Bernays Project: Text No. 27

Die schematische Korrespondenz und die idealisierten Strukturen† (1970)

Schematic correspondence and idealized structures

(*Dialectica* 24, S. 53–66;
repr. in *Abhandlungen*, S. 176–188)

1.

53/A176 | Unter den Thesen, die für die Philosophie Ferdinand Gonseths kennzeichnend sind, ist eine solche, die auf den ersten Blick als nicht so spezifisch erscheint wie andere, der aber bei näherem Zusehen besondere Bedeutsamkeit zukommt. Es ist die Behauptung, daß wir in der theoretischen Naturbeschreibung nicht zu einer adäquaten Darstellung des Wirklichen gelangen, sondern nur zu einer schematischen Korrespondenz.

Diese Aussage ist zunächst vielleicht einem Mißverständnis ausgesetzt, und eine genauere Erörterung ihres Inhalts mag nicht überflüssig sein. Es ist gewiß nicht gemeint, daß jede Art von Darstellung eines Naturgegenstandes oder eines Vorganges, die wir durch die theoretische Naturwissenschaft gewinnen, eine nur schematische Darstellung ist. Tatsächlich verschafft uns die theoretische Naturerkenntnis vielerlei Möglichkeiten, die Natur gleichsam für uns arbeiten zu lassen, und wir gewinnen auf solche Weise Abbildungen von hoher Vollkommenheit, die nichts weniger als schematisch sind, z. B. die Abbildung von Gegenständen durch eine gute photographische Aufnahme oder die Wiedergabe eines Klangvorganges durch eine gut gelungene Radio-Reproduktion.

Was als schematisch erklärt wird, ist die Wiedergabe einer Situation oder eines Vorganges in einer theoretischen „Beschreibung“. Hier macht sich das

†The original articel concluded with the author’s address, reading „Paul Bernays, Jabok-Bodmerstrasse 11, 8002 Zürich.“

Schematische von vornherein dadurch geltend, daß die Beschreibung jeweils einer bestimmten Größenordnung der Betrachtung angepaßt ist. So ist es
54 ja insbesondere charakteristisch, daß die Physik | beim Vordringen in die Bereiche des immer Kleineren sukzessive auf neuartige Gegenständlichkeiten und Gesetzlichkeiten geführt wird.

Bei dieser Entwicklung hat sich ja der alte Gedanke der Atomistik in imposanter Weise bewährt, jedoch nicht in dem Sinne, daß mit den Atomen etwas sozusagen Letztes, Unteilbares, Unveränderliches gefunden worden wäre.
A177 Die Betrachtung der Aggregatzustände führt auf die | Zusammensetzung der Stoffe aus Molekülen, diejenige der chemischen Prozesse auf die Zusammensetzung der Moleküle aus Atomen, und in der mikrophysikalischen Forschung erweisen sich die Atome ihrerseits als kompliziert strukturierte, aus noch viel kleineren Teilen zusammengesetzte Gebilde, Teilen, die unter genügend starken Einflüssen auch voneinander separiert werden können.

Eine Konsequenz der Entdeckung immer kleinerer Bestandteile der physikalischen Gegenständlichkeiten besteht darin, daß die Mehrzahl der Naturvorgänge als Massenerscheinungen aufzufassen sind und daß demgemäß viele der gebräuchlichen Gesetzlichkeiten einen Charakter des Schematischen haben, insofern sie auf der Erklärung von Vorgängen als Durchschnitts-Phänomenen beruhen.

Ein weiteres Moment des Schematischen in der physikalischen Gesetzlichkeit ist, daß viele zunächst aufgestellte und in der Erfahrung bewährte Gesetze im Verlauf der Entwicklung der Theorien als bloße Näherungen von komplizierteren, dafür aber umfassenderen Gesetzlichkeiten betrachtet werden. So wird ja sogar das Newtonsche Gravitationsgesetz, welches lange als ein Fundamentalgesetz der Physik angesehen wurde, heute als eine approximative Folgerung aus der Einsteinschen Gravitationstheorie entnommen.

In allen diesen Fällen bedeutet das Schematische der Darstellung keineswegs eine Unvollkommenheit, vielmehr bildet jeweils die Feststellung, daß eine gewisse kompliziertere Struktur sich in einer für gegebene Zwecke völlig zulänglichen Annäherung durch eine gewisse viel einfachere Struktur ersetzen läßt, eine zusätzliche Erkenntnis. Die betreffende angenäherte Darstellung ist auch in Hinsicht auf den gegebenen Bereich der Anwendung durchaus adäquat; sie ist nur nicht absolut adäquat, d. h. nicht für jede Art der Anwendung adäquat.

Betrachten wir den Sachverhalt noch etwas näher. Die meisten naturwissenschaftlichen Untersuchungen beziehen sich nur auf einen abgegrenzten Raum-Zeit-Bereich, für den die Wirkungen der Umgebung als Randbedingungen gesamthaft, also schematisch, angesetzt werden, oder überhaupt vernachlässigt werden können. Andererseits sind die kosmologischen Theorien, welche auf eine mathematisch-phy|sikalische Erfassung der Natur als eines Ganzen ausgehen, erst recht zu einer starken Schematisierung genötigt. Hier kann es sich ja nur um Beziehungen in globo handeln.

Eine Art der sozusagen unabsichtlichen Vernachlässigung rührt davon her, daß in jedem Stadium der Forschung nur gewisse Arten von Strukturen,
A178 Prozessen und Abhängigkeiten wissenschaftlich | bekannt sind. Es können ja für die Charakterisierung z. B. eines Zustandes jeweils nur die bekannten Momente in Betracht gezogen werden.

Ungeachtet aber der ungeheuren Erweiterung, welche die Kenntnisnahme der Menschheit von gesetzlichen Strukturen und von verschiedenartigen Formen der theoretisch faßbaren Zusammenhänge im vorigen und im gegenwärtigen Jahrhundert erfahren hat, besteht doch kein Anlaß, anzunehmen, daß wir in dieser Beziehung etwa schon bald zu einem Abschluß gelangen.

Der Gesichtspunkt der schematischen Begrenztheit der theoretischen Beschreibungen findet insbesondere Anwendung auf den Gedanken des *Determinismus*, d. h. den Gedanken, daß das gesamte Naturgeschehen in einem hinlänglich abgeschlossenen Bereich sich gemäß einer mathematischen Gesetzlichkeit, von einem jeden fixierten Momentanzustande aus, in seinem Verlaufe eindeutig und erschöpfend bestimmt. Hierbei wird auch das organische Geschehen einbegriffen, sowie auch dasjenige des menschlichen Lebens und Handelns.

Diese Ansicht beruht auf der Annahme, daß das Naturgeschehen in adäquater Weise durch eine Lösung eines Systems von Differentialgleichungen dargestellt werde. Wie man weiß, wird diese Annahme in der heutigen Quantenmechanik fallengelassen; nach dieser Theorie bestimmen sich ja die mikroskopischen Vorgänge nicht eindeutig durch Differentialgesetze, diese liefern vielmehr nur Bestimmungen von Wahrscheinlichkeiten. Doch auch wenn man geltend macht, daß diese Art der Undeterminiertheit sich nur auf die mikroskopischen Vorgänge bezieht und daß für die makroskopischen Vorgänge gleichwohl eine deterministische Gesetzlichkeit resultiere, so hat doch jedenfalls diese Gesetzlichkeit den Charakter des Schematischen, und bereits dieses Moment des Schematischen bildet ein hinlängliches Gegenargument gegen einen strikten Determinismus.

Hervorzuheben ist hier, daß die Ablehnung eines strikten Determinismus keineswegs ein Aufgeben des üblichen kausalen Denkens bedeutet. Das Prin-

zip des ursächlichen Forschens, welches besagt, daß wir bei der Beobachtung
einer Abweichung von einem stationären Zustand oder von dem normalen
56 Verlauf eines Prozesses erwarten | können, einen erklärenden Umstand für
diese Abweichung zu finden, schließt ja gar nicht den Determinismus in sich.

Ferner auch behält natürlich die deterministische Form physikalischer Ge-
setze ihre grundsätzliche Bedeutung für die Anwendung der Gesetze zur Ge-
winnung von Voraussagen. Die Ablehnung des Determinismus bezieht sich al-
A179 so berechtigtermaßen nur auf den Determinismus in dem | anfangs erwähnten
Sinne, d. h. den Determinismus als eine extreme philosophische Doktrin.

Diese Doktrin spielt insbesondere eine Rolle bei der viel diskutierten Streitfrage der menschlichen Willensfreiheit.[1] Diese Frage kann unter sehr verschiedenen Gesichtspunkten betrachtet werden. Es kann einerseits, vom Standpunkt der erfahrungsmäßigen Betrachtung, darauf hingewiesen werden, daß gerade bei bedeutsamen Entscheidungen eines Menschen, da wo er sich in stärkerer Weise einsetzt, die seelischen Triebkräfte meist so beherrschend sind, daß von einer Wahl nach Belieben nicht die Rede sein kann. Die Rolle der Willensentscheidung ist vergleichbar derjenigen der Exekutive in einem Staate, welcher um so mehr Verfügung zugestanden werden kann, je weniger gewichtig die Entscheidungen sind, um die es sich handelt.

Anders ist es, wenn die Willensfreiheit vom Standpunkt des Determinismus bestritten wird. Es wird dann das menschliche Handeln entweder, im Sinne der Psycho-Physik, gemäß der physikalisch-physiologischen Gesetzlichkeit betrachtet, oder man denkt sich die psychologische Seelenforschung zu einer solchen Schärfe gebracht, daß sie genauer Vorausbestimmungen fähig ist. Daß aber die Berufung auf die Prinzipien und Methoden der Psycho-Physik oder der Psychologie keinen strikten Determinismus in betreff der menschlichen Willenshandlungen begründen kann, dessen werden wir uns bewußt, sobald wir der grundsätzlichen schematischen Begrenzung eingedenk sind, die der wissenschaftlichen Beschreibung der Zustände und Vorgänge eigentümlich ist. Nehmen wir z. B. an, daß es der Biologie gelinge, die Gen-Struktur und damit die Erbanlage eines Menschen experimentell zu bestimmen, so kann doch schwerlich diese Bestimmung von solcher Art sein, daß der beobachtende Forscher oder der etwa aufnehmende Apparat alle die in der Erbanlage des betreffenden Menschen enthaltenen Fähigkeiten gewinnt. Mit anderen

[1/1*] Gonseth hat seine Gedanken zu dieser Frage in seiner Schrift *Déterminisme et libre arbitre* (*vide* [**?**]) dargelegt. (Die Fußnoten 1* bis 3* sind nachträgliche Hinzufügungen [to the reprint in the *Abhandlungen*].)

57 Worten: die registrierten Daten | können schwerlich ein Äquivalent bilden für die Potentialitäten, die in der Erbanlage enthalten sind. Dieses aber wäre doch erforderlich, wenn sich auf Grund der Bestimmung der Erbanlage jenes Menschen und anhand der Feststellung der einwirkenden Umstände seine
A180 Leistungen sollten im einzelnen prognostizieren lassen. |

2.

Bisher haben wir das Schematische nur im Sinne des Einschränkenden betrachtet, als das bloß schematisch Abstrakte gegenüber dem reicheren Konkreten und dem Lebendigen. Dieser Aspekt bildet aber nur die eine Seite des Sachverhaltes, und es wäre auch eine unangemessene Auffassung von der schematischen Korrespondenz im Sinne Gonseths, wenn man sich das Schematische dabei eo ipso als eine Vergröberung dächte. Zu den Schematen, welche die Wissenschaft in ihrer Beschreibung verwendet, gehören ja insbesondere die geometrischen Figuren, und diese haben eine Art von Vollkommenheit, welche durch konkrete Gegenstände höchstens approximativ erreicht wird. Ein konkreter räumlicher Gegenstand kann nur ungefähr, nie ganz genau die Gestalt einer Kugel haben; ebenso kann eine konkrete Länge nur approximativ die mittlere Proportionale zwischen zwei verschiedenen Längen sein. Es findet also eine Art Wechselbeziehung zwischen dem Konkreten und den Schematen statt, insofern einerseits die Schemata das Konkrete im allgemeinen nur approximativ darstellen, andererseits die Schemata sich im allgemeinen nur approximativ durch konkrete Gegenstände realisieren lassen.

In dieser Wechselbeziehung kommt nun zum Ausdruck, daß wir in den Schematen eine Gegenständlichkeit sui generis vor uns haben; es ist die Gegenständlichkeit des *Mathematischen.*

Die Mathematik überhaupt läßt sich auffassen als die Lehre von den Schematen nach ihrer inneren Beschaffenheit. Damit erhält einerseits, auf Grund des Gedankens der schematischen Korrespondenz, die wesentliche Rolle der Mathematik für die theoretische Naturwissenschaft ihre Würdigung, andererseits wird aber damit auch der grundsätzlichen Verschiedenartigkeit der mathematischen Gegenständlichkeit gegenüber der Naturgegenständlichkeit Rechnung getragen.

Die mathematische Gegenständlichkeit geht durch Idealisierungs- und Abstraktionsprozesse hervor aus der phänomenalen Gegenständlichkeit des *Strukturellen.*

58 | Das Thema der Struktur wurde kürzlich von Herrn Gonseth im Hinblick auf den „Strukturalismus“ behandelt, und zwar in Verbindung mit den methodischen Fragen der Axiomatik und der Formalisierung.[2*] Es sei mir gestattet, zu diesen Themata einige Bemerkungen beizufügen.

A181 *a)* Was zunächst die Rolle der Struktur überhaupt betrifft, so kann | doch Struktur als dasjenige angesehen werden, was in der Phänomenalität zu den Qualitäten hinzukommt. Die geläufige Gegenüberstellung von Qualität und Quantität ist wohl für manche Fälle des täglichen Lebens angemessen, aber diejenige des Qualitativen und des Strukturellen ist gewiß die mehr grundsätzliche. Die Beurteilung des Quantitativen kommt hinaus auf Prozesse des Aneinanderfügens und auf Beobachtungen wie die des Hinausragens eines Gegenstandes über einen andern; beides hat einen strukturellen Charakter. Dagegen eine generelle Zurückführung des Strukturellen auf das Quantitative gelingt schwerlich in phänomenologischem Sinne, d. h. auf direkt beschreibende Art, sondern höchstens theoretisch, etwa im Geiste eines Pythagoräismus, gemäß welchem aber auch die qualitativen Unterschiede auf quantitative zurückgeführt werden.

In der Mathematik haben wir es zumeist nicht mit direkt phänomenal gegebenen Strukturen, sondern mit idealisierten Strukturen zu tun, wobei die Idealisierung in einer Anpassung an die Begrifflichkeit, gewissermaßen einem Kompromiß zwischen Anschauung und Begrifflichkeit, besteht.

Anzumerken ist hierzu, daß in den Unternehmungen der konstruktiven Mathematik das Bestreben ist, die Idealisierung möglichst zu beschränken; in vollem Maße gelingt dieses nicht; insbesondere kommt auch die konstruktive Mathematik nicht ohne die Vorstellung von der unbeschränkten Anwendbarkeit der arithmetischen Operationen (Summe, Produkt, Potenz usw.) aus.

b) Die mathematische Idealisierung kommt insbesondere zur Geltung durch die *axiomatische* Behandlung von Theorien. Wie man weiß, sind zwei verschiedene Arten der Axiomatik zu unterscheiden. Herr Gonseth bezeichnet sie in seinem Buch *Le probleme du temps*[3*] als axiomatisation schématisante und axiomatisation structurante. Bei der ersten stützt man sich auf eine schon vorhandene Sprache, in der die betrachteten Gegenstände und Beziehungen ihre Namen besitzen, und das Moment des Axiomatischen besteht darin, daß einerseits diese Sprache im Sinne einer Schematisierung der betreffenden Gegenständlichkeiten verschärft wird und daß man ferner gewisse

[2*] *Vide* [?].
[3*] *Vide* [?].

als gültig angenommene Behauptungen über jene Gegenständlichkeiten als
59 Ausgangs|punkt für logische Beweisführungen voranstellt. Bei der zweiten Art der Axiomatisierung treten die ursprünglichen Gegenstände und Bezie-
A182 hungen nicht mehr | selbständig, sondern nur als Glieder einer Gesamtstruktur – sozusagen bloß in ihrer grammatischen Rolle – auf, und das Axiomensystem macht Aussagen über diese Gesamtstruktur.

Bei etlichen Axiomensystemen dieser zweiten Art ist eine definitorische Fassung die gebräuchliche, z. B. bei dem Axiomensystem der Gruppen. Man sagt etwa: ein Bereich von Dingen, für welche eine Zusammensetzung $ab = c$ erklärt ist, bildet mit Bezug auf diese Zusammensetzung eine Gruppe, wenn 1. die Zusammensetzung assoziativ ist und 2. die Zusammensetzung beiderseitig umkehrbar ist, so daß für beliebige Dinge a, b (aus dem Dingbereich) ein Ding x in dem Bereich existiert, für welches $ax = b$, sowie auch ein Ding x, für welches $xa = b$ ist.

Diese Bedingungen lassen sich auch als „Axiome der Gruppe" aussprechen. Ersichtlich ist hier, daß wir eine Definition vor uns haben, und zwar nicht eine implizite, sondern eine *explizite* Definition. Freilich, das durch sie Definierte ist weder der Bereich der Dinge noch die Zusammensetzung. Diese beiden treten in der Definition nur implizite auf. Definiert wird, was eine Gruppe ist, oder genauer, wann ein Bereich von Dingen mit Bezug auf eine für ihn erklärte Operation der Zusammensetzung eine Gruppe bildet.

Gruppen aber gibt es von sehr verschiedener Struktur. Was durch die Gruppen-Axiome gekennzeichnet wird, ist also nicht eine bestimmte Struktur, sondern eine *Gattung von Strukturen*. Der Fall eines Axiomensystems, welches eindeutig eine Struktur kennzeichnet, ist nur ein spezieller. Man nennt ein solches Axiomensystem, bei dem je zwei Erfüllungen („Modelle") strukturgleich („isomorph") sind, „kategorisch".

Andererseits kann ein und dieselbe Gattung von Strukturen im allgemeinen durch verschiedene Axiomensysteme definiert werden: welche von den für eine Struktur gültigen Sätzen man als Axiome nimmt, das ist durch die Struktur selbst nicht bestimmt; auch die Wahl der Grundprädikate bzw. Grundoperationen wird durch die Struktur nicht festgelegt: was für das eine Axiomensystem ein Grundprädikat ist, kann für ein anderes, welches die gleiche Strukturgattung definiert, ein (definitorisch) abgeleitetes Prädikat sein.

Auf solche Arten gibt es Beziehungen der Gleichwertigkeit zwischen Axiomensystemen. Eine andere methodisch wichtige Beziehung zwischen solchen
60 ist diejenige, daß ein Axiomensystem eine Erweiterung eines | anderen bildet. Dabei sind zwei verschiedene Möglichkeiten zu unterscheiden: die eine

ist, daß die Grundelemente die gleichen bleiben, aber neue Axiome hinzu-
A183 gefügt werden; dann wird (im allgemeinen) die | gekennzeichnete Strukturgattung eingeschränkt; die andere besteht darin, daß neue Grundprädikate oder -operationen hinzugenommen werden nebst auf diese bezüglichen Axiomen; dann geht man über zu einer reicheren Struktur. So ist z. B. das lineare Kontinuum, wenn es als mit einer Maßbestimmung versehen gedacht wird, eine reichere Struktur, als wenn es nur als linear geordnete Mannigfaltigkeit aufgefaßt wird.

c) Der Gebrauch von Axiomensystemen erfolgt, ihrer Bestimmung nach, mittels des logischen Schließens. Die Methoden der logischen Beweisführung wurden durch die mathematische Logik analysiert. Das Ergebnis dieser Analyse ist, daß für das Beweisen in den elementaren Theorien die Prädikatenlogik der „ersten Stufe“ ausreichend ist, bestehend aus der Aussagenlogik, d. h. den Regeln betreffend die Aussagenverknüpfungen „und“, „oder“, „nicht“, „wenn-so“, ferner den Regeln für die Allform und die Existenzform und den Regeln der Gleichheit. Das logische Schließen in diesem Rahmen läßt sich so genau schematisieren, daß mit Hilfe von Symbolen für die Aussagenverknüpfungen sowie für „alle“ und „es gibt“ die inhaltlichen Beweise in die kombinierte Anwendung von einigen wenigen schematischen Regeln übersetzt werden können.

Hiermit ergibt sich eine neue Art von Strukturen: die Strukturen der formalen Deduktionen. Zwischen den gültigen Sätzen einer axioma-tischen Theorie, die sich in dem genannten logischen Rahmen entwickeln läßt, und den Satzformeln, die sich nach den Regeln der kalkülmäßig formalisierten Theorie herleiten lassen, besteht eine vollkommene Entsprechung. Diese Harmonie zwischen der „Semantik“ und der „Syntax“ der Theorie wird durch den Gödelschen Vollständigkeitssatz festgestellt, welcher besagt: Dann und nur dann ist ein Satz der Theorie gemäß den formalen Deduktionsregeln beweisbar, wenn er nicht durch ein „Modell“ widerlegt werden kann.

Über den beschriebenen Rahmen logischer Beweisführung werden wir bereits überall da hinausgeführt, wo der Allgemeinbegriff der *endlichen Zahl* benutzt wird. Dieses geschieht z. B. – um einige elementare Anwendungsfälle zu nennen – in der Geometrie, wenn Aussagen über beliebige Polygone oder beliebige Polyeder gemacht werden, ferner bei den allgemeinen Sätzen der formalen Algebra und in der Theorie der endlichen Gruppen. In all diesen
61 Fällen kommt das Schluß|prinzip der vollständigen Induktion zur Verwendung.

Weitergehend als diese zahlentheoretische Erweiterung der Logik der er-

sten Stufe ist die Logik der „zweiten Stufe“, in welcher Allgemeinbegriffe wie
A184 diejenigen des (ein- oder mehrstelligen) Prädikates, der | Funktion (Operation, Abbildung, Folge) und der Menge benutzt werden und in der die Regeln für die Allform und die Seinsform mit Bezug auf diese Begriffe angewendet werden. Zu den Schlußweisen der Logik der zweiten Stufe gehört auch das Auswahlprinzip.

Von dieser Logik der zweiten Stufe wird zunächst in der klassischen Analysis Gebrauch gemacht, weitergehend in der Mengenlehre und allenthalben da, wo die mengentheoretische Denkweise Anwendung findet, so insbesondere in der Semantik, d. h. den Untersuchungen, die sich auf die Erfüllung von Axiomensystemen durch Modelle beziehen. Der Begriff der Erfüllbarkeit eines Axiomensystems ist bereits ein solcher der Logik der zweiten Stufe, ebenso derjenige der semantischen Konsequenz (der semantische Folgerungsbegriff). Man sagt, daß ein Satz aus einem Axiomensystem (im semantischen Sinne) folgt, wenn in jedem Modell des Axiomensystems der Satz erfüllt ist. Auch die Definition des Begriffes „kategorisch“ erfordert die Logik der zweiten Stufe.

d) Man hat nun die Logik der zweiten Stufe, d. h. die für sie wesentlichen Begriffe der Menge, der Funktion usw., wiederum der Analyse unterworfen, und eine Zeitlang konnte es scheinen, daß sich die Logik der zweiten Stufe auf die der ersten Stufe reduzieren lasse, indem man die Mengen als mathematische Dinge und die Elementbeziehung („a ist Element von m“) als eine axiomatische Grundbeziehung, analog der Inzidenz in der Geometrie, behandelt.

In der so angelegten Axiomatik Zermelos tritt allerdings eine Axiomen-Regel („das Aussonderungsaxiom“) auf, in welcher, entsprechend wie bei dem Prinzip der vollständigen Induktion, von einem beliebigen Prädikat („definite Eigenschaft”) die Rede ist. Es läßt sich aber auch die Verwendung dieses Prädikatbegriffes axiomatisch präzisieren, so daß man zu einer Axiomatik im Rahmen der Logik der ersten Stufe gelangt.

In der Tat lassen sich anhand einer solchen Axiomatik die Beweise der klassischen Analysis und der Cantorschen Mengenlehre durchführen und auch mittels der logischen Symbolik formalisieren. Jedoch eine Harmonie zwischen Syntax und Semantik besteht hier nicht mehr. Durch die axiomatische Präzisierung des Prädikatbegriffes wird dieser Begriff eingeengt. Das
62 macht sich zwar nicht störend für die bekannten | Beweise der Zahlentheorie, Analysis und Mengenlehre geltend; diese Beweise lassen sich, wie gesagt, im Rahmen der Axiomatik führen; auch ist jeder im Rahmen der Axiomatik be-

weisbare Satz im Sinne der üblichen (klassischen) Deutung zutreffend. Aber für die Anwendung des Vollständigkeitsatzes haben wir jetzt die Komplikation, daß die Begriffe „Erfüllbarkeit“ und „Widerlegbarkeit“ einen verschiede-
A185 nen | Sinn haben, je nachdem sie gemäß der Axiomatik oder vom Standpunkt der Semantik gebraucht werden.

Ein Modell der axiomatischen Mengenlehre oder allgemein einer zunächst im Rahmen der Logik der zweiten Stufe axiomatisierten Theorie, die dann aber durch axiomatische Beschränkung des Prädikatbegriffs, bzw. des Mengen- oder Funktionsbegriffes, auf die Logik der ersten Stufe reduziert worden ist, nennt man ein „Non-Standard-Modell“, wenn sich darin die Beschränkung des Prädikatbegriffes (bzw. des Mengen- oder Funktionsbegriffes) bemerkbar macht, andernfalls nennt man es ein Standard-Modell.

Ein Non-Standard-Modell für ein Axiomensystem der Mengenlehre oder der Analysis von der betrachteten Art erhält man auf Grund des Löwenheimschen Satzes, welcher besagt, daß ein jedes in der Logik der ersten Stufe formalisierbare Axiomensystem, welches widerspruchsfrei ist, ein Modell besitzt, dessen Elemente (Individuen) von natürlichen Zahlen gebildet werden. Ein solches Modell kann gewiß kein Standard-Modell sein, da ja in der Mengenlehre, sowie schon in der Analysis, der Satz beweisbar ist, daß die zahlentheoretischen Funktionen (d. h. Funktionen mit Zahlen-Argumenten und Zahlen als Werten) – welche hier zu den Individuen gehören – sich nicht (durch natürliche Zahlen) numerieren lassen. Man erhält also hier ein Modell, das einem in der Theorie beweisbaren Satz im Sinne einer externen Deutung widerspricht.

Es will nun scheinen, daß derartige Schwierigkeiten nur da auftreten, wo wir es mit überabzählbaren Mannigfaltigkeiten zu tun haben; tatsächlich finden sich aber solche Schwierigkeiten bereits bei der Zahlentheorie. Auch hier bewirkt die Beschränkung des Schlußprinzips der vollständigen Induktion auf Aussagen von bestimmter Bildungsweise das Auftreten von Non-Standard-Modellen. Hier kann wiederum ein inhaltlich gültiger Satz der Zahlentheorie einem für ein Modell (extern) gültigen Satz widersprechen. Und jedenfalls enthält ein Non-Standard-Modell der Zahlentheorie außer den Zahlen $0, 1, 2, 3 \ldots$ noch unendlich viele Elemente, welche in ihm mit als „natürliche Zahlen“ fungieren.

63 | Mit diesen Feststellungen ist nun aber doch nicht die Ansicht widerlegt, daß das Vorhandensein der Non-Standard-Modelle mit dem Überabzählbaren zu tun hat: zwar ist die Menge der natürlichen Zahlen abzählbar, ja sogar der Prototyp des Abzählbaren. Aber die Eigenschaften (Mengen) von

Zahlen, welche für die Anwendung des Prinzips der vollständigen Induktion in Betracht kommen, bilden eine überabzählbare Gesamtheit.

Übrigens ist noch zu bemerken, daß sich die zahlentheoretischen Non-
A186 |Standard-Modelle nicht etwa dadurch wegschaffen lassen, daß man die Zahlentheorie in einen weiteren formalisierbaren axiomatischen Rahmen einordnet. Vielmehr gilt auf Grund der Gödelschen Unvollständigkeitssätze, daß für jedes widerspruchsfreie Axiomensystem der Analysis oder der Mengenlehre, welches sich getreu durch einen Formalismus darstellen läßt, solche Non-Standard-Modelle existieren, welche auch schon in Bezug auf die Zahlentheorie non-standard sind.

e) Die betrachteten Schwierigkeiten knüpfen sich an die axiomatisierte Mathematik, und zwar an jene stärkere Art der Axiomatisierung im Rahmen der Logik der ersten Stufe, welche die Formalisierung ermöglicht. Indem man, nach dem Gedanken von Hilbert, die deduktive Struktur einer formalisierten Theorie zum Gegenstand nimmt, wird die Theorie gewissermaßen ins Zahlentheoretische projiziert. Die so erhaltene zahlentheoretische Struktur ist im allgemeinen wesentlich verschieden von der durch die Theorie intendierten Struktur, sie kann aber dazu dienen, die Widerspruchsfreiheit der Theorie von einem Standpunkt zu erkennen, der elementarer ist als die Annahme der intendierten Struktur.

Hilbert gedachte auf solche Weise einen elementaren Nachweis der Widerspruchsfreiheit der gesamten klassischen Mathematik zu gewinnen und damit das mathematische Grundlagenproblem ein für allemal aus der Welt zu schaffen.

Dieses Programm mußte in zweierlei Hinsicht revidiert werden. Einerseits mußten die Ansprüche hinsichtlich der Elementarität der beweistheoretischen Überlegungen herabgesetzt werden. Der von Hilbert ins Auge gefaßte „finite Standpunkt“ erwies sich für den Zweck als nicht ausreichend, wobei es sich
64 zugleich zeigte, daß dieser Stand|punkt eingeschränkter ist als derjenige des Brouwerschen Intuitionismus.[2]

[2] In Hinsicht auf die Bewertung methodischer Standpunkte nach ihrer Evidenz ist es angezeigt, daß man sich klarmacht, daß man nicht in einem einfachen Sinne schlechtweg von „evident“ und „nicht-evident“ sprechen kann – selbst wenn wir von den individuellen Bedingungen der Evidenz absehen. Es gibt ja sowohl Gradabstufungen wie auch verschiedene Arten der Evidenz. So kann ein Gewinn an Elementarität auf Kosten des Grades der Evidenz erfolgen, wofür es nicht an Beispielen fehlt. Es ist schwerlich angemessen, irgendeinen methodischen Standpunkt schlechtweg als denjenigen der mathematischen Evidenz zu erklären. Die Möglichkeit der Rechtfertigung der Methoden der klassischen Mathematik

A187 | Das andere Erfordernis der Revision des Hilbertschen Programmes bezieht sich auf die Vorstellung einer definitiven Erledigung der Grundlagenfragen der Mathematik. Bisher sind für die formalen Systeme der Zahlentheorie und für Teilsysteme der Analysis Widerspruchsfreiheits-beweise mit verschiedenen Methoden erbracht worden, die alle im Bereiche dessen liegen, was die intuitionistische Mathematik anerkennt. Nehmen wir an, daß es gelinge, in einem geeignet erweiterten Rahmen konstruktiver Mathematik Widerspruchsfreiheitsbeweise für formale Systeme der klassischen Analysis und für die formalisierte axiomatische Mengenlehre zu führen, so würde auch damit noch keineswegs ein Abschluß erreicht sein. Denn wie schon erwähnt wurde, geht die Semantik der Mengenlehre über die axiomatisch präzisierte Mengenlehre wesentlich hinaus. Und überhaupt läßt sich gewiß nicht die gesamte Mathematik durch eine formal abgegrenzte Theorie erschöpfend darstellen. Die Mathematik als Ganzes – dieses können wir aus den Antinomien der Mengenlehre entnehmen – ist nicht wiederum eine Struktur, d. h. ein mathematischer Gegenstand, noch auch einem solchen isomorph.

Die beweistheoretische Betrachtung kann sich demnach nicht auf die Mathematik überhaupt, sondern jeweils nur auf bestimmte abgegrenzte mathematische Theorien erstrecken.

Wenn nun in den beiden genannten Hinsichten die ursprüngliche Zielsetzung der Hilbertschen Beweistheorie der Modifikation bedarf, so hat doch dieses Unternehmen Hilberts sich als sehr fruchtbar erwiesen. Die beweistheoretischen Untersuchungen bilden heute ein ergebnisreiches Feld der mathematischen Forschung. Auch bei diesen Untersuchungen haben wir es mit idealisierten Strukturen zu tun, wenngleich hier gern vom „Konkreten“ gesprochen wird, um den Unterschied gegenüber solchen Betrachtungen her-
65 vorzuheben, die sich in stärkerem Maße vom Konkreten entfernen. |

f) Es kann hier nicht die Aufgabe sein, die verschiedenen heutigen grundlagentheoretischen Unternehmungen zu erörtern und zu würdigen. Verschiedene von diesen, insbesondere der Brouwersche Intuitionismus, tendieren dahin, die übliche Mathematik durch eine eingeschränktere Methodik zu ersetzen, welche im Vergleich zur Analysis auf eine striktere Arithmetisierung hinauskommt. Diese Untersuchungen haben ihre Fruchtbarkeit vor allem darin, daß in ihnen etliche neue, für die Mathematik wertvolle Begriffsbildungen und Methoden entwickelt werden. Die hier gewonnenen Ergebnisse wird man auch

(im Sinne eines Nachweises ihrer Widerspruchsfreiheit) durch Überlegungen elementarerer Art hat natürlich gleichwohl ihre Bedeutsamkeit.

dann würdigen, wenn man nicht der Meinung ist, daß die üblichen Methoden der klassischen Analysis durch andere ersetzt werden sollen. Zuzugeben ist,
A188 daß die klassische Begründung der Theorie der reellen Zahlen durch | Cantor und Dedekind keine *restlose* Arithmetisierung bildet. Jedoch, es ist sehr zweifelhaft, ob eine restlose Arithmetisierung der Idee des Kontinuums voll gerecht werden kann. Die Idee des Kontinuums ist, jedenfalls ursprünglich, eine geometrische Idee.

Der arithmetisierende Monismus in der Mathematik ist eine willkürliche These. Daß die mathematische Gegenständlichkeit lediglich aus der Zahlvorstellung erwächst, ist keineswegs erwiesen. Vielmehr lassen sich vermutlich Begriffe wie diejenigen der stetigen Kurve und der Fläche, die ja insbesondere in der Topologie zur Entfaltung kommen, nicht auf die Zahlvorstellungen zurückführen. Dem steht nicht entgegen, daß wir natürlich trachten müssen, die Zahlvorstellungen möglichst weitgehend für das Studium geometrischer Gebilde fruchtbar zu machen, wie es ja in der Analysis geschieht.

Wenn wir die zuvor dargelegte Auffassung zugrunde legen, wonach die Mathematik die Wissenschaft von den idealisierten Strukturen ist, so haben wir damit für die Grundlagenforschung der Mathematik eine Haltung, welche uns vor übersteigerten Aporien und vor forcierten Konstruktionen bewahrt und welche auch nicht angefochten wird, wenn die Grundlagenforschung vieles Erstaunliche zutage bringt.

Bei dieser Auffassung müssen wir allerdings bereit sein, außer der Objektivität des Naturwirklichen noch Objektivität von anderer Art anzuerkennen. Für die Philosophie Gonseths bietet das keine Schwierigkeit. In dieser wird von vornherein dem Umstand Rechnung getragen, daß die Gesamtheit des uns Gegenständlichen in verschiedenartige „Horizonte“ zerfällt, die andererseits doch miteinander in Beziehungen treten, Beziehungen wie diejenige zwischen den konkreten und den idealisierten Strukturen.

66 Andererseits gibt uns diese Philosophie eine Alternative gegen|über der aprioristischen Ansicht von der Mathematik, für welche es ein Paradoxon ist, daß die mathematischen Sachverhalte erst nach und nach, im Zuge der Forschung, sich herausstellen und die geeigneten Begriffe auch erst auf diesem Wege des Fortschreitens gefunden werden, wobei sich immer wieder ganz neue Konstellationen ergeben.

Die von Gonseth als generelle Methode proklamierte ouverture à l'expérience ist als Erfordernis nicht auf die Naturforschung beschränkt, sondern hat ihre Bedeutung gleichermaßen im Felde der *geistigen Erfahrung*.