Inhaltsverzeichnis

1

Bernays Project: Text No. 1

Die Bedeutung Hilberts für die Philosophie der Mathematik[†] (1922)

Hilbert's significance for the philosophy of mathematics

(*Die Naturwissenschaften* 10, S. 93–99)

93a | Wenn wir die geistigen Beziehungen der mathematischen Wissenschaften zur Philosophie betrachten, wie sie sich seit den Zeiten der Aufklärung entwickelt haben, so bemerken wir mit Befriedigung, daß gegenwärtig das mathematische Denken im Begriff ist, wieder jenen mächtigen Einfluß auf die philosophische Spekulation zu gewinnen, welchen sie bis zur Zeit Kants besaß, den sie dann aber auf einmal völlig einbüßte. Jene plötzliche Abwendung von dem mathematischen Denken geschah im Zeichen der allgemeinen Abkehr von dem Geiste der Aufklärungszeit, wie sie sich zu Anfang des 19. Jahrhunderts einstellte.

Jedoch war diese Ablösung der Philosophie von der exakten Wissenschaft nur eine einseitige. Während nämlich die herrschende Philosophie sich ganz
93b der Mathematik entfremdete[1], ent|wickelte sich bei den Mathematikern im-

[†] The original title had a second line, reading „Von Paul Bernays, Göttingen."

[1] Unter den Philosophen, welche in dieser Hinsicht eine rühmliche Ausnahme machten,

mer mehr eine philosophische Richtung.

Der wesentlichste Grund hierfür war, daß die Mathematik weit über den Rahmen hinaus wuchs, in dem sie sich zu den Zeiten Kants noch bewegte. Nicht nur, daß der Bereich der erforschten Tatsachen sich erheblich vergrößerte, sondern die ganze Anlage der Untersuchungen wurde großzügiger und die ganze Methode umfassender. Die Begriffsbildungen erhoben sich zu einer höheren Stufe der Allgemeinheit; die Bedeutung der Formel trat zurück gegenüber begrifflichen Abstraktionen und systematischen Leitgedanken. Ferner auch die Stellung zu den Grundlagen und dem Objekt der mathematischen Wissenschaften änderte sich.

Die Aufgabe der Geometrie wurde weiter gefaßt. Die geometrischen Begriffsbildungen wurden allgemeiner und machten sich immer mehr von der Bindung an die räumliche Vorstellung frei. Und in den neu entstandenen geometrischen Theorien hatte die Raumanschauung nicht mehr die Bedeutung der Erkenntnis-Grundlage, sondern | sie wurde hier nur noch im Sinne *94a*
einer anschaulichen Analogie angewendet.

Auch in der Arithmetik gelangte die Forschung zu einer wesentlichen Erweiterung ihrer Problemstellung. Einerseits wurden durch die Erfindung der Mengenlehre die Begriffe der Anzahl und der Ordnung in einer ganz neuen Weise verallgemeinert und auf unendliche Gesamtheiten übertragen. Andrerseits führte die Entwicklung der Algebra dazu, daß man nicht mehr ausschließlich die Zahlen und Größen als Objekte der Untersuchung ansah, vielmehr den rechnerischen Formalismus selbst zum Gegenstande nahm und sich ganz allgemein die Betrachtung der Formalismen zur Aufgabe machte. Die Zahlen sowie die Größen erschienen jetzt nur noch als etwas Spezielles, und je mehr man ihre Gesetzlichkeit unter allgemeineren Gesichtspunkten betrachtete, um so mehr entwöhnte man sich, diese Gesetzlichkeit als selbstverständlich hinzunehmen.

So ging denn die ganze Entwicklung der Mathematik dahin, alles das, was vordem als einziger Gegenstand der Forschung galt und wovon die Grundeigenschaften als etwas für die Mathematik hinzunehmendes und keiner mathematischen Untersuchung fähiges noch bedürftiges erachtet wurden, dieses seines Ansehens der Ausschließlichkeit und Endgültigkeit zu berauben. Der Rahmen, den die frühere philosophische Ansicht, und auch noch die Kantische Philosophie, für die Mathematik abgesteckt hatte, wurde gesprengt.

ist besonders Bolzano zu erwähnen, der als erster die strenge Begründung für die Theorie der reellen Zahlen gegeben hat.

