Methode gegenüberstellt.

> Vergegenwärtigen wir uns zunächst die Art und Weise der Einführung des Zahlbegriffes. Ausgehend von dem Begriff der Zahl 1, denkt man sich gewöhnlich durch den Prozeß des Zählens zunächst die weiteren ganzen rationalen positiven Zahlen $2, 3, 4, \ldots$ entstanden und ihre Rechnungsgesetze entwickelt; sodann gelangt man durch die Forderung der allgemeinen Ausführung der Subtraktion zur negativen Zahl; man definirt ferner die gebrochene Zahl, etwa als ein Zahlenpaar – dann besitzt jede lineare Funktion eine Nullstelle –, und schließlich die reelle Zahl als einen Schnitt oder eine Fundamentalreihe – dadurch erreicht man, daß jede ganze rationale indefinite, und überhaupt jede stetige indefinite Funktion eine Nullstelle besitzt. Wir können diese Methode der Einführung des Zahlbegriffs die *genetische Methode* nennen, weil der allgemeinste Begriff der reellen Zahl durch sukzessive Erweiterung des einfachen Zahlbegriffes *erzeugt* wird.
>
> Wesentlich anders verfährt man beim Aufbau der Geometrie. Hier pflegt man mit der Annahme der Existenz der sämtlichen

[1] *Vide* [**?**].

Elemente zu beginnen, d. h. man setzt von vorne herein drei Systeme von Dingen, nämlich die Punkte, die Geraden und die Ebenen, voraus und bringt dann diese Elemente – wesentlich nach dem Vorbilde von Euklid – durch gewisse Axiome, nämlich die Axiome der Verknüpfung, der Anordnung, der Congruenz und der Stetigkeit, miteinander in Beziehung. Es entsteht dann die notwendige Aufgabe, die *Widerspruchslosigkeit* und *Vollständigkeit* dieser Axiome zu zeigen, d. h. es muß bewiesen werden, daß die An-
197 wendung der aufgestellten Axiome nie | zu Widersprüchen führen kann, und ferner, daß das System der Axiome zum Nachweis aller geometrischen Sätze ausreicht. Wir wollen das hier eingeschlagene Untersuchungsverfahren die *axiomatische Methode* nennen.

Wir werfen die Frage auf, ob wirklich die genetische Methode gerade für das Studium des Zahlbegriffes, und die axiomatische Methode für die Grundlagen der Geometrie die allein angemessene ist; auch scheint es von Interesse, beide Methoden gegenüberzustellen und zu untersuchen, welche Methode die vorteilhaftere ist, wenn es sich um die logische Untersuchung der Grundlagen der Mechanik oder anderer physikalischer Disziplinen handelt.

Meine Meinung ist diese: *Trotz des hohen pädagogischen und heuristischen Wertes der genetischen Methode verdient doch zur endgültigen Darstellung und völligen logischen Sicherung des Inhaltes unserer Erkenntnis die axiomatische Methode den Vorzug.*[a]

Die Zahlentheorie hatte bereits Peano axiomatisch entwickelt[2]. Hilbert stellt nun ein Axiomensystem der Analysis auf, durch welches das System

[2][1] G. Peano: *Arithmetices principia nova methodo exposita* (*vide* [**?**]). Die Einführung der rekursiven Definition ist hier nicht einwandfrei; es fehlt der Nachweis der Lösbarkeit der Rekursionsgleichungen. Ein solcher Nachweis war bereits von Dedekind in seiner Schrift *Was sind und was sollen die Zahlen* (*vide* [**?**]) erbracht worden. Beim Ausgehen von Peanos Axiomen verfährt man zur Einführung der rekursiven Definition am besten so, daß man zunächst die Lösbarkeit der Rekursionsgleichungen für die Summe nach L. Kalmár, durch einen Induktionsschluß nach dem Parameterargument, beweist, sodann mit Hilfe der Summe den Begriff „kleiner“ definiert und hernach für die allgemeine rekursive Definition die Dedekindsche Überlegung verwendet. Man findet dieses Verfahren dargestellt in dem Lehrbuch von Landau: *Grundlagen der Analysis* (*vide* [**?**]). Hierbei wird

[a][**?**], S. 180–181.

der reellen Zahl charakterisiert wird als ein reeller archimedischer Körper, der keiner Erweiterung zu einem umfassenderen Körper der gleichen Art mehr fähig ist.

An die Aufzählung der Axiome schließen sich einige beispielsweise angeführten Bemerkungen über Abhängigkeiten. Insbesondere wird erwähnt, daß das kommutative Gesetz der Multiplikation aus den übrigen Körpereigenschaften und den Ordnungseigenschaften mit Hilfe des Archimedischen Axioms, aber nicht ohne dieses abgeleitet werden kann.

Die Forderung der Nichterweiterbarkeit wird formuliert durch das „Axiom der Vollständigkeit“. Dieses Axiom hat den Vorzug der Prägnanz; jedoch ist seine logische Struktur kompliziert. Außerdem ist an ihm nicht unmittel-
198 bar ersichtlich, daß es eine Stetigkeitsforderung zum Ausdruck bringt. Will | man statt dieses Axioms ein solches haben, das deutlich den Charakter einer Stetigkeitsforderung besitzt und das andererseits nicht schon die Forderung des Archimedischen Axioms in sich schließt, so empfiehlt es sich, das Cantorsche Stetigkeitsaxiom zu nehmen, welches besagt, daß es zu jeder Folge von Intervallen, in der jedes Intervall das folgende umschließt, einen Punkt gibt, der allen Intervallen angehört. (Die Aufstellung dieses Axioms erfordert die vorherige Einführung des Begriffs einer Zahlenfolge)[3].

Am Schluß der Abhandlung tritt die Absicht, die Hilbert mit der axiomatischen Fassung der Analysis verfolgt, besonders deutlich in folgenden Worten zutage:

> Die Bedenken, welche gegen die Existenz des Inbegriffs aller reellen Zahlen und unendlicher Mengen überhaupt geltend gemacht worden sind, verlieren bei der oben gekennzeichneten Auffassung

allerdings der Funktionsbegriff benutzt. Will man diesen vermeiden, so muß man die Rekursionsgleichungen der Summe und des Produktes als Axiome einführen. Der Nachweis der allgemeinen Lösbarkeit von Bekursionsgleichnngen ergibt sich dann nach einem Verfahren von K. Gödel (vgl. „Über formal unentscheidbare Sätze … “ (*vide* [**?**]) sowie auch Hilbert-Bernays *Grundlagen der Mathematik* (*vide* [**?**], ■ S. 412 ff.)).

3[1] Betreffs der Unabhängigkeit des Archimedischen Axioms von dem genannten Cantorschen Axiom vgl. P. Hertz: „Sur les axiomes d’Archimède et de Cantor“ (*vide* [**?**]).

Auf das Cantorsche Axiom hat neuerdings besonders R. Baldus hingewiesen. Siehe dessen Abhandlungen „Zur Axiomatik der Geometrie“: „I. Über Hilberts Vollständigkeitsaxiom“, „II. Vereinfachungen des Archimedischen und des Cantorschen Axioms“, „III. Über das Archimedische und das Cantorsche Axiom“ (*vide* [**?**], [**?**], [**?**]), sowie die daran anknüpfende Abhandlung von A. Schmidt: „Die Stetigkeit in der absoluten Geometrie“ (*vide* [**?**]).

> jede Berechtigung: unter der Menge der reellen Zahlen haben wir uns hiernach nicht etwa die Gesamtheit aller möglichen Gesetze zu denken, nach denen die Elemente einer Fundamentalreihe fortschreiten können, sondern vielmehr – wie eben dargelegt ist – ein System von Dingen, deren gegenseitige Beziehungen durch das obige *endliche und abgeschlossene* System von Axiomen I–IV gegeben sind, und über welche neue Aussagen nur Gültigkeit haben, falls man sie mittelst einer endlichen Anzahl von logischen Schlüssen aus jenen Axiomen ableiten kann.[b]

Dem methodischen Gewinn, den diese Auffassung bringt, steht allerdings eine erhöhte Anforderung gegenüber; denn die axiomatische Fassung der Theorie der reellen Zahlen zieht mit Notwendigkeit die Aufgabe eines Nachweises der Widerspruchsfreiheit für das aufgestellte Axiomensystem nach sich.

So wurde auch von Hilbert in seinem Pariser Vortrag „Mathematische Probleme"[4] die Aufgabe des Nachweises der Widerspruchsfreiheit für die arithmetischen Axiome in der Reihe der von ihm aufgestellten Probleme genannt.[c]

Zur Durchführung des Nachweises gedachte Hilbert mit einer geeigneten
199 | Modifikation der in der Theorie der reellen Zahlen angewandten Methoden auszukommen.

Doch in der genaueren Auseinandersetzung mit dem Problem traten ihm sogleich die erheblichen Schwierigkeiten entgegen, die für diese Aufgabe bestehen. Es kam hinzu, daß die inzwischen von Russell und Zermelo entdeckte mengentheoretische Paradoxie zu erhöhter Vorsicht in den Schlußweisen veranlaßte. Sahen sich doch Frege und Dedekind genötigt, ihre Untersuchungen, durch welche sie glaubten, die Zahlentheorie in einwandfreier Weise begründet zu haben – Dedekind mittels der allgemeinen Begriffe der Mengenlehre, Frege im Rahmen der reinen Logik[5] –, zurückzuziehen, da sich an Hand jener Paradoxie erwies, daß in ihren Überlegungen unzulässige Schlußweisen enthalten waren.

4[2] Gehalten auf dem Internationalen Mathematikerkongreß 1900 zu Paris (*vide* [**?**]).

5[1] R. Dedekind: *Was sind und was sollen die Zahlen?*, G. Frege: *Grundgesetze der Arithmetik* (*vide* [**?**], [**?**]).

---

b[**?**], S. 184.

c*Vide* [**?**], S. 299–301.

So zeigt uns der 1904 gehaltene Vortrag[6] „Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik“ einen völlig neuen Aspekt. Hier wird zunächst auf den grundsätzlichen Unterschied hingewiesen, der für das Problem des Nachweises der Widerspruchsfreiheit zwischen der Arithmetik und der Geometrie besteht. Für die Axiome der Geometrie erfolgt der Nachweis der Widerspruchsfreiheit durch eine arithmetische Interpretation des geometrischen Axiomensystems. Für den Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik dagegen „erscheint die Berufung auf eine andere Grunddisziplin unerlaubt“.[d]

Man könnte allerdings an eine Zurückführung auf die Logik denken.

> Allein bei aufmerksamer Betrachtung werden wir gewahr, daß bei der hergebrachten Darstellung der Gesetze der Logik gewisse arithmetische Grundbegriffe, z. B. der Begriff der Menge, zum Teil auch der Begriff der Zahl, insbesondere als Anzahl, bereits zur Verwendung kommen. Wir geraten so in eine Zwickmühle, und zur Vermeidung von Paradoxien ist daher eine teilweise gleichzeitige Entwicklung der Gesetze der Logik und der Arithmetik erforderlich.[e]

Hilbert legt nun den Plan eines solchen gemeinsamen Aufbaues von Logik und Arithmetik dar. Dieser Plan enthält bereits zum großen Teil die leitenden Gesichtspunkte für die Beweistheorie, insbesondere den Gedanken, durch die Übersetzung der mathematischen Beweise in die Formelsprache der symbolischen Logik den Nachweis der Widerspruchsfreiheit in ein Problem von elementar-arithmetischem Charakter zu transformieren. Auch finden sich hier schon die Ansätze zu den Beweisen der Widerspruchsfreiheit vor.

200 Allerdings bleibt die Ausführung noch ganz in den Anfängen. So wird | insbesondere der Nachweis für die „Existenz des Unendlichen“ nur im Rahmen eines ganz engen Formalismus geführt.

Außerdem ist auch der methodische Standpunkt der Hilbertschen Beweistheorie in dem Heidelberger Vortrag noch nicht zur vollen Deutlichkeit entwickelt. Einige Stellen deuten darauf hin, daß Hilbert die anschauliche

[6][2] Auf dem Internationalen Mathematikerkongreß in Heidelberg 1904 (*vide* [**?**]).

---

[d][**?**], S. ■ .
[e][**?**], S. 250.

Zahlvorstellung vermeiden und durch die axiomatische Einführung des Zahlbegriffes ersetzen will. Ein solches Verfahren würde in den beweistheoretischen Überlegungen einen Zirkel ergeben. Auch wird der Gesichtspunkt der Beschränkung in der inhaltlichen Anwendung der Formen des existentialen und des allgemeinen Urteils noch nicht ausdrücklich und restlos zur Geltung gebracht.

In diesem vorläufigen Stadium hat Hilbert seine Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik für lange Zeit unterbrochen.[7] Ihre Wiederaufnahme finden wir angekündigt in dem 1917 gehaltenen Vortrage[8] „Axiomatisches Denken“.

Dieser Vortrag steht unter dem Zeichen der mannigfachen erfolgreichen axiomatischen Untersuchungen, die von Hilbert selbst und anderen Forschern in verschiedenen Gebieten der Mathematik und Physik angestellt worden waren. Insbesondere im Gebiete der Grundlagen der Mathematik hatte die axiomatische Methode auf zwei Wegen zu einer umfassenden Systematik der Arithmetik und Mengenlehre geführt. Zermelo stellte 1907 sein Axiomensy-
201 stem der Mengenlehre auf[9], durch welches die Prozesse der Mengen|bildung

[7][1] Eine Weiterführung der durch Hilberts Heidelberger Vortrag angeregten Forschungsrichtung erfolgte durch J. König, der in seinem Buche *Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre* (*vide* [**?**]), sowohl durch eine genauere Fassung und eingehendere Darlegung des methodischen Standpunktes, wie auch hinsichtlich seiner Durchführung über den Heidelberger Vortrag hinausgeht. Julius König starb noch vor der Beendigung des Buches; es wurde von seinem Sohn als Fragment herausgegeben. Von diesem Werk, welches einen Vorläufer der späteren Hilbertschen Beweistheorie bildet, ist jedoch keine Einwirkung auf Hilbert ausgegangen. Dagegen hat später J. v. Neumann in seiner Untersuchung „Zur Hilbertschen Beweistheorie“ (*vide* [**?**]) an die Ansätze von König angeknüpft.

[8][2] Auf der Naturforscherversammlung in Zürich (*vide* [**?**]).

[9][3] E. Zermelo: „Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I“ (*vide* [**?**]). An dieses Axiomensystem haben sich in neuerer Zeit verschiedene Untersuchungen geknüpft. A. Fraenkel fügte das Ersetzungsaxiom hinzu, eine im Sinne der Cantorschen Mengenlehre liegende Erweiterung des Bereiches der zulässigen Mengenbildung; J. v. Neumann führte ein Axiom ein, durch welches ausgeschlossen wird, daß der Prozeß des Überganges von einer Menge zu einem ihrer Elemente sich von irgend einer Menge aus ins Unbegrenzte fortsetzen läßt. Ferner haben Th. Skolem, Fraenkel und J. v. Neumann, jeder auf eine andere Art, den von Zermelo in unbestimmter Allgemeinheit benutzten Begriff der „definiten Aussage“ im Sinne einer schärferen impliziten Charakterisierung des Mengenbegriffes präzisiert. Das Ergebnis dieser Präzisie|rung stellt sich am prägnantesten in der Axiomatik v. Neumanns dar; hier nämlich wird erreicht, daß alle Axiome solche der „ersten Stufe“ (im Sinne der Terminologie der symbolischen Logik) sind. Von Zermelo wird eine derartige Präzisierung des Mengenbegriffes abgelehnt, insbes. im Hinblick auf die zuerst von Skolem

derart abgegrenzt werden, daß einerseits die mengentheoretischen Paradoxien vermieden werden und andererseits die in der Mathematik gebräuchlichen mengentheoretischen Schlußweisen erhalten bleiben. Und von Russell und Whitehead wurde in ihrem Werke *Principia Mathematica*[10] das Fregesche Unternehmen einer logischen Begründung der Arithmetik – für welches ja die von Frege selbst angewandte Methode der Durchführung als ungangbar erwiesen war – auf axiomatischem Wege restituiert[11].

Hilbert sagt von dieser Axiomatisierung der Logik, man könne in der Vollendung dieses Unternehmens „die Krönung des Werkes der Axiomatisierung überhaupt erblicken". An diese rühmende Anerkennung schließt sich allerdings sogleich die Bemerkung, daß die Vollendung des Unternehmens „noch neuer und vielseitiger Arbeit bedürfen" wird.[f]

In der Tat enthält der Standpunkt der *Principia Mathematica* eine ungelöste Problematik. Was durch dieses Werk geliefert wird, ist die Ausarbeitung eines übersichtlichen Systems von Voraussetzungen für einen gemeinsamen deduktiven Aufbau von Logik und Mathematik sowie der Nachweis, daß dieser Aufbau tatsächlich gelingt. Für die Zulässigkeit der Voraussetzungen wird aber außer der inhaltlichen Plausibilität (welche auch nach der Ansicht von Russell und Whitehead keine Gewähr der Widerspruchsfreiheit bietet) nur die Erprobung im deduktiven Gebrauch geltend gemacht. Aber auch diese Erprobung verschafft uns ja inbetreff der Widerspruchsfreiheit nur

festgestellte Konsequenz, daß das so verschärfte Axiomensystem der Mengenlehre sich im Individuenbereich der ganzen Zahlen realisieren läßt. – Eine Darstellung dieser Untersuchungen bis zum Jahre 1928, mit eingehenden Literaturangaben, enthält das Lehrbuch von A. Fraenkel: *Einleitung in die Mengenlehre* (*vide* [**?**]). Siehe ferner: J. v. Neumann: „Über eine Widerspruchsfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre", Th. Skolem: „Über einige Grundlagenfragen der Mathematik", E. Zermelo: „Über Grenzzahlen und Mengenbereiche" (*vide* [**?**], [**?**], [**?**]).

10[1] *Vide* [**?**].

11[2] Die axiomatische Form der Anlage ist auch schon in Freges System vorhanden. Die Aufhebung des in dem Fregeschen System vorgefundenen Widerspruchs beruht bei dem Verfahren von Russell und Whitehead darauf, daß die Begriffsumfänge (Klassen) nicht als Individuen (Gegenstände) betrachtet werden, vielmehr eine Aussage über den Umfang eines Begriffs nur als eine Umschreibung für eine Aussage über den Begriff selbst angesehen wird. Dadurch überträgt sich die Unterscheidung der Stufen von den Begriffen auf die Klassen. Für diese Art der Behebung des Widerspruches genügt übrigens die einfachere, bereits bei Frege vorliegende Stufenunterscheidung.

---

f [**?**], S. ■ .

202 ein erfahrungsmäßiges Vertrauen, keine völlige Sicherheit. Die völlige | Gewißheit der Widerspruchsfreiheit erachtet aber Hilbert als ein Erfordernis der mathematischen Strenge.

Somit bleibt für Hilbert die Aufgabe eines Nachweises der Widerspruchsfreiheit für jene Voraussetzungen bestehen. Zur Behandlung dieser Aufgabe, sowie auch verschiedener weitergehender grundsätzlicher Fragen, wie z. B. „das Problem der prinzipiellen Lösbarkeit einer jeden mathematischen Frage“ oder „die Frage nach dem Verhältnis zwischen Inhaltlichkeit und Formalismus in Mathematik und Logik“ hält Hilbert es für erforderlich, „den Begriff des spezifisch mathematischen Beweises selbst zum Gegenstand einer Untersuchung“ zu machen.[g]

Dem hiermit von neuem gefaßten Plan einer Beweistheorie[12] hat sich Hilbert in den nachfolgenden Jahren, insbesondere seit 1920, vornehmlich gewidmet. Ein verstärkter Antrieb hierzu erwuchs ihm aus der Opposition, welche Weyl und Brouwer gegen das übliche Verfahren der Analysis und Mengenlehre richteten[13].

So beginnt auch Hilbert die erste Mitteilung über seine „Neubegründung der Mathematik“[14] damit, daß er sich mit den Einwänden Weyls und Brouwers auseinandersetzt. An dieser Auseinandersetzung ist bemerkenswert, daß Hilbert trotz der energischen Zurückweisung der gegen die Analysis erhobenen Einwendungen und trotz seines Eintretens für die Berechtigung der üblichen Schlußweisen doch darin mit dem oppositionellen Standpunkt einig ist, daß er das übliche Verfahren der Analysis nicht als ohne weiteres einsichtig und der Anforderung der mathematischen Strenge genügend befindet. Die „Berechtigung“, die Hilbert dem üblichen Verfahren zuerkennt, besteht nach seiner Auffassung nicht auf Grund von Evidenz, sondern auf Grund der Zulässigkeit der axiomatischen Methode, von der Hilbert erklärt,

12[1] Zur Mitarbeit an diesem Unternehmen forderte Hilbert damals P. Bernays auf, mit dem er von da an seine Untersuchungen ständig besprochen hat.

13[2] H. Weyl: *Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*, „Der circulus vitiosus in der heutigen Begründung der Analysis“, „Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik“ (*vide* [?], [?], [?]). – L. E. J. Brouwer: „Intuitionisme en formalisme“, „Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten. I–II“, „Intuitionistische Mengenlehre“, „Besitzt jede reelle Zahl eine Dezimalbruchentwicklung?“ (*vide* [?], [?], [?], [?], [?]).

14[3] Vortrag, gehalten in Hamburg 1922 (*vide* [?]).

g [?], S. ■ .

daß sie, wenn irgendwo sonst, so hier angebracht sei. Diese Auffassung ist es, aus der das Problem eines Nachweises der Widerspruchsfreiheit für die Voraussetzungen der Analysis erwächst.

203 | Was ferner die methodische Einstellung betrifft, welche Hilbert seiner Beweistheorie zugrunde legt und welche er an Hand der anschaulichen Behandlung der Zahlentheorie erläutert, so liegt hierin – ungeachtet der Stellungnahme Hilberts gegen Kronecker – eine weitgehende Annäherung an den Standpunkt Kroneckers vor[15]. Eine solche besteht insbesondere in der Anwendung des anschaulichen Begriffes der Ziffer und ferner darin, daß die anschauliche Form der vollständigen Induktion, d. h. die Schlußweise, welche sich auf die anschauliche Vorstellung von dem „Aufbau" der Ziffern gründet, als einsichtig und keiner weiteren Zurückführung bedürftig anerkannt wird. Indem Hilbert sich zur Annahme dieser methodischen Voraussetzung entschloß, wurde auch der Grund der Einwendungen behoben, welche seinerzeit Poincaré gegen Hilberts Unternehmen der Begründung der Arithmetik auf Grund der Darlegung in dem Heidelberger Vortrag gerichtet hatte[16].

Der Ansatz der Beweistheorie, wie er in der ersten Mitteilung niedergelegt ist, enthält bereits die genauere Ausgestaltung des Formalismus. Gegenüber dem Heidelberger Vortrag tritt dabei die scharfe Sonderung des logisch-mathematischen Formalismus von der inhaltlichen, „metamathematischen" Überlegung hervor, welche sich insbesondere durch die Unterscheidung der Zeichen „zur Mitteilung" von den Symbolen und Variablen des Formalismus ausprägt.

Allerdings erscheint als ein Überbleibsel aus dem Stadium, in dem diese Sonderung noch nicht vollzogen war, die formale Beschränkung der Negation auf die Ungleichungen, während ja nur eine Beschränkung in der metamathematischen Anwendung der Negation erforderlich ist.

Als ein Charakteristikum des Hilbertschen Ansatzes tritt schon in der ersten Mitteilung die Formalisierung des „tertium non datur" mittels transfiniter Funktionen auf. Insbesondere wird für die ganzen Zahlen das „tertium

[15][1] In dem späteren Vortrage „Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre" (gehalten in Hamburg 1930, *vide* [**?**]), hat sich Hilbert hierüber deutlicher ausgesprochen. Nach der Erwähnung der Dedekindschen Untersuchung *Was sind und was sollen die Zahlen* (*vide* [**?**]) erklärt er: „Etwa zu gleicher Zeit, also schon vor mehr als einem Menschenalter, hat Kronecker eine Auffassung klar ausgesprochen und durch zahlreiche Beispiele erläutert, die heute im wesentlichen mit unserer finiten Einstellung zusammenfällt." (S. 487)

[16][2] H. Poincaré: „Les mathématiques et la logique" (*vide* [**?**]).

non datur“ formalisiert durch die Funktionenfunktion $\kappa(f)$, deren Argument eine zahlentheoretische Funktion ist und die den Wert 0 hat, falls $f(a)$ für alle Zahlwerte a den Wert 1 hat, sonst aber den kleinsten Zahlwert a darstellt, für den $f(a)$ einen von 1 verschiedenen Wert hat.

Der Leitgedanke zum Nachweis für die Widerspruchsfreiheit der transfiniten Funktionen (d. h. der für sie aufgestellten Axiome), den Hilbert schon
204 da|mals bereit hatte, wird in dieser Mitteilung noch nicht dargelegt. Ein Nachweis der Widerspruchsfreiheit wird hier vielmehr nur für einen gewissen Teilformalismus erbracht; dieser Nachweis hat aber nur die Bedeutung eines Beispiels für eine metamathematische Beweisführung[17].

In dem bald auf die erste Mitteilung folgenden Leipziger Vortrag „Die logischen Grundlagen der Mathematik“[18] finden wir den Ansatz und die Darstellung der Beweistheorie in verschiedener Hinsicht weiter entwickelt. Es seien kurz die Hauptpunkte genannt, in denen die Ausführungen des Leipziger Vortrages über die der ersten Mitteilung hinausgehen:

1. Der Grund der Überschreitung der anschaulichen Betrachtungsweise durch die übliche Mathematik, bestehend in der unbeschränkten Anwendung der Begriffe „alle“, „es gibt“ auf unendliche Gesamtheiten, wird aufgezeigt und der Begriff der „finiten Logik“ herausgearbeitet. Auch wird der Vergleich der Rolle der „transfiniten“ Formeln mit derjenigen der idealen Elemente hier zum ersten Male angestellt.

2. Der Formalismus wird von unnötigen Beschränkungen (insbesondere der Vermeidung der Negation) befreit.

3. Die Formalisierung des „tertium non datur“ und zugleich des Auswahlprinzips mittels transfiniter Funktionen wird vereinfacht.

4. Der Formalismus der Analysis wird in den Grundzügen entwickelt.

5. Für den elementaren zahlentheoretischen Formalismus, welcher sich bei der Ausschließung der gebundenen Variablen ergibt, ist der Nachweis der Widerspruchsfreiheit geliefert. Die Aufgabe des Nachweises für die Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie und Analysis konzentriert sich damit auf die Behandlung des „transfiniten Axioms“

$$A(\tau(A)) \;\rightarrow\; A(a),$$

[17][1] Die Beweismethode beruht hier wesentlich darauf, daß diejenigen elementaren Schlußregeln für die Implikation, welche durch die (mit 10. bis 13. numerierten) „Axiome des logischen Schließens“ formalisiert werden, nicht in den betrachteten Teilformalismus aufgenommen sind.

[18][2] Gehalten auf dem Deutschen Naturforscher-Kongreß 1922 (*vide* [**?**]).

welches in zweifacher Weise zur Anwendung kommt, da das Argument von A einerseits auf den Bereich der gewöhnlichen Zahlen, andrerseits auf den der Zahlenfolgen (Funktionen) bezogen wird.

6. Zur Behandlung des „transfiniten Axioms" im Nachweis der Widerspruchsfreiheit wird ein Verfahren angegeben, welches jedenfalls in den einfachsten Fällen zum Ziel führt.

Mit der Gestaltung der Beweistheorie, die uns in dem Leipziger Vortrag entgegentritt, war die grundsätzliche Form ihrer Anlage erreicht.

205 | Die beiden nächstfolgenden Publikationen Hilberts über die Beweistheorie, der Münsterer Vortrag „Über das Unendliche"[19] und der (zweite) Hamburger Vortrag „Die Grundlagen der Mathematik"[20], in denen von neuem und ausführlicher als zuvor das Problem, die Grundidee und der formale Ansatz der Beweistheorie dargelegt wird, zeigen allerdings im Formalismus verschiedene Veränderungen und Erweiterungen. Diese dienen jedoch nur zum kleineren Teil dem ursprünglichen Ziel der Beweistheorie; hauptsächlich sind sie im Hinblick auf den Plan einer Lösung des Cantorschen Kontinuumsproblems angebracht, d. h. eines Beweises für den Satz, daß das Kontinuum (die Menge der reellen Zahlen) die gleiche Mächtigkeit hat wie die Menge der Zahlen der zweiten Zahlenklasse.

Hilbert hatte den Gedanken, die zahlentheoretischen Funktionen, d. h. die Funktionen, welche jeder natürlichen Zahl wieder eine solche zuordnen – (die Elemente des Kontinuums können ja durch solche Funktionen dargestellt werden) – nach den Gattungen der Variablen, die zu ihrer Definition erfordert werden, zu ordnen und auf Grund des Aufstiegs der Variablen-Gattungen, welcher analog dem der transfiniten Ordnungszahlen ist, eine Abbildung des Kontinuums auf die Menge der Zahlen der zweiten Zahlenklasse zu bewirken. Die Verfolgung dieses Zieles ist aber nicht über einen Entwurf hinausgekommen, und Hilbert hat daher später beim Abdruck der beiden genannten Vorträge in den *Grundlagen der Geometrie*[21] die Teile, welche sich auf das Kontinuumsproblem beziehen, weggelassen.

[19][1] Gehalten 1925 anläßlich einer zu Ehren des Andenkens an Weierstrass veranstalteten Zusammenkunft (*vide* [**?**]).

[20][2] Gehalten 1927 in Hamburg (*vide* [**?**]).

[21][3] Die beiden Vorträge sind in die 7. Auflage der *Grundlagen der Geometrie* als Anhang VIII u. IX aufgenommen worden (*vide* [**?**]). Dabei wurden, abgesehen von den Auslassungen, auch kleine redaktionelle Änderungen, insbesondere hinsichtlich der Schreibweise der Formeln, vorgenommen.

Gleichwohl haben die Betrachtungen, die Hilbert zur Behandlung des Kontinuumsproblems anstellte, verschiedene fruchtbare Anregungen und Gesichtspunkte geliefert.

So wurde durch die Überlegungen betreffend die rekursiven Definitionen W. Ackermann zu seiner Untersuchung „Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen“[22] angeregt. Hilbert referiert in seinem Münsterer Vortrag über die Fragestellung und das Ergebnis dieser (damals noch nicht erschienenen) Abhandlung:

> Betrachten wir die Funktion
>
> $$a + b;$$
>
> 206 | daraus entsteht durch n-fache Iteration und Gleichsetzung
>
> $$a + a + \cdots + a = a \cdot n.$$
>
> Ebenso gelangt man von
>
> $$a \cdot b \quad \text{zu} \quad a \cdot a \cdots a = a^n,$$
>
> weiter von
>
> $$a^b \quad \text{zu} \quad a^{(a^a)}, a^{(a^{(a^a)})}, \ldots\ .$$
>
> Wir bekommen so sukzessive die Funktionen
>
> $$\begin{aligned} a + b &= \varphi_1(a, b), \\ a \cdot b &= \varphi_2(a, b), \\ a^b &= \varphi_3(a, b). \end{aligned}$$
>
> $\varphi_4(a, b)$ ist der b-te Wert in der Folge:
>
> $$a, a^a, a^{(a^a)}, a^{(a^{(a^a)})}, \ldots\ .$$
>
> In entsprechender Weise gelangt man zu $\varphi_5(a, b)$, $\varphi_6(a, b)$ usw.
>
> Man könnte nun zwar $\varphi_n(a, b)$ für variables n durch Einsetzungen und Rekursionen definieren; diese Rekursionen aber wären nicht gewöhnliche sukzessive, sondern vielmehr würde man auf

[22][4] *Vide* [**?**].

eine verschränkte, nach verschiedenen Variablen zugleich genommene (simultane) Rekursion geführt werden und eine Auflösung dieser in gewöhnliche sukzessive Rekursionen gelingt erst, wenn man den Begriff der Funktionsvariablen benutzt: die Funktion $\varphi_a(a, a)$ ist ein Beispiel einer Funktion der Zahlenvariablen a, die nicht durch Einsetzungen und gewöhnliche sukzessive Rekursionen allein definiert werden kann, wenn man lediglich Zahlenvariable zuläßt[23]. Wie man unter Benutzung der Funktionsvariablen die Funktion $\varphi_n(a, b)$ definieren kann, zeigen die folgenden Formeln:

$$
\begin{aligned}
\iota(f, a, 1) &= a, \\
\iota(f, a, n+1) &= f(a, \iota(f, a, n)); \\
\varphi_1(a, b) &= a + b, \\
\varphi_{n+1}(a, b) &= \iota(\varphi_n, a, b).
\end{aligned}
$$

Hierbei bedeutet ι eine individuelle Funktion mit drei Argumenten, von denen das erste selbst eine Funktion zweier gewöhnlicher Zahlenvariablen ist.[h]

Die Untersuchung der rekursiven Definitionen ist neuerdings von Rozsa Péter fortgeführt worden. Sie bewies, daß alle die rekursiven Definitionen, welche nur nach den Werten *einer* Variablen fortschreiten und keine andere Variablenart als die freie Zahlenvariable erfordern, auf das einfachste Rekursi-
207 onsschema zurückgeführt werden können. Unter Benutzung dieses Resul|tates hat sie ferner die Beweisführung der eben genannten Ackermannschen Abhandlung wesentlich vereinfacht[24].

Diese Ergebnisse betreffen die Verwendung rekursiver Definitionen zur Gewinnung zahlentheoretischer Funktionen. In dem Hilbertschen Beweisplan tritt die rekursive Definition noch in anderer Weise auf, nämlich als Verfahren zur Bildung von Zahlen der zweiten Zahlenklasse und auch von Variablengattungen. Hierbei werden von Hilbert gewisse allgemeine Begriffsbildungen

[23][1] Für diese Behauptung hat W. Ackermann den Beweis erbracht. (Anmerkung des Hilbertschen Textes.)

[24][1] Siehe R. Péter: „Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion“ und „Konstruktion nichtrekursiver Funktionen“ (*vide* [?], [?]).

[h] [?], S. 185–186.

betreffend die Variablenarten zu Grunde gelegt, über die Hilbert in dem Vortrag „Die Grundlagen der Mathematik“ folgenden kurz zusammenfassenden Bericht gibt:

> Die *mathematischen Variablen* sind von zweierlei Art
>
> 1. die *Grundvariablen*,
> 2. die *Variablengattungen*.
>
> 1. Während man in der gesamten Arithmetik und Analysis mit der gewöhnlichen ganzen Zahl als einziger Grundvariablen auskommt, gehört jetzt einer jeden Cantorschen transfiniten Zahlklasse eine Grundvariable zu, die eben die Ordinalzahlen dieser Klasse anzunehmen fähig ist. Einer jeden Grundvariablen entspricht demgemäß eine Aussage, die sie als solche charakterisiert; diese ist implizite durch Axiome charakterisiert.
>
> Zu jeder Grundvariablen gehört eine Art von Rekursion, mit deren Hilfe man Funktionen definiert, deren Argument eine solche Grundvariable ist. Die zu der Zahlenvariablen gehörige Rekursion ist die „gewöhnliche Rekursion“, gemäß welcher eine Funktion einer Zahlenvariablen n definiert wird, indem man angibt, welchen Wert sie für $n = 0$ hat und wie man den Wert für n' aus dem für n erhält[25]. Die Verallgemeinerung der gewöhnlichen Rekursion ist die transfinite Rekursion, deren allgemeines Prinzip darin besteht, den Wert der Funktion für einen Wert der Variablen durch die vorhergehenden Funktionswerte zu bestimmen.
>
> 2. Aus den Grundvariablen leiten wir noch weitere Arten von Variablen ab, indem wir auf die Aussagen für die Grundvariablen, z. B. auf Z[26], logische Verknüpfungen anwenden. Die so definierten Variablen heißen Variablengattungen, die sie definierenden Aussagen heißen Gattungsaussagen; für diese werden wieder jedesmal neue Individualzeichen eingeführt. So liefert die Formel
>
> $$\Phi(f) \sim (x)(Z(x) \rightarrow Z(f(x)))$$
>
> das einfachste Beispiel für eine Variablengattung; diese Formel
> 208 definiert die | Gattung der Funktionsvariablen (Funktion-sein).

[25] [2] Hier ist n' der formale Ausdruck für „die auf n folgende Zahl“.

[26] [3] Die Formel $Z(a)$ entspricht der Aussage „a ist eine gewöhnliche ganze Zahl“.

Ein weiteres Beispiel ist die Formel

$$\Psi(g) \sim (f)(\Phi/\blacksquare\,/\Psi(f) \to Z(g(f)));$$

sie definiert das „Funktionenfunktion-sein“; das Argument g ist die neue Funktionenfunktionsvariable.

Für die Herstellung der höheren Variablengattungen muß man die Gattungsaussagen selbst mit Indizes versehen, wodurch ein Rekursionsverfahren ermöglicht wird.[i]

Diese Begriffsbildungen kommen insbesondere zur Anwendung in der Theorie der Zahlen der zweiten Zahlenklasse. Hier ging eine neue Anregung aus von der Hilbertschen Vermutung, daß jede Zahl der zweiten Zahlenklasse, – bei Zugrundelegung des Ausgangselementes 0, der Operation des Fortschreitens um Eins („Strichfunktion“) und des Limesprozesses, ferner der Zahlenvariablen und der Grundvariablen der zweiten Zahlenklasse –, ohne Benutzung transfiniter Rekursionen, allein mittels gewöhnlicher Rekursionen definiert werden kann.

Die ersten über die elementaren Fälle hinausgehenden Beispiele solcher Definitionen, nämlich die Definition der ersten ε-Zahl (nach Cantors Terminologie) und der ersten kritischen ε-Zahl[27] sind von P. Bernays und J. v. Neumann angegeben worden. Dabei werden bereits rekursiv definierte Variablengattungen benutzt[28].

Jedoch diese verschiedenen Betrachtungen, welche sich auf die rekursiven Definitionen beziehen, gehen schon über den engeren Bereich der beweistheoretischen Fragestellung hinaus. Für dieses engere Problemgebiet der Beweistheorie bestand ja seit Hilberts Leipziger Vortrag die Aufgabe, den Nachweis

[27][1] Unter einer ε-Zahl versteht man eine transfinite Ordnungszahl α von der Eigenschaft, daß $\alpha = \omega^\alpha$ ist. Die erste ε-Zahl ist der Limes der Folge

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots,$$

worin $\alpha_0 = 1, \alpha_{n+1} = \omega^{\alpha_n}$ ist; die erste kritische ε-Zahl ist der Limes der Folge

$$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots,$$

worin $\beta_0 = 1$ und β_{n+1} die β_n-te ε-Zahl ist.

[28][2] Vgl. die Angabe in Hilberts Vortrag „Die Grundlagen der Mathematik“ ([**?**], S. 81f.). – Die genannten Beispiele sind bisher nicht publiziert worden.

[i] [**?**], S. 69–70.

der Widerspruchsfreiheit, mit Einbeziehung des transfiniten Axioms, gemäß dem Hilbertschen Ansatz durchzuführen. Das transfinite Axiom war übrigens bald nach dem Leipziger Vortrag durch die Einführung der Auswahlfunktion $\varepsilon(A)$ (ausführlich: $\varepsilon_x A(x)$) an Stelle der vorherigen Funktion $\tau(A)$ in die Gestalt des logischen „ε-Axioms“

$$A(a) \;\rightarrow\; A(\varepsilon_x A(x))$$

209 | gebracht worden. Die Rolle dieses ε-Axioms wird von Hilbert in dem Hamburger Vortrag mit folgenden Worten erläutert:

> Die ε-Funktion kommt im Formalismus in dreifacher Weise zur Anwendung.
>
> 1. Es läßt sich mit Hilfe des ε das „alle“ und „es gibt“ definieren, nämlich folgendermaßen[29]:
>
> $$(x)A(x) \sim A(\varepsilon_x \overline{A(x)}),$$
> $$(Ex)A(x) \sim A(\varepsilon_x A(x)).$$
>
> Auf Grund dieser Definition liefert das ε-Axiom [...] die für das All- und das Seinszeichen gültigen logischen Beziehungen, wie
>
> $$(x)A(x) \;\rightarrow\; A(a) \qquad \text{(Aristotelisches Axiom)},$$
> $$\overline{(x)}A(x) \;\rightarrow\; (Ex)\overline{A(x)} \qquad \text{(Tertium non datur)}.$$
>
> 2. Trifft eine Aussage $\mathfrak{A}$ auf ein und nur ein Ding zu, so ist
>
> $\varepsilon(\mathfrak{A})$ *dasjenige Ding*, für welches $\mathfrak{A}$ gilt.
>
> Die ε-Funktion ermöglicht es also, eine solche Aussage $\mathfrak{A}$, die nur auf ein Ding zutrifft, in der Form
>
> $$a = \varepsilon(\mathfrak{A})$$
>
> aufzulösen.
>
> 3. Darüber hinaus hat das ε die Rolle der Auswahlfunktion, d. h. im Falle, wo $\mathfrak{A}$ auf mehrere Dinge zutreffen kann, ist $\varepsilon(\mathfrak{A})$ *irgendeines* von den Dingen a, auf welche $\mathfrak{A}$ zutrifft.[j]

29[1] In den beiden folgenden Formeln ist das Zeichen $\sim$ der Äquivalenz an Stelle des bei Hilbert stehenden Doppelpfeiles angewandt; dadurch wird die im Hilbertschen Text sich anschließende Bemerkung zur Einführung des Zeichens $\sim$ entbehrlich.

---

[j] [?], S. 67–68.

Das ε-Axiom kann auf verschiedene Gattungen von Variablen angewandt werden. Zur Formalisierung der Zahlentheorie genügt die Anwendung auf die Zahlenvariable, d. h. auf die Gattung der natürlichen Zahlen. Man hat dann zu dem logischen Formalismus und den Axiomen der Gleichheit noch die zahlentheoretischen Axiome

$$\begin{gathered} a' \neq 0, \\ a' = b' \to a = b, \end{gathered}$$

ferner die Rekursionsgleichungen für die Addition und Multiplikation[30] und das Schlußprinzip der vollständigen Induktion hinzuzunehmen. Dieses Schlußprinzip kann mittels des ε-Symbols durch die Formel

$$\varepsilon_x A(x) = b' \;\to\; \overline{A(b)}$$

in Verbindung mit der elementaren Formel

$$a \neq 0 \;\to\; a = (\delta(a))'$$

210 | formalisiert werden. Die zusätzliche Formel für das ε-Symbol entspricht einer Teilaussage des Prinzips der kleinsten Zahl[31], und die hinzugefügte elementare Formel stellt den Satz dar, daß es zu jeder von 0 verschiedenen Zahl eine vorhergehende gibt.

Zur Formalisierung der Analysis muß man das ε-Axiom außer auf die Zahlenvariable noch auf eine höhere Gattung von Variablen anwenden. Man hat hier verschiedene Möglichkeiten, je nachdem man den Allgemeinbegriff des Prädikates, der Menge oder der Funktion bevorzugt. Hilbert wählt die Gattung der Funktionsvariablen, d. h. genauer der variablen zahlentheoretischen Funktion eines Arguments.

Die Einführung der höheren Variablengattung ermöglicht es, das Schlußprinzip der vollständigen Induktion, nach dem Verfahren Dedekinds, durch eine Definition des Begriffes der natürlichen Zahl zu ersetzen.

Das wesentliche Moment der Erweiterung bei diesem Formalismus beruht auf der Verbindung des ε-Axioms mit der Einsetzungsregel für die Funktionsvariable, wodurch insbesondere die „imprädikativen Definitionen“ von

[30][2] Vgl. hierzu die Anmerkung 2[1] auf S. 2 in diesem Referat.

[31][1] Das heißt des Prinzips der Existenz einer kleinsten Zahl in jeder nicht leeren Zahlenmenge.

Funktionen, d. h. die Definitionen von Funktionen unter Bezugnahme auf die Gesamtheit der Funktionen, in den Formalismus aufgenommen sind.

Die Aufgabe des Nachweises der Widerspruchsfreiheit für den zahlentheoretischen Formalismus und für die Analysis ist hiernach eine mathematisch scharf umgrenzte. Zu ihrer Behandlung hatte man den Hilbertschen Ansatz zur Verfügung, und es schien anfangs, daß es nur einer verständnisvollen und eingehenden Bemühung bedürfe, um diesen Ansatz zu einem vollständigen Beweis auszugestalten.

Diese Vorstellung hat sich jedoch als irrig erwiesen. Trotz intensiver Bemühungen und mannigfaltiger beigetragener Beweisgedanken ist man nicht zu dem gewünschten Ziel gelangt. Schrittweise wurden die gehegten Erwartungen enttäuscht, wobei sich auch geltend machte, daß im Gebiete der metamathematischen Überlegungen die Gefahr eines Versehens besonders groß ist.

Erst schien der Widerspruchsfreiheitsbeweis für die Analysis zu gelingen, doch dieser Anschein erwies sich bald als Täuschung. Hernach glaubte man, wenigstens für den zahlentheoietischen Formalismus zur Lösung des Problems gelangt zu sein. In dieses Stadium fällt insbesondere Hilberts Hamburger Vortrag „Die Grundlagen der Mathematik“, der in seinem Schlußteil ein Referat über einen Widerspruchsfreiheitsbeweis von Ackermann bringt, sowie der 1928 in Bologna gehaltene Vortrag „Probleme der Grundlegung der Mathematik“[32], in welchem Hilbert einen Überblick über den damaligen Problemstand der Beweistheorie gab und teils Probleme der Widerspruchsfreiheit, teils Probleme der Vollständigkeit aufstellte.

211 | Die Probleme der Widerspruchsfreiheit knüpft Hilbert hier alle an das ε-Axiom, wobei er für die verschiedenen Formalismen die durch sie umfaßten Bereiche der Mathematik angibt.

In dieser Darlegung spricht sich die damals von allen Beteiligten vertretene Auffassung aus, daß für den Formalismus der Zahlentheorie durch die Untersuchungen Ackermanns und v. Neumanns der Nachweis der Widerspruchsfreiheit bereits geliefert sei.

Daß tatsächlich auch dieses Ziel noch nicht erreicht war, erkannte man erst, als man auf Grund eines allgemeinen Theorems von K. Gödel zweifelhaft geworden war, ob sich überhaupt der Nachweis der Widerspruchsfreiheit für den zahlentheoretischen Formalismus mit elementaren kombinatorischen Methoden im Sinne des „finiten Standpunktes“ erbringen lasse.

[32][2] *Vide* [**?**].

Das erwähnte Theorem bildet eines der verschiedenen bedeutsamen Ergebnisse der Gödelschen Abhandlung „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I“[33], welche in betreff des Verhältnisses zwischen Inhaltlichkeit und Formalismus – dessen Untersuchung Hilbert in seinem Vortrag „Axiomatisches Denken“ als einen der Zwecke der Beweistheorie genannt hatte[k] – wesentliche Aufklärung gebracht hat.

Die Aussage des Theorems besteht darin, daß für einen widerspruchsfreien Formalismus, welcher den üblichen Logikkalkul und die Zahlentheorie in sich schließt, ein Nachweis seiner Widerspruchsfreiheit nicht innerhalb dieses Formalismus selbst dargestellt werden kann, genauer gesagt: daß der elementar-arithmetische Satz, in den sich die Behauptung der Widerspruchsfreiheit des Formalismus – auf Grund einer bestimmten Art der Numerierung der Symbole und Variablen und einer daraus abgeleiteten Numerierung der Formeln sowie auch einer solchen der endlichen Formelfolgen – übersetzen läßt, nicht durch den Formalismus ableitbar ist.

Hiermit ist zwar unmittelbar nichts über die Möglichkeit finiter Widerspruchsfreiheitsbeweise gesagt; doch ergibt sich ein Kriterium, dem jeder Nachweis der Widerspruchsfreiheit für den Formalismus der Zahlentheorie oder für einen umfassenderen Formalismus genügen muß: es muß in dem Nachweis eine Überlegung vorkommen, die sich nicht – auf Grund der arithmetischen Übersetzung – in dem betreffenden Formalismus darstellen läßt.

An Hand dieses Kriteriums wurde man gewahr, daß die vorhandenen Widerspruchsfreiheitsbeweise noch nicht für den vollen Formalismus der Zahlentheorie ausreichten[34].

212 Darüber hinaus wurde sogar die Vermutung erweckt, daß überhaupt im | Rahmen der elementaren anschaulichen Betrachtungen, wie sie dem von Hilbert der Beweistheorie zu Grunde gelegten „finiten Standpunkt“ entsprechen, ein Nachweis für die Widerspruchsfreiheit des zahlentheoretischen Formalismus nicht erbracht werden könne.

[33][1] *Vide* [**?**].

[34][2] Der Beweis v. Neumanns bezog sich vornherein auf einen engeren Formalismus; doch schien es, daß die Ausdehnung auf den ganzen Formalismus der Zahlentheorie keine Schwierigkeit mache.

---

[k] *Vide* p. 8, footnote *g*.

Diese Vermutung ist bisher noch nicht widerlegt worden[35]. Jedoch haben K. Gödel und G. Gentzen bemerkt[36], daß unter der Voraussetzung der Widerspruchsfreiheit der von A. Heyting formalisierten intuitionistischen Arithmetik[37] die Widerspruchsfreiheit des üblichen Formalismus der Zahlentheorie ziemlich einfach nachzuweisen ist[38].

Vom Standpunkt des Brouwerschen Intuitionismus ist hiermit der Nachweis für die Widerspruchsfreiheit des Formalismus der Zahlentheorie geliefert. Eine Widerlegung der genannten Vermutung liegt aber insofern nicht vor, als die intuitionistische Arithmetik über den Bereich der anschaulichen, finiten Betrachtung hinausgeht, indem sie neben den eigentlichen mathematischen Objekten auch das inhaltliche Beweisen zum Gegenstand macht und dazu des abstrakten Allgemeinbegriffs der einsichtigen Folgerung bedarf. —

Es sei hier eine kurze Zusammenstellung gegeben von verschiedenen finiten Widerspruchsfreiheitsbeweisen, welche für Teilformalismen der Zahlentheorie erbracht worden sind. Dabei werde mit F_1 der Formalismus bezeichnet, der aus dem Logikkalkul (der ersten Stufe) durch Hinzufügung der Gleichheitsaxiome und der zahlentheoretischen Axiome, jedoch unter Beschränkung der Anwendung der vollständigen Induktion auf Formeln ohne gebundene Variablen, erhalten wird; und mit F_2 werde der Formalismus bezeichnet, der aus F_1 durch Hinzunahme des ε-Symbols nebst dem ε-Axiom hervorgeht, – wobei dann die Formeln und Schemata für die Allzeichen und Seinszeichen durch explizite Definitionen für das Allzeichen und das Seinszeichen vertreten werden können[39]. Ein Nachweis der Widerspruchsfreiheit von

[35][1] Siehe aber den Nachtrag S. 24.

[36][2] K. Gödel: „Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie“ (*vide* [**?**]). G. Gentzen hat seine bereits im Druck befindliche Abhandlung über den Gegenstand auf Grund des Erscheinens der Gödelschen Note ähnlichen Inhaltes zurückgezogen.

[37][3] A. Heyting: „Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik“ und „Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik“ (*vide* [**?**] und [**?**]).

[38][4] Es kann nämlich gezeigt werden, daß eine jede in dem gewöhnlichen Formalismus der Zahlentheorie ableitbare Formel, welche keine Formelvariable, keine Disjunktion und kein Seinszeichen enthält, auch in dem Heytingschen Formalismus ableitbar ist.

[39][5] Siehe in diesem Referat S. 16. – Betreffs der Gleichheitsaxiome ist zu bemerken, daß diese beim Formalismus F_2 in der allgemeinen Form

$$a = a, \quad a = b \;\rightarrow\; (A(a) \rightarrow A(b))$$

anzusetzen sind, wodurch insbesondere die Formel

$$a = b \;\rightarrow\; \varepsilon_x A(x,a) = \varepsilon_x A(x,b)$$

F_2 ergibt zugleich die Widerspruchsfreiheit von F_1.

213 | Die Widerspruchsfreiheit von F_2 wird erwiesen:

1. durch einen Beweis von W. Ackermann, welcher von dem in Hilberts Leipziger Vortrag „Die logischen Grundlagen der Mathematik“ dargelegten Hilbertschen Ansatz ausgeht[40];

2. durch einen Beweis von J. v. Neumann, der von dem gleichen Ansatz ausgeht[41];

3. mittels eines zweiten bisher nicht publizierten Hilbertschen Ansatzes, der von Ackermann durchgeführt wurde; der Gedanke dieses Ansatzes besteht darin, daß an Stelle der Ersetzung der ε-Symbole durch Zahlwerte ein disjunktives Schlußverfahren zur Elimination der ε-Symbole angewandt wird[42].

Die Widerspruchsfreiheit von F_1 wird erwiesen

1. durch einen Beweis von J. Herbrand, der sich auf ein allgemeines, von Herbrand in seiner Thèse „Recherches sur la théorie de la démonstration“[43] zum ersten Male aufgestelltes und bewiesenes Theorem über den Logikkalkul stützt[44];

214 | 2. durch einen Beweis von G. Gentzen, der sich, aus einer von Gentzen ge-

ableitbar wird. Beim Formalismus F_1 kann die Formel

$$a = b \ \rightarrow \ (A(a) \rightarrow A(b))$$

durch die beiden spezielleren Axiome

$$a = b \ \rightarrow \ (a = c \rightarrow b = c), \quad a = b \rightarrow a' = b'$$

vertreten werden.

[40][1] In der Ackermannschen Dissertation „Begründung des ‚tertium non datur‘ mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit“ (*vide* [**?**]) ist der Beweis in seinem Sohlußteil noch nicht genau ausgeführt. Ackermann hat hernach aber eine vollständige und zugleich vereinfachte Beweisführung geliefert. Von dieser definitiven Fassung des Ackermannschen Beweises liegt bisher keine Veröffentlichung vor, sondern nur der bereits erwähnte Bericht Hilberts in seinem zweiten Hamburger Vortrag „Die Grundlagen der Mathematik“ sowie der etwas ausführlichere „Zusatz“ von P. Bernays, der zugleich mit dem Vortrag erschienen ist (*vide* [**?**], [**?**] (diese Ausgabe Kap. **??**, S. **??** ff.)). (Die hierin am Schluß stehende Bemerkung betreffend die Einbeziehung der vollständigen Induktion muß fallen gelassen werden.)

[41][2] J. v. Neumann: „Zur Hilbertschen Beweistheorie“ (*vide* [**?**]).

[42][3] Vgl. die Angabe in dem Vortrag von P. Bernays „Methoden des Nachweises von Widerspruchsfreiheit und ihre Grenzen“ (*vide* [**?**], diese Ausgabe Kap. **??**, S. **??** ff.).

[43][4] *Vide* [**?**].

[44][5] J. Herbrand: „Sur la non-contradiction de l'arithmétique“ (*vide* [**?**]).

fundenen Verschärfung und Erweiterung des eben erwähnten Herbrandschen Theorems ergibt[45].

Über diese Ergebnisse, welche hauptsächlich für die theoretische Logik und die elementare Axiomatik von Bedeutung sind, und die erwähnte Aufdeckung der Beziehung zwischen dem üblichen zahlentheoretischen Formalismus und demjenigen der intuitionistischen Arithmetik ist man einstweilen in der Behandlung der Probleme der Widerspruchsfreiheit nicht hinausgekommen.

Doch haben die Probleme der Vollständigkeit, welche Hilbert in seinem Vortrag „Probleme der Grundlegung der Mathematik" stellte, nach verschiedener Richtung eine Behandlung erfahren.

Bei dem einen dieser Probleme handelt es sich um den Nachweis für die Vollständigkeit des Systems der logischen Regeln, die in dem Logikkalkul (der ersten Stufe) formalisiert sind. Dieser Nachweis wurde von K. Gödel in dem Sinne erbracht, daß er zeigte[46]: Wenn eine Formel des Logikkalkuls der ersten Stufe als unableitbar nachgewiesen werden kann, so kann auf Grund dieser Feststellung im Rahmen der Zahlentheorie (mit Benutzung des „tertium non datur", insbesondere in der Form des Prinzips der kleinsten Zahl) ein Beispiel gegen die Allgemeingültigkeit jener Formel aufgestellt werden.

Das andere Vollständigkeitsproblem betrifft die Axiome der Zahlentheorie; es soll gezeigt werden: Wenn (bei Zugrundelegung der Axiome der Zahlentheorie) eine zahlentheoretische Aussage als widerspruchsfrei erwiesen werden kann, so ist sie auch beweisbar. Diese Behauptung schließt zugleich die folgende in sich: „Wenn für einen Satz[47] $\mathfrak{S}$ die Widerspruchsfreiheit mit den Axiomen der Zahlentheorie nachgewiesen werden kann, so kann nicht auch für $\overline{\mathfrak{S}}$ (das Gegenteil von $\mathfrak{S}$) die Widerspruchsfreiheit mit jenen Axiomen nachgewiesen werden."

Diese Aufgabestellung enthält insofern eine Unbestimmtheit, als nicht angegeben ist, welcher Formalismus des logischen Schließens zu Grunde gelegt werden soll. Es zeigte sich jedoch, daß in keinem Falle, wie man sich auch betreffs des logischen Formalismus entscheiden mag, sofern man nur an der Forderung einer strengen Formalisierung der Beweise festhält, die angegebene

[45][1] G. Gentzen: „Untersuchungen über das logische Schließen" (*vide* [**?**]).

[46][2] K. Gödel: „Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls" (*vide* [**?**]).

[47][3] Gemeint ist ein solcher Satz, der sich im Formalismus der Zahlentheorie ohne Benutzung von freien Variablen darstellen läßt.

Vollständigkeitsbehauptung zu Recht besteht.

Dieses Ergebnis stammt wiederum von K. Gödel, der in der bereits ge-
215 |nannten Abhandlung „Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I“ folgendes allgemeine Theorem bewies: Wenn ein Formalismus $\mathfrak{F}$ widerspruchsfrei in dem verschärften Sinne ist, daß die Negation einer Formel $(x)\mathfrak{A}(x)$ jedenfalls dann unableitbar ist, wenn für jede Ziffer $\mathfrak{z}$ die Formel $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ in $\mathfrak{F}$ ableitbar ist, und wenn der Formalismus hinlänglich umfassend ist, so daß er den Formalismus der Zahlentheorie (oder einen diesem gleichwertigen Formalismus) in sich schließt, dann läßt sich eine Formel angeben von der Eigenschaft, daß weder sie selbst noch auch ihre Negation in $\mathfrak{F}$ ableitbar ist[48]. Der Formalismus $\mathfrak{F}$ besitzt also unter den genannten Bedingungen nicht die Eigenschaft der deduktiven Vollständigkeit (im Sinne der von Hilbert für den Fall der Zahlentheorie formulierten Behauptung)[49].

Noch ehe dieses Gödelsche Resultat bekannt war, hatte Hilbert die ursprüngliche Form seines Vollständigkeitsproblems bereits aufgegeben. In seinem Vortrag „Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre“[50] behandelte er dieses Problem für den Spezialfall von Formeln der Gestalt $(x)\mathfrak{A}(x)$, welche außer x keine gebundene Variable enthalten. Dabei modifizierte er jedoch

48[1] Diese Formel hat überdies die spezielle Gestalt

$$(x)(\varphi(x) \neq 0),$$

wobei $\varphi(x)$ eine durch elementare Rekursionen definierte Funktion ist, und die Unableitbarkeit dieser Formel sowie andrerseits die Richtigkeit und die Ableitbarkeit der Formel $\varphi(\mathfrak{z}) \neq 0$ für jede vorgelegte Ziffer $\mathfrak{z}$ folgt, ohne die genannte Verschärfung der Forderung der Widerspruchsfreiheit, schon aus der Widerspruchsfreiheit im gewöhnlichen Sinne.

49[2] Eine andere Art von Unvollständigkeit hat kürzlich Th. Skolem für den Formalismus der Zahlentheorie nachgewiesen: „Über die Unmöglichkeit einer vollständigen Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems“ (*vide* [**?**]). Der Formalismus ist insofern nicht „kategorisch“ (das Wort in Analogie zu der Bezeichnung von O. Veblen gebraucht), als man – unter inhaltlicher Benutzung des „tertium non datur“ für die ganzen Zahlen – eine Interpretation der Beziehungen $=$, $<$ und der Funktionen a', $a+b$, $a \cdot b$ mit Bezug auf ein System von Dingen (es sind zahlentheoretische Funktionen) angeben kann, derart, daß einerseits jeder im Formalismus der Zahlentheorie ableitbare zahlentheoretische Satz auch für die genannte Interpretation gültig bleibt, daß aber andererseits das System keineswegs der Zahlenreihe (in Bezug auf die betrachteten Beziehungen) isomorph ist, daß es vielmehr außer einer der Zahlenreihe isomorphen Teilmenge auch Elemente enthält, die (im Sinne der Interpretation) *größer* sind als alle Elemente jener Teilmenge.

50[3] Gehalten 1930 in Hamburg (*vide* [**?**]).

die Aufgabestellung durch die Hinzufügung einer Schlußregel, welche besagt, daß eine Formel $(x)\mathfrak{A}(x)$ von der betrachteten Art stets dann als Ausgangsformel genommen werden darf, wenn sich zeigen läßt, daß für jede Ziffer $\mathfrak{z}$ die Formel $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ eine wahre Aussage (gemäß der elementar-arithmetischen Deutung) darstellt.

216 | Bei der Hinzunahme dieser Regel ergibt sich das gewünschte Resultat sehr einfach aus der Tatsache, daß eine Formel von der betrachteten speziellen Gestalt, sofern sie widerspruchsfrei ist, auch im Sinne der inhaltlichen Deutung zutreffend ist[51].

Das Verfahren, durch welches hier Hilbert die positive Lösung des Vollständigkeitsproblems (für den von ihm betrachteten Spezialfall) sozusagen erzwingt, bedeutet ein Abgehen von dem vorherigen Programm der Beweistheorie. In der Tat wird ja durch die Einführung der zusätzlichen Schlußregel die Forderung einer restlosen Formalisierung der Schlüsse fallen gelassen.

Man braucht diesen Schritt nicht als endgültig zu betrachten. Wohl aber wird man angesichts der Schwierigkeiten, die sich bei dem Problem der Widerspruchsfreiheit gezeigt haben, die Möglichkeit einer Erweiterung des bisherigen methodischen Rahmens der metamathematischen Überlegungen ins Auge fassen.

Dieser bisherige Rahmen ist auch durch die Grundgedanken der Hilbertschen Beweistheorie nicht eindeutig gefordert. Für die Weiterentwicklung der Beweistheorie wird es darauf ankommen, ob es gelingt, den finiten Standpunkt in sachgemäßer Weise so auszugestalten, daß – ungeachtet der Beschränkungen, welche der beweistheoretischen Zielsetzung durch die Gödelschen Ergebnisse auferlegt werden – doch das hauptsächliche Ziel, der Nachweis der Widerspruchsfreiheit für die übliche Analysis, erreichbar wird.

Während der Drucklegung dieses Referates ist von G. Gentzen der Nachweis für die Widerspruchsfreiheit des vollen zahlentheoretischen Formalismus erbracht worden[52], durch eine Methode, die den grundsätzlichen Anforderungen des finiten Standpunktes durchaus entspricht. Damit findet zugleich die

[51][1] Auf diese Tatsache hatte Hilbert schon früher einmal, in dem zweiten Hamburger Vortrag „Die Grundlagen der Mathematik“ hingewiesen (*vide* [**?**], S. 78). Dort benutzte er sie, um zu zeigen, daß der finite Nachweis der Widerspruchsfreiheit für einen Formalismus zugleich ein allgemeines Verfahren liefert, um aus einem in dem Formalismus geführten Beweis für einen elementaren arithmetischen Satz, etwa vom Charakter des Fermatschen Satzes, einen finiten Beweis zu gewinnen.

[52][2] Dieser Beweis wird demnächst in den *Mathematischen Annalen* veröffentlicht werden (*vide* [**?**]).

erwähnte Vermutung betreffs der Reichweite der finiten Methoden (S. 20) ihre Widerlegung.