Bernays Project: Text No. 22

Betrachtungen zum Paradoxon von Thoralf Skolem† (1957)

Considerations regarding the paradox of Thoralf Skolem

(*Avhandlinger utgitt av Det Norske Videnskaps-Akademie i Oslo*, S. 3–9; repr. in *Abhandlungen*, S. 113–118)

3/A113 | Vor jetzt etwa 35 Jahren, anläßlich eines Kongresses in Helsingfors, machte Th. Skolem zuerst auf eine paradoxe Konsequenz eines Theorems von Löwenheim aufmerksam, für welches er zwei Jahre vorher mittels der nach ihm benannten logischen Normalform einen vereinfachten Beweis gegeben hatte. Dieses bekannte Löwenheimsche Theorem besagt, daß für eine jede mathematische Theorie, die im Rahmen der elementaren Prädikatenlogik – d. h. ohne gebundene Prädikatenvariablen – axiomatisiert ist, sofern sie überhaupt ein erfüllendes Modell hat, dann auch ein solches Modell existiert, bei welchem die Individuen natürliche Zahlen sind. Der Satz läßt sich auf den Fall ausdehnen, daß in dem Axiomensystem außer eigentlichen Axiomen auch ein oder mehrere Axiomen*schemata* auftreten, worin als Parameter ein beliebig nach den formativen Regeln des Axiomensystems bildbares Prädikat bzw. eine im gleichen Sinne beliebige Menge oder Funktion vorkommt.

Skolem bemerkte nun, daß sich dieses Theorem auf die axiomatische Mengenlehre anwenden läßt, sofern diese gegenüber der ursprünglichen Zermeloschen Fassung durch die Präzisierung des Begriffs der definiten Eigenschaft verschärft ist. Die Möglichkeit einer solchen Verschärfung, wodurch sich das Axiomensystem kalkülmäßig durch eigentliche Axiome und Schemata darstellen läßt, war kurz zuvor von Skolem und auf andere Weise von A. Fraenkel erkannt worden. Übrigens gelang es J. v. Neumann sogar, ein System von endlich vielen Axiomen (ohne Schemata) für die Mengenlehre aufzustellen.

†The facing page of the original text reads “Der Norwegischen Akademie der Wissenschaften zum 100-jährigen Jubiläum dargebracht”(Dedicated to the Norwegian Academy of Science on the occasion of its 100th Anniversary).

Dadurch ergab sich die Möglichkeit solcher Modelle der Mengenlehre, worin die Mengen durch natürliche Zahlen repräsentiert werden. Diese Möglichkeit ist darum sehr paradox, weil gerade nach den Sätzen der Mengenlehre
4 die Kardinalzahlen der vorkommenden Mengen in | schwindelhafte Höhe steigen, so daß man jedenfalls weit über die Unendlichkeit der Zahlenreihe (das Abzählbar-Unendliche) hinauskommt.

Daß ein eigentlicher Widerspruch hier nicht vorliegt, ergibt sich, wie man weiß, aus dem Umstand, daß die Abzählungen, die im axiomatischen Rahmen als solche fungieren, noch nicht alle Möglichkeiten von Abzählungen
A114 erschöpfen. Der Mengenbegriff erfährt durch die | axiomatische Festlegung eine Einschränkung, derart, daß man, wenn man generell auf der Forderung axiomatischer Präzisierung besteht, von „Menge“ nur relativ zu einem jeweils festgelegten Rahmen sprechen kann, und diese Relativierung erstreckt sich auf eine Reihe weiterer Begriffe, die eng mit dem Mengenbegriff verbunden sind, so insbesondere den Begriff der umkehrbar eindeutigen Abbildbarkeit zweier Gesamtheiten, und damit auch auf den Begriff der Mächtigkeit (verallgemeinerter Anzahlbegriff), sowie speziell den der Abzählbarkeit.

Man hat zunächst den Eindruck, daß das vorgefundene Paradoxon vor allem die Scheinbarkeit der Mächtigkeitsunterschiede und speziell das Illusorische eines eigentlich Überabzählbaren erweise. Zugleich auch wird der Gedanke angeregt, ob nicht, angesichts der festgestellten Relativität, einer axiomatischen Anlage der Mathematik und insbesondere der Analysis ein operativer Aufbau vorzuziehen sei.

Eine operative Auffassung der Mathematik wird von vielen verfochten. Für diese ist charakteristisch, daß sie den Gegenstand der Mathematik nicht in etwas vorgängig Vorliegendem erblickt, das durch die Begriffsbildungen und axiomatischen Beschreibungen für unser Erkennen zugänglich gemacht werden soll, sondern das mathematische Operieren selbst und die Gegenständlichkeiten, die darin zustande kommen, als das Thema der Mathematik ansieht. Die Mathematik soll hiernach ihre Gegenstände gewissermaßen selbst erzeugen. Damit ist eo ipso der Charakter des Arithmetischen vorgezeichnet, da ja die Strukturen des operativen Erzeugens nicht wesentlich allgemeiner sind als die der Zahlenreihe.

Hierin liegt einerseits eine Stärke, andererseits eine Schwäche dieses Standpunktes. Eine Stärke besitzt er insofern, als ja das arithmetische (konstruktive, kombinatorische) Denken methodisch durch seine Elementarität und Anschaulichkeit ausgezeichnet ist. Dennoch mag es bezweifelt werden, ob wir mit diesem für die Mathematik auskommen und ob eine im Sinne des

5 Operativen sozusagen monistische | Konzeption von der Mathematik ihrem Gehalt – auch nur soweit er schon besteht – voll gerecht werden kann.

Dieser Gedanke wird insbesondere bestärkt, wenn wir die Unternehmungen eines operativen Aufbaus der Analysis betrachten, wie sie in neuerer Zeit unter verschiedenen programmatischen Einstellungen erfolgt sind. Gemeinsam zeigt sich bei allen diesen Arten des Aufbaus, daß wir hier durch Unterscheidungen beschwert werden, welche für die geometrische Idee des Kontinuums von keiner Relevanz und andererseits für das widerspruchslose Funktionieren der Begriffsbildungen nicht erforderlich sind. Das übliche A115 Verfahren der klassischen Analysis | erweist sich in dieser Beziehung als weit überlegen; und wenn geschichtlich die Behandlung der Analysis mit einem operativen Verfahren begonnen hätte, so wäre die Auffindung der Möglichkeit der soviel einfacheren klassischen Methoden eine eminente Entdeckung gewesen, kaum weniger, als sie ja nach anderer Richtung, nämlich gegenüber der Unschärfe des vorherigen Operierens in der Analysis, de facto einen eminenten Fortschritt bedeutete.

Der Sinn einer angemessenen Begriffsbildung für die Analysis liegt allem Anschein nach in einem geeigneten Kompromiß. Wir können uns das etwa folgendermaßen plausibel machen. Die widerstrebenden Momente für die zu wählende Begriffsbildung sind diejenigen der in der Idee des Kontinuums intendierten Homogenität einerseits und des Erfordernisses der begrifflichen Unterscheidungen für die Maßbestimmung der Größen andererseits. In der Zahlenreihe ist arithmetisch betrachtet jedes Element ein Individuum mit seinen ganz besonderen Eigenschaften; geometrisch angesehen haben wir hier bloß die Aufeinanderfolge von sich wiederholendem Gleichartigen. Die Aufgabe bei der Bildung einer Theorie des Kontinuums ist nicht einfach ein Beschreiben, sondern eine Versöhnung zweier auseinanderstrebender Tendenzen. Bei der operativen Behandlung erhält die eine so sehr das Übergewicht, daß dabei die Homogenität zu kurz kommt.

Die Untersuchungen über das Effektive und über die Feinstruktur in den Bildungen von Zahlenfolgen und Zahlenmengen haben ihre unstreitige Bedeutung für die ihnen spezifische Richtung der Fragestellung. Die hier gewonnenen Einsichten enthalten jedoch keinen eindeutigen Hinweis darauf, daß das gebräuchliche Verfahren der Analysis durch die stärker arithmetischen Methoden ersetzt werden sollte.

6 | Die Methode, auf welcher das Vorgehen in der klassischen Analysis beruht, besteht ihren logischen Mitteln nach in der Anwendung einer inhaltlichen Logik der „zweiten Stufe“, bei welcher Allgemeinbegriffe wie „Aussage“,

„Menge“, „Folge“, „Funktion“ usw. in einer ungebundenen, nicht näher spezifizierten Weise verwendet werden. Diese Logik der zweiten Stufe zeigt ihre Stärke nicht nur in ihrer Anwendung für die Theorie des Kontinuums, sondern allgemein darin, daß sie die Kennzeichnung mathematischer Strukturen, die eventuell auch überabzählbar sein können, durch explizite Definitionen erlaubt. Nämlich dem, was man „implizite Definitionen“ von mathematischen Gegenständen zu nennen pflegt, entspricht eine explizite Definition eines Strukturganzen, worin jene Gegenstände als unselbständige Bestandteile auftreten. Auch die modelltheoretischen Begriffe der Erfüllbarkeit und der Kategorizität finden hier ihre unproblematische Anwendung.

A116 | Freilich besteht gegenüber dieser Logik der zweiten Stufe der Vorwurf einer gewissen Unschärfe in den Begriffen, und es ist die Absicht der neueren verschärften Form der Axiomatik, diesem Mangel abzuhelfen. Die Methoden hierfür sind durch die Logistik und die axiomatische Mengenlehre ausgebildet worden. Daß jedoch damit die Präzisierung nicht in einer völlig adäquaten Weise gelingt, wird durch das Phänomen der besprochenen Relativität der höheren Allgemeinbegriffe zur Evidenz gebracht.

Vergegenwärtigen wir uns diese noch einmal anhand eines Beispieles. Die Eigenschaft der Lückenlosigkeit einer Ordnung drückt sich in der Logik der zweiten Stufe durch die Bedingung aus, daß jedes echte Anfangsstück der Ordnung, das kein letztes Element hat, ein unmittelbar folgendes besitzt. Hier tritt der allgemeine Mengenbegriff vermittels des echten Anfangsstückes auf. Wird nun dieser präzisiert, indem gewisse Anweisungen für die Gewinnung von Mengen gegeben werden, so wird dadurch die Mannigfaltigkeit der in Betracht kommenden Anfangsstücke eingeengt und dadurch die Bedingung abgeschwächt. Das bedeutet, daß Ordnungen als lückenlos zugelassen werden, die bei einer hinlänglichen Erweiterung des Mengenbegriffes (d. h. bei der Zulassung weiterer Prozesse für die Bildung von Mengen) nicht mehr als lückenlos gelten können.

7 | Die hier betrachtete, mit der formalen Präzisierung verbundene Schwierigkeit kommt übrigens nicht nur bei der Charakterisierung überabzählbarer Strukturen, sondern speziell auch bei derjenigen der Struktur der Zahlenreihe zur Geltung. Im Sinne von Dedekind können wir erklären, daß eine Menge M die Struktur der Zahlenreihe mit Bezug auf eine Abbildung φ (von M in sich) besitzt, wenn φ umkehrbar eindeutig ist und M ein Element a hat, das nicht als φ-Bild auftritt, und von der Eigenschaft, daß keine echte Teilmenge von M existiert, welche a enthält, und zugleich mit einem Element c auch $\varphi(c)$ enthält. Hier kann wiederum eine engere Festlegung des auftretenden Begrif-

fes der Teilmenge bewirken, daß die aufgestellte Bedingung durch Modelle erfüllt wird, denen wir auf Grund der unbeschränkten Bedingung die Struktur der Zahlenreihe absprechen. Der Sachverhalt stellt sich gleichermaßen ein, wenn wir anstelle der expliziten Strukturdefinition ein Axiomensystem zur Kennzeichnung der Zahlenreihe verwenden. In der gebräuchlichen Form eines solchen Axiomensystems hat man das Axiom der vollständigen Induktion, in dem der Allgemeinbegriff der Aussage (des Prädikates) auftritt. Bei der formalen Verschärfung der Axiomatik tritt anstelle dieses Axioms ein formales Schlußprinzip, bei welchem der Umkreis der zugelassenen Prädikate durch
A117 eine Einsetzungsregel formal | abgegrenzt wird. Auch durch diese Einengung entsteht die Möglichkeit von Modellen der Zahlentheorie, welche alle in dem formalen Rahmen beweisbaren Sätze erfüllen, aber, losgelöst von diesen betrachtet, sich als abweichend von der Struktur der Zahlenreihe erweisen. Es war wiederum Skolem, der diesen Sachverhalt der „Nichtcharakterisierbarkeit" der Zahlenreihe durch ein formalisiertes Axiomensystem an drastischen Beispielen aufzeigte.

Im Ganzen könnte hiernach der Erfolg der verschärften axiomatischen Präzisierung als höchst fragwürdig erscheinen. Dabei wird aber der Umstand nicht berücksichtigt, daß es Rahmensysteme gibt, für welche – wie sich durch die axiomatische und logistische Analyse der mathematischen Theorien gezeigt hat – innerhalb der klassischen Mathematik kein Erfordernis zu ihrer Überschreitung besteht. Der Bereich der Mengen und Funktionen, wie er z. B. durch die Axiomatik der Mengenlehre geliefert wird, besitzt eine solche Geschlossenheit, daß bei den Begriffsbildungen und Beweisführungen die formal axiomatische Beschränkung kaum fühlbar wird.

8 | Es kommt noch der Umstand hinzu, daß von der für die Allgemeinbegriffe bestehenden Relativität die mengentheoretischen Sätze nicht betroffen werden. Der Relativismus bedeutet ja nicht etwa, daß in *einem* Rahmen der Mengenlehre das Kontinuum als überabzählbar, in einem *anderen* als abzählbar erwiesen würde. Die Diskrepanz besteht vielmehr nur darin, daß die Gesamtheit von Dingen, die in einem mengentheoretischen System z. B. die Menge der Teilmengen der Zahlenreihe repräsentiert, in einem umfassenderen System abzählbar sein kann; dort aber fungiert sie dann auch nicht als Repräsentation jener Menge von Teilmengen, und es verbleibt somit die Unmöglichkeit, die Zahlen auf die Zahlenmengen eindeutig abzubilden. Solchermaßen sind trotz der Relativität der Mengenbegriffe die Mächtigkeitssätze der Cantorschen Mengenlehre invariant gegenüber dem axiomatischen Rahmen.

Freilich muß zugestanden werden, daß durch diese Relativität der Umstand uns stärker zum Bewußtsein kommt, daß die höheren Mächtigkeiten in der Mengenlehre sozusagen nur intendiert, nicht eigentlich aufgebaut sind. In diesem Sinne kommt den Abstufungen der Mächtigkeiten eine gewisse Uneigentlichkeit zu.

Öfters wird dem Gewahrwerden dieses Sachverhaltes dadurch Ausdruck gegeben, daß man erklärt, in „Wirklichkeit“ sei alles in der Mathematik abzählbar. Diese Formulierung ist jedoch insofern irreführend, als sie der wesentlichen, sowohl in der operativen Mathematik wie in der Betrachtung
A118 der formalen Axiomensysteme sich äußernden | Tatsache nicht Rechnung trägt, daß das mathematische Denken grundsätzlich über jedes abzählbare System hinausgeht. Die mathematische Begriffsbildung hat sowohl bei einem konstruktiven Vorgehen wie auch bei einer Stufentheorie, wenn diese nicht willkürlich begrenzt wird, oder auch in der Reihe der aufsteigenden Systeme axiomatischer Mengenlehren, als Rahmen die offene, inhaltliche zweite Zahlenklasse. Diese stellt etwas im eigentlichen Sinne Überabzählbares dar, freilich kann sie auch nicht als eine bestimmte mathematische Struktur angesprochen werden.

Hier werden wir daran erinnert, daß auch die Zahlenreihe uns ursprünglich bloß als ein offener Bereich vorliegt, im Vergleich mit dem die Zahlenreihe, wie wir sie als Struktur ansprechen, eine Art der Uneigentlichkeit hat. Ge-
9 genüber der zweiten Zahlenklasse ist hier | der Unterschied, daß es sich bei der Offenheit der Zahlenreihe um eine Unabgeschlossenheit bloß der Iterationen ein und desselben Prozesses handelt, dagegen bei der offenen zweiten Zahlenklasse um die Unabgeschlossenheit von Begriffsbildungen.

Daß die Uneigentlichkeit bestimmter Strukturen des Überabzählbaren uns soviel merklicher ist als jene schon in der Konzeption der Zahlenreihe als Struktur liegende Uneigentlichkeit, beruht wohl darauf, daß unser Begriff einer formalen Theorie gerade die gleiche Art der Unendlichkeit intendiert wie diejenige der Zahlenreihe.