Die Mathematik ließ sich nicht mehr die Methode und die Grenzen ihrer Forschung von der Philosophie vorschreiben, sondern nahm die Erörterung ihrer methodischen Probleme selbst in die Hand. So wurden die Axiome der mathematischen Theorien des näheren auf ihre logischen Beziehungen hin untersucht, sowie auch die Schlußweisen einer genaueren Kritik unterzogen. Und je weiter man diese Probleme verfolgt hat, um so mehr hat das mathematische Denken an ihnen seine Fruchtbarkeit gezeigt und sich als unentbehrliches Hilfsmittel für die theoretische Philosophie erwiesen.

Zu dieser Entwicklung nun, welche bis in die Gegenwart reicht, hat in bedeutsamer Weise David Hilbert beigetragen. Was er auf diesem Gebiete geleistet hat, soll im folgenden geschildert werden.

Als Hilbert sich den Problemen zuwandte, welche es betreffs der Grundlagen des mathematischen Denkens zu lösen galt, hatte er nicht nur das Rüstzeug seiner umfassenden Beherrschung der mathematischen Methoden zur Verfügung, sondern er war auch vor allem durch seine menschliche Veranlagung gleichsam vorbestimmt für diese Aufgaben. Denn für ihn hatte die Mathematik die Bedeutung einer Weltanschauung, und er ging an jene grundsätzlichen Probleme mit der Gesinnung eines Eroberers, der bestrebt
94b ist, dem mathematischen Denken einen | möglichst umfassenden Machtbereich zu erkämpfen.

Bei der Verfolgung dieses Zieles kam es darauf an, den Fehler jener extremen rationalistischen Denker zu vermeiden, welche glaubten, daß durch reines Denken eine vollkommene Erkenntnis alles Wirklichen zu erlangen sei. Es konnte sich also nicht etwa darum handeln, alle Erkenntnis des Tatsächlichen in die Mathematik einzubeziehen, vielmehr war es zum Zwecke einer möglichst weiten Ausdehnung des Herrschaftsgebietes der Mathematik erforderlich, eine scharfe Grenzscheidung zwischen Mathematischem und Nichtmathematischem vorzunehmen, welche es erlaubte, alle mathematischen Bestandteile im Erkennen auch wirklich für die Mathematik in Anspruch zu nehmen.

In diesem Sinne hat auch tatsächlich Hilbert das Problem angefaßt. Sein erstes und größtes Werk auf dem Gebiet der Methodenfragen sind die im Jahre 1899 erschienenen *Grundlagen der Geometrie*[a]. In dieser Schrift stellte Hilbert ein neues System von Axiomen für die Geometrie auf, welche er nach den Gesichtspunkten der Einfachheit und der logischen Vollständigkeit,

[a] *Vide* [**?**].

unter möglichst enger Anknüpfung an die Begriffsbildungen Euklids wählte. Das Gesamtsystem der Axiome gliederte er in fünf Axiomgruppen und untersuchte nun genauer den Anteil, den die verschiedenen Axiomgruppen (sowie auch einzelne der Axiome) an dem logischen Aufbau der Geometrie haben.

Diese Untersuchung hat durch die Fülle an neuen, fruchtbaren Methoden und Gesichtspunkten, welche sie darbot, einen mächtigen Einfluß auf die Entwicklung der mathematischen Forschung ausgeübt. Jedoch liegt die Bedeutung von Hilberts *Grundlagen der Geometrie* keineswegs nur in dem rein mathematischen Gehalte. Was vielmehr diesem Werk seine Popularität verlieh und den Namen Hilberts weit über den Kreis seiner Fachgenossen hinaus berühmt machte, das war die neue methodische Wendung, welche hier dem Gedanken der Axiomatik gegeben wurde.

Das Wesen der axiomatischen Methode, d. h. der Methode, eine Wissenschaft aus Axiomen und Definitionen logisch zu entwickeln, besteht ja nach der geläufigen Auffassung darin, daß man von einigen wenigen Grundsätzen ausgeht, von deren Wahrheit man überzeugt ist diese als Axiome an die Spitze stellt und aus ihnen mit Hilfe des logischen Schließens Lehrsätze ableitet, deren Wahrheit dann ebenso sicher ist, wie die der Axiome, eben weil sie aus diesen logisch folgen. Bei dieser Ansicht wird das Augenmerk vor allem auf den Erkenntnischarakter der Axiome gerichtet. Ja, ursprünglich ließ man als Axiome überhaupt nur solche Sätze gelten, deren Wahrheit a priori einleuchtete. Und noch Kant war der Ansicht, daß der Erfolg und die Fruchtbarkeit der axiomatischen Methode in der Geometrie und in der Mechanik wesentlich darauf beruhe, | daß man in diesen Wissenschaften von Erkenntnissen a *95a*
priori (den Axiomen der reinen Anschauung und den Grundsätzen des reinen Verstandes) ausgehen könne.

Allerdings hat man diese Forderung, daß ein jedes Axiom eine a priori erkennbare Wahrheit ausdrücken müsse, bald preisgegeben. Denn bei den mannigfachen Anlässen, welche sich besonders in der Weiterentwicklung der Physik zur Anwendung der axiomatischen Methode boten, ergab es sich sozusagen von selbst, daß man teils Erfahrungssätze, teils auch bloße Hypothesen als Axiome physikalischer Theorien wählte. Dabei erwies sich das axiomatische Verfahren besonders in den Fällen als fruchtbar, wo es gelang, durch die Aufstellung eines Axioms die Ergebnisse vielfältiger Erfahrungen in einer Aussage von allgemeinem Charakter zusammenzufassen. Ein berühmtes Beispiel hierfür bilden die beiden Sätze von der Unmöglichkeit eines perpetuum mobile erster und zweiter Art, welche Clausius in der Theorie der Wärme als Axiome an die Spitze stellte.

Dazu kam noch, daß der Glaube an die apriorische Erkenntnis der geometrischen Axiome bei den Forschern der exakten Wissenschaften – hauptsächlich infolge der nicht-euklidischen Geometrie und unter dem Eindruck der Argumente von Helmholtz – immer mehr verloren ging und so die empiristische Ansicht, nach welcher die Geometrie nichts anderes ist als eine Erfahrungswissenschaft, immer mehr Anhänger fand. Jedoch änderte dieses Abgehen vom Apriorismus nicht wesentlich den Gesichtspunkt, unter dem man die axiomatische Methode betrachtete.

Eine stärkere Wandlung wurde aber durch die systematische Entfaltung der Geometrie bewirkt. Die mathematische Abstraktion hatte sich, von der elementaren Geometrie ausgehend, weit über den Bereich der räumlichen Anschauung erhoben und zur Bildung von umfassenden Lehrgebäuden geführt, in welche die gewöhnliche Euklidische Geometrie sich einordnen ließ und innerhalb deren ihre Gesetzlichkeit nur als eine ganz spezielle neben anderen mathematisch gleichberechtigten erschien. Hiermit eröffnete sich eine neue Art von mathematischer Spekulation, mit Hilfe deren man die geometrischen Axiome von einem höheren Standpunkt betrachten konnte. Es zeigte sich aber sogleich, daß diese Betrachtungsweise mit der Frage nach dem Erkenntnischarakter der Axiome – welche man doch vordem für das einzig Bedeutsame an der axiomatischen Methode hielt – gar nichts zu schaffen hatte. Und somit ergab sich die Notwendigkeit einer reinlichen Scheidung zwischen den mathematischen und den erkenntnistheoretischen Problemen der Axiomatik. Die Forderung einer solchen Sonderung der Probleme hat Klein in seinem
95*b* Erlanger Programm[2] bereits in aller | Klarheit ausgesprochen.

Nun war es das wesentliche an Hilberts Grundlegung der Geometrie, daß hier zum erstenmal in der Aufstellung des Axiomensystems von vornherein die Sonderung des Mathematischen und Logischen von dem Räumlich-Anschaulichen – und damit von der erkenntnistheoretischen Grundlage der Geometrie – restlos durchgeführt und mit voller Schärfe zum Ausdruck gebracht wurde.

Wohl spricht Hilbert in der Einleitung seines Buches den Gedanken aus, daß die Aufstellung der Axiome für die Geometrie and die Erforschung ihres Zusammenhanges eine Aufgabe sei, die „auf die logische Analyse unserer räumlichen Anschauung" hinausläuft, und ebenso bemerkt er im ersten Paragraphen, daß jede einzelne der Axiomgruppen „gewisse zusammengehörige

[2] „Vergleichende Betrachtungen über neue geometrische Forschungen" (*vide* [?]).

Grundtatsachen unserer Anschauung“ ausdrückt.[b] Aber diese Äußerungen stehen ganz außerhalb des axiomatischen Aufbaues; dieser selbst vollzieht sich ohne jegliche Bezugnahme auf die räumliche Anschauung.

Nun ist es freilich schon von jeher eine Anforderung an eine strenge axiomatische Begründung der Geometrie gewesen, daß die Beweise sich ausschließlich an dasjenige halten sollen, was in den Axiomen formuliert wird, dagegen nicht auf sonstige Art die räumliche Anschauung heranziehen dürfen. Und in neuerer Zeit hat besonders Pasch bei seiner Grundlegung der Geometrie[3] auf die Durchführung dieser Forderung Gewicht gelegt und ihr auch vollkommen entsprochen.

Die Hilbertsche Axiomatik geht aber in der Ausschaltung der räumlichen Anschauung noch einen Schritt weiter. Hier wird die Heranziehung der räumlichen Vorstellung nicht nur bei den Beweisen, sondern auch in den Axiomen und den Begriffsbildungen gänzlich vermieden. Die Worte „Punkt“, „Gerade“, „Ebene“ dienen nur als Namen für drei verschiedene Arten von Gegenständen, über welche unmittelbar nichts anderes vorausgesetzt wird, als daß die Gegenstände einer jeden Art ein fest bestimmtes System bilden. Alle weitere Charakterisierung erfolgt erst durch die Axiome. Desgleichen werden mit Ausdrücken wie „der Punkt A liegt auf der Geraden a“ oder „der Punkt A liegt zwischen B und C“ nicht die gewöhnlichen, anschaulichen Bedeutungen verbunden, vielmehr bezeichnen sie nur gewisse, zunächst unbestimmte Beziehungen, die dann erst durch die Axiome, in denen diese Ausdrücke vorkommen, *implicite charakterisiert werden.*[4]

Zufolge dieser Auffassung sind die Axiome überhaupt keine Urteile, von
denen man sagen kann, daß sie wahr oder falsch sind; nur in dem | Zu- *96a*
sammenhange des ganzen Axiomensystems haben sie überhaupt einen Sinn. Und auch das Axiomensystem als Ganzes bildet nicht den Ausspruch einer Wahrheit, vielmehr ist die logische Struktur der axiomatisc$_a\underline{h}_a$en Geometrie im Sinne Hilberts – ganz entsprechend derjenigen der abstrakten Gruppentheorie – eine rein hypothetische: Wenn irgendwo in Wirklichkeit drei Systeme von Gegenständen vorliegen sowie bestimmte Beziehungen zwischen diesen Gegenständen, derart, daß für diese die Axiome der Geometrie zutreffen (d. h. daß bei geeigneter Zuordnung der Namen zu den Gegenständen und

[3] *Vorlesungen über neuere Geometrie* (*vide* [**?**]).

[4] Man spricht in diesem Sinne von „impliciter Definition“.

---

[b] *Vide* [**?**], p. 1* (Einleitung), p. 4 (§ 1).

Beziehungen die Axiome in wahre Behauptungen übergehen), dann treffen für diese Gegenstände und Beziehungen auch alle Lehrsätze der Geometrie zu. Das Axiom$_{a}\underline{\text{en}}_{a}$system selbst bringt also nicht eine Tatsächlