Bernays Project: Text No. 15

Thesen und Bemerkungen zu den philosophischen Fragen und zur Situation der logisch-mathematischen Grundlagenforschung (1937)

Theses and remarks on philosophical questions and on the situation in logico-mathematical foundational research

(*Travaux IX Congrès International de Philosophie*, VI, S. 104–110; repr. in *Abhandlungen*, S. 79–84)

---

104 |**Sommaire**. – I. *Philosophie scientifique* et *Syntaxe logique*. Nécessité d'une interprétation. – II. *Logique* et *mathématique*. La distinction kantienne : «analytique»-«synthétique» est remplacée par une distinction entre «formel» et «objectif». Touchant ici la mathématique et la logique, on traite surtout du côté objectif : qui, en mathématique, consiste dans l'existence de rapports mathématiques, indépendants de la formulation en proposition, et dans la vérificabilité de lois arithmétiques ; en logique, dans le rapport implicite des termes et des principes à certains caractères de la réalité. – III. *Arithmétique* et *géométrie* sont distingués selon la considération du discret et du continu. Précision formelle des concepts mathématiques intuitifs. – IV. *Pour la problématique des fondements*. Réflexions et indications sur la situation présente des recherches.

A79
1 Philosophie und Syntax

1. Wissenschaftliche Philosophie besteht aus den grundsätzlichen heu-

ristischen Überlegungen zur Gestaltung bzw. Umgestaltung der Wissenschaftssprache, sowie den Überlegungen, welche die möglichen grundsätzlichen Deutungen und Auffassungen der wissenschaftlichen Ansätze betreffen.

2. Die Syntax, wie sie in dem Buche Carnaps *Logische Syntax der Sprache*[a] in Anlehnung an die Meta-Mathematik Hilberts und an die Untersuchungen der polnischen Logiker sowie diejenigen von Gödel über die formalisierten Sprachen entwickelt ist, betrachtet die mathematischen Eigenschaften formalisierter Wissenschaftssprachen.

105 | 3. Soll die Syntax Feststellungen enthalten, so muss sie in einer gedeuteten Sprache erfolgen.

Soll eine formal aufgestellte Definition zur Präzisierung einer philosophischen Begriffsbildung dienen, so muss entweder die formale Definition mit einer Deutung versehen sein, oder jene Präzisierung erfolgt indirekt, indem eine syntaktische Eigenschaft jener formalen Definition gefordert wird, die aber dann ihrerseits in deutbarer Weise bestimmt sein muss.

4. Das Funktionieren einer formalen Sprache als Syntax-Sprache, bei Benutzung etwa der Gödelschen Arithmetisierungsmethode, beruht auf der anschaulich-konkreten Gültigkeit der Arithmetik.

2 Logik und Mathematik

1. Anstelle der Kantischen Unterscheidung „analytisch-synthetisch", deren allgemeine Fassung auf grundsätzliche Schwierigkeiten stößt, empfiehlt sich die Einführung einer anderen Art von Unterscheidung zwischen „*formal*"
A80 und „*gegenständlich*" *motivierten Elementen* einer | Theorie, d. h. zwischen Elementen (Termini, Axiomen, Schlussweisen), die um der Eleganz, der Einfachheit und Abrundung des Systems willen, und solchen, die im Hinblick auf die Sachverhalte des zu behandelnden Gegenstandsgebietes eingeführt werden.

Bemerkung: Diese Unterscheidung liefert freilich keine scharfe Einteilung, weil sich formale und gegenständliche Motive superponieren können.

2. Die systematische Logik bildet ein Anwendungsgebiet mathematischer Betrachtung. Die Verbindung von Logik und Mathematik in den Systemen der Logistik ist eine entsprechende wie die von Physik und Mathematik in den Systemen der theoretischen Physik.

[a] *Vide* [**?**].

3. Das Mathematische findet sich nicht nur in Verbindung mit dem logischen Satzformalismus, vielmehr finden wir mathematische Beziehungen auch in anschaulicher Gegenständlichkeit; insbesondere treffen wir mathematische Verhältnisse in allen Gebieten des Physikalischen und Biologischen. – Die Unabhängigkeit des Mathematischen von der Sprache ist insbesondere von Brouwer betont worden.

4. Wir müssen anerkennen, dass die numerischen Beziehungen Tatsächlichkeiten ausdrücken. Dieses wird auch gerade anhand der Syntax besonders deutlich: wenn z. B. eine Formel A in einem Formalismus F ableitbar ist, so
106 ist diese Ableitbarkeit eine Tatsache, | welche als solche explicite vorgewiesen und nachgeprüft werden kann. Andrerseits stellt sich diese Ableitbarkeit in der Syntaxsprache durch eine numerische Beziehung dar.

Auch für arithmetische Sätze von der Form der Allgemeinheit, wie z. B. den Satz, dass jede ganze Zahl als Summe von vier oder weniger Quadratzahlen darstellbar ist, haben wir eine Art der Nachprüfung, und zwar in ganz analogem Sinne wie für ein physikalisches Gesetz, nur dass man es das eine Mal mit einer Rechenanordnung, das andere Mal mit einer experimentellen Anordnung zu tun hat; in beiden Fällen wird durch das Gesetz ein gewisses zu erhaltendes Ergebnis vorhergesagt.

5. In der Logik, und zwar sowohl in derjenigen der Umgangssprache wie in der symbolischen Logik, haben wir nebeneinander formal und gegenständlich motivierte Elemente. Eine gegenständliche Motivierung liegt insofern vor, als die logischen Termini und Prinzipien zu einem Teil Bezug haben auf gewisse sehr allgemeine Charakteristika der Wirklichkeit. Auf diese gegenständliche Seite der Logik hat insbesondere Paul Hertz hingewiesen. Auch F. Gonseth spricht von der Logik als einer allgemeinen „théorie de l'objet".

A81 Andererseits bleibt die Tatsache bestehen, dass der Umkreis und die | Problemstellung der Logik nach gewissen Grundzügen der Sprachstruktur orientiert ist.

3 Zur Frage der mathematischen Anschauung

1. In der Kantischen Lehre von der reinen Anschauung ist die Annahme einer mathematischen Anschauung mit verschiedenen bedenklichen Zusatzmomenten behaftet. Wir können alle diese zusätzlichen Momente, so die Be-

hauptung einer Verbindlichkeit der Anschauung von Raum und Zeit für die Physik sowie die Unterscheidung von „sinnlicher“ und „reiner“ Anschauung, beiseite lassen, aber doch anerkennen, dass es ein anschauliches mathematisches Vorstellen von räumlichen Verhältnissen und von Veränderung gibt, auf Grund dessen wir, jedenfalls in einem gewissen Umfang, Eigenschaften von Konfigurationen anhand ihrer anschaulichen Vorstellung gleichsam ablesen können. Die Art der Phantasie braucht dabei grundsätzlich keine andere zu sein als die, welche im Gebiet der Töne ein komponierender Musiker verwendet, wenn er Klangkombinationen in der Vorstellung vorausbestimmt.

107 2. Es empfiehlt sich, die Unterscheidung von „arithmetischer“ und | „geometrischer“ Anschauung nicht nach den Momenten des Räumlichen und Zeitlichen, sondern im Hinblick auf den Unterschied des Diskreten und Kontinuierlichen vorzunehmen. Danach ist arithmetisch die Vorstellung einer aus diskreten Bestandteilen zusammengesetzten Figur, in welcher die Bestandteile selbst entweder überhaupt nur nach ihrer Stellung zur Gesamtfigur oder noch nach gewissen eigens herausgehobenen gröberen Unterscheidungsmerkmalen betrachtet werden, ferner auch die Vorstellung eines an einer solchen Figur zu vollziehenden formalen Prozesses, der nur in Hinsicht auf die Veränderung, die er bewirkt, betrachtet wird. Geometrisch dagegen sind die Vorstellungen von stetiger Veränderung, von stetig variierbarer Größe, ferner topologische Vorstellungen wie die von Linien- und Flächengestalten.

3. Die Grenzen der anschaulichen Vorstellbarkeit sind unscharf. Dieses ist der Grund, welcher dazu veranlasst hat, die anhand der Anschauung gewonnenen arithmetischen und geometrischen Begriffe systematisch zu verschärfen, wie es ja teils durch das axiomatische Verfahren, teils durch Einführung formal motivierter Urteils- und Schlussweisen erfolgt ist. Das methodisch Besondere an diesem Fall ist, dass die hier einzuführenden formal motivierten Elemente großenteils von der Logik her bereits zur Verfügung standen, so das Prinzip des „tertium non datur“, welches ja gleichbedeutend ist mit der
A82 Annahme der | Negationsfähigkeit eines jeden Satzes, und zwar im Sinne des strikten kontradiktorischen Gegenteils; ferner auch die Vergegenständlichung der Begriffe (Prädikate, Relationen) und Begriffsumfänge.

Anmerkung. Historisch ist bemerkenswert, dass in der Aristotelischen Logik bei den bekannten 19 Schlussfiguren das tertium non datur nirgends erfordert wird, weil das allgemein bejahende Urteil so interpretiert wird, dass es die Existenz unter den Subjektsbegriff fallender Gegenstände behauptet. (Man beachte unter diesem Gesichtspunkt die Regel „ex mere negativis nihil sequitur“.)

4 Zur Grundlagen-Problematik

1. Die Methode der abstrakten Verschärfung der Mathematik, wie sie in der Analysis und Mengenlehre zur Auswirkung kommt, hat, wie bekannt, von Anbeginn Opposition bei einem Teil der Mathematiker gefunden. In ihrer ausgeprägtesten Form hat diese Opposition zum Ziel, das übliche Verfahren
108 der Einführung formal motivierter Ele|mente durch ein solches zu ersetzen,
welches sich vollständig im Rahmen der arithmetischen Evidenz vollzieht; die geometrische Anschaulichkeit soll ausgeschaltet werden, und andererseits sollen alle die abstrakten Begriffsbildungen und Schlussweisen vermieden werden, welche keine arithmetische Anschaulichkeit besitzen.

2. Die im Sinne der in 1. genannten Zielsetzung (einer nach arithmetischer Evidenz orientierten Mathematik) von Kronecker begonnene und von Brouwer durchgeführte Begründung eines erheblichen Teiles der vorhandenen Mathematik hat die Mathematiker nicht zur Annahme des methodischen Standpunktes der arithmetischen Evidenz bekehrt. Die Gründe dafür mögen die folgenden sein:

a) Wer in der Mathematik Anschaulichkeit sucht, der wird die restlose Eliminierung der geometrischen Anschauung als unbefriedigend und künstlich empfinden. Tatsächlich gelingt auch die Reduktion des Stetigen auf das Diskrete nur in einem angenäherten Sinn. Wer andererseits scharfe Begrifflichkeit anstrebt, der wird die Methoden bevorzugen, welche vom Standpunkt der Systematik die günstigsten sind.

b) Bei dem Brouwerschen Verfahren werden in die Sprache der Mathematik Unterscheidungen eingeführt und spielen eine wesentliche Rolle, deren Bedeutsamkeit nur vom Standpunkt der Syntax dieser Sprache ersichtlich ist. Die von Brouwer behauptete Ungültigkeit des „tertium non datur“ kann
A83 in präziser Weise nur als *syntaktischer* | Sachverhalt, nicht als ein solcher der
mathematischen Gegenständlichkeit selbst konstatiert werden.

Bemerkung. Der Brouwersche Gedanke, das Kontinuum als Menge der Wahlfolgen zu charakterisieren, ist an sich unabhängig von der Ablehnung des „tertium non datur“. In Bezug auf indefinite Prädikate von Wahlfolgen kann freilich kein „tertium non datur“ gelten. Aber man könnte gleichwohl den Standpunkt so wählen, dass für die zahlentheoretischen Eigenschaften gesetzlicher Folgen das „tertium non datur“ beibehalten wird. Auf diese Weise würde man eine Erweiterung der von Weyl 1918 aufgestellten Kontinuumstheorie erhalten.

3. Der Standpunkt, den Hilbert durch seine Beweistheorie einnimmt, ist dadurch gekennzeichnet, dass er sowohl den Bedürfnissen der formalen Systematik wie denen der arithmetischen Evidenz gerecht werden will. Als Mittel zur Vereinigung dieser Ziele dient ihm die Sonderung von Mathematik und Meta-Mathematik, welche der Kantischen Teilung der Philosophie in „Kritik“ und „System“ nachgebildet ist. Bekanntermaßen ist die Hauptaufgabe,
109 die Hilbert der | Meta-Mathematik als einer Beweiskritik stellt, der Nachweis für die Widerspruchsfreiheit des üblichen Verfahrens der Mathematik. Die Inangriffnahme des Problems ist als eine etappenweise zu vollziehende gedacht.

In der Durchführung der Aufgabe zeigen sich freilich erhebliche, zum Teil unerwartete Schwierigkeiten. Ein wesentlicher Grund für noch unüberwundene Schwierigkeiten besteht darin, dass der Abstand zwischen einem Formalismus der anschaulichen Arithmetik und dem der üblichen Mathematik größer ist, als ihn Hilbert vermutet hatte.

Im zahlentheoretischen Formalismus läßt sich das „tertium non datur“ in gewissem Sinne eliminieren. Auf dieser Tatsache beruhen die von Gödel und Gentzen erbrachten Beweise für die Widerspruchsfreiheit des zahlentheoretischen Formalismus. Sobald man aber zur Betrachtung von Zahl*funktionen* übergeht, ist von einer solchen Eliminierbarkeit nicht mehr die Rede. Dieses geht insbesondere aus einem Satz hervor, der im Anschluss an eine Präzisierung des Begriffes einer „berechenbaren“ Funktion von S. C. Kleene bewiesen worden ist und welcher besagt, dass es Zahlfunktionen gibt, die sich mit den Symbolen des zahlentheoretischen Formalismus (bei Einschluss eines Symbols für „kleinste Zahl x von der Eigenschaft $\mathfrak{P}(x)$“) definieren lassen, jedoch nicht berechenbar sind.

Bemerkung. – Die Präzisierung des Begriffes der berechenbaren Funktion erfolgte auf zwei voneinander unabhängige Arten: durch den Herbrand-Gödelschen Begriff der „allgemein-rekursiven“ und den Churchschen Begriff
A84 der „λ-definierbaren“ Funktion; diese beiden | Begriffe sind von A. Church und Kleene als umfangsgleich erwiesen worden.

4. Während die Aufgabe eines Widerspruchsfreiheitsbeweises für die Analysis ein noch ungelöstes Problem ist, sind nach anderer Richtung, nämlich im Gebiet der stufenfreien Formalismen der kombinatorischen Logik, Nachweise für Widerspruchsfreiheit gelungen. Ein solcher stufenfreier Kalkul ist die von H. B. Curry im Anschluss an Schönfinkel aufgestellte Theorie der „combinators“, ferner die von Church begründete Theorie der „conversions“. Diese beiden formalen Theorien, deren enger Zusammenhang von J. B. Rosser

aufgezeigt wurde, liefern einen weittragenden und logisch befriedigenden Definitionsformalismus. Die Widerspruchsfreiheit des Operierens mit den combinators (im Sinne der Eindeutigkeit) ist schon vor längerem von Curry, die des Formalismus der conversions neuerdings von Church und Rosser bewiesen worden.

110 | Die stufenfreien kombinatorischen Formalismen liefern auch eine neue Anregung für die Gestaltung des Systems der Logistik. Durch eine Eingliederung dieser Gebiete kann eventuell eine Reform der Logistik im ganzen bewirkt werden. Ein zulänglicher Ansatz für eine solche Eingliederung liegt freilich bisher nicht vor.