Bernays Project: Text No. 6

Zusatz zu Hilberts Vortrag (über „Die Grundlagen der Mathematik")[†] (1927)

Appendix to Hilbert's lecture (on "The foundations of mathematics")

(*Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* 6, S. 89–92; engl. in [?], S. 485–489)

---

89 | 1. Zur Ergänzung der vorstehenden Abhandlung seien einige nähere Ausführungen über den dort angedeuteten Ackermannschen Beweis der Widerspruchsfreiheit nachgetragen.

Was zunächst, beim *Fall der Einlagerung*, die Abschätzung für die Höchstzahl der Ersetzungsschritte betrifft, so wird eine solche durch

$$2^n$$

geliefert, wobei n die Anzahl der gestaltlich verschiedenen ε-Funktionale bedeutet. Die geschilderte Beweismethode liefert noch eine wesentlich schärfere Abschätzung, welche z. B. für den Fall, daß gar keine Einlagerung vorkommt, die Höchstzahl

$$n+1$$

ergibt.

2. Die Betrachtung, durch die man beim *Fall der Überordnung* die Endlichkeit des Verfahrens erkennt, möge unter einfachen spezialisierenden Annahmen durchgeführt werden.

Die Annahmen sind folgende: Die im Beweis vorkommenden ε-Funktionale seien

$$\varepsilon_a \mathfrak{A}(a, \varepsilon_b \mathfrak{K}(a,b))$$

[†] *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* 6, S. 89–92

und

$$\varepsilon_b\mathfrak{K}(\mathfrak{a}_1, b), \varepsilon_b\mathfrak{K}(\mathfrak{a}_2, b), \ldots, \varepsilon_b\mathfrak{K}(\mathfrak{a}_n, b),$$

worin

$$\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$$

das $\varepsilon_a\mathfrak{A}(a, \varepsilon_b\mathfrak{K}(a, b))$ enthalten können, aber sonst kein ε-Funktional enthalten sollen.

Das Verfahren besteht nun in einer Aufeinanderfolge von „Gesamtersetzungen“; jede von diesen wird gebildet durch: eine Funktionsersetznng $\chi(a)$ für $\varepsilon_b\mathfrak{K}(a, b)$, vermöge deren $\varepsilon_a\mathfrak{A}(a, \varepsilon_b\mathfrak{K}(a, b))$ übergeht in $\varepsilon_a\mathfrak{A}(a, \chi(a))$, und eine Ersetzung für $\varepsilon_a\mathfrak{A}(a, \chi(a))$, vermöge deren $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ in Zahlzeichen $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n$ übergehen und für

$$\varepsilon_b\mathfrak{K}(\mathfrak{a}_1, b), \ldots, \varepsilon_b\mathfrak{K}(\mathfrak{a}_n, b)$$

die Werte

$$\chi(\mathfrak{z}_1), \ldots, \chi(\mathfrak{z}_n)$$

erhalten werden.

90 | Wir beginnen mit der Funktion

$$\chi_0(a),$$

die für alle a den Wert 0 hat („Nullersetzung“), und ersetzen auch demgemäß

$$\varepsilon_b\mathfrak{K}(\mathfrak{a}_1, b), \ldots, \varepsilon_b\mathfrak{K}(\mathfrak{a}_n, b)$$

alle durch 0.

Unter Festhaltung dieser Ersetzung wenden wir auf

$$\varepsilon_a\mathfrak{A}(a, \chi_0(a))$$

das ursprüngliche Verfahren des Probierens an, das nach höchstens zwei Schritten zum Ziele führt, derart, daß dann die zu

$$\varepsilon_a\mathfrak{A}(a, \chi_0(a))$$

gehörigen kritischen Formeln alle richtig werden.

So erhalten wir eine bzw. zwei Gesamtersetzungen

$$\mathfrak{E}_0, \text{ bzw. } \mathfrak{E}_0, \ \mathfrak{E}'_0.$$

Nun ist entweder $\mathfrak{E}_0$ bzw. $\mathfrak{E}_0'$ endgültig, oder es wird eine der zu

$$\varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_1, b), \text{ bzw. } \varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_2, b), \text{ bzw. } \ldots$$

gehörigen kritischen Formeln falsch. Es gehöre diese etwa zu $\varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_1, b)$ und $\mathfrak{a}_1$ gehe in $\mathfrak{z}_1$ über. Dann finden wir ein Beispiel $\mathfrak{z}$, so daß

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z})$$

richtig ist. Dieses Beispiel berücksichtigen wir nun, indem wir als Ersetzungsfunktion für

$$\varepsilon_b \mathfrak{K}(a, b)$$

anstatt $\chi_0(a)$ die Funktion

$$\chi_1(a)$$

nehmen, die definiert ist durch:

$$\begin{array}{rcl} \chi_1(\mathfrak{z}_1) & = & \mathfrak{z} \\ \chi_1(a) & = & 0 \quad \text{für } a \neq \mathfrak{z}_1. \end{array}$$

Mit $\chi_1(a)$ wiederholen wir nun das obige Verfahren, wobei jetzt die Werte der

$$\varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_\nu, b) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

sich erst nach der Wahl des Wertes für

$$\varepsilon_a \mathfrak{A}(a, \chi_1(a)),$$

91 | bestimmen, und bekommen dadurch eine bzw. zwei Gesamtersetzungen

$$\mathfrak{E}_1, \text{ bzw. } \mathfrak{E}_1, \ \mathfrak{E}_1'.$$

Nun ist entweder $\mathfrak{E}_1$ bzw. $\mathfrak{E}_1'$ endgültig oder wir finden wieder ein Beispiel $\mathfrak{z}'$ für eines der aus

$$\varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_1, b), \ldots, \varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_n, b),$$

durch die letzte Gesamtersetzung hervorgehenden ε-Funktionale, derart, daß für ein gewisses $\mathfrak{z}_2$

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}')$$

richtig ist, während

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{z}_2, \chi_1(\mathfrak{z}))$$

falsch ist. Daraus folgt zugleich, daß

$$\mathfrak{z}_2 \neq \mathfrak{z}_1.$$

Nunmehr führen wir statt $\chi_1(a)$ als Ersetzungsfunktion $\chi_2(a)$ durch folgende Definition ein

$$\begin{aligned} \chi_2(\mathfrak{z}_1) &= \mathfrak{z} \\ \chi_2(\mathfrak{z}_2) &= \mathfrak{z}' \\ \chi_2(a) &= 0 \quad \text{für } a \neq \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2. \end{aligned}$$

Mit dieser Funktion $\chi_2(a)$ wird nun wiederum das Ersetzungsverfahren wiederholt.

Indem wir in dieser Weise fortfahren, erhalten wir eine Reihe von Ersetzungsfunktionen

$$\chi_0(a), \chi_1(a), \chi_2(a), \ldots,$$

von denen jede aus der vorigen durch Hinzunahme eines von 0 verschiedenen Funktionswertes für einen neuen Argumentwert gebildet ist; und zu jeder Funktion $\chi_p(a)$ haben wir eine bzw. zwei Ersetzungen

$$\mathfrak{E}_p \text{ bzw. } \mathfrak{E}_p,\ \mathfrak{E}'_p.$$

Es kommt darauf an, zu zeigen, daß diese Ersetzungsreihe abbricht. Dazu betrachten wir zunächst die Ersetzungen

$$\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots .$$

Bei diesen ist jedesmal

$$\varepsilon_a \mathfrak{A}(a, \varepsilon_b \mathfrak{K}(a, b))$$

durch 0 ersetzt; die

$$\varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_\nu, b) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

gehen daher jedesmal in dieselben ε-Funktionale über; und für jedes von
92 diesen wird entweder 0 gesetzt oder ein von 0 verschiedenes Zahl|zeichen, welches dann als definitive Ersetzung beibehalten wird. Somit können unter den Ersetzungen

$$\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots$$

höchstens $n+1$ verschiedene sein. Ist aber $\mathfrak{E}_k$ mit $\mathfrak{E}_l$ identisch, *so* gehört entweder zu keiner von beiden oder zu jeder eine anschließende Ersetzung

$$\mathfrak{E}'_k \text{ bzw. } \mathfrak{E}'_l,$$

und in diesen ist dann

$$\varepsilon_a \mathfrak{A}(a, \varepsilon_b \mathfrak{K}(a, b))$$

beidemal durch dieselbe als Beispiel gefundene Zahl ersetzt, so daß auch die

$$\varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_\nu, b) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

für beide Ersetzungen in die gleichen ε-Funktionale übergehen.

Demnach können unter den Ersetzungen $\mathfrak{E}'_l$, für welche $\mathfrak{E}_l$ mit einer festen Ersetzung $\mathfrak{E}_k$ übereinstimmt, wieder höchstens $(n+1)$ verschiedene sein.

Im ganzen kann es also nicht mehr als $(n+1)^2$ verschiedene

$$\mathfrak{E}_p \text{ bzw. } \mathfrak{E}_p,\ \mathfrak{E}'_p$$

geben. Daraus folgt aber, daß spätestens mit der Ersetzungsfunktion

$$\chi_{(n+1)^2}(a)$$

unser Verfahren zum Abschluß kommt. Denn es können nicht die zu zwei verschiedenen Ersetzungsfunktionen $\chi_p(a)$, $\chi_q(a)$, $(q > p)$ gehörigen Ersetzungen völlig übereinstimmen, da man sonst mit Hilfe von $\chi_q(a)$ auf dasselbe Beispiel $\mathfrak{z}^*$ geführt werden müßte, das man schon mit Hilfe von $\chi_p(a)$ gefunden hat, während dieses doch in der Definition der auf $\chi_p(a)$ folgenden Ersetzungsfunktionen, insbesondere also auch derjenigen von $\chi_q(a)$, schon benutzt ist.

3. Schließlich sei noch bemerkt, daß man zur Berücksichtigung des Axioms der vollständigen Induktion, welches für den Zweck des Nachweises der Widerspruchsfreiheit in der Form

$$(\varepsilon_a A(a) = b') \to \overline{A}(b),$$

angesetzt werden kann, nur nötig hat, jedesmal wo man ein Beispiel $\mathfrak{z}$ für das Zutreffen einer Aussage $\mathfrak{B}(a)$ gefunden hat, zum kleinsten Beispiel überzugehen, indem man in der Reihe der auf numerische Formeln reduzierten Aussagen

$$\mathfrak{B}(0), \mathfrak{B}(0'), \ldots, \mathfrak{B}(\mathfrak{z})$$

die erste richtige aufsucht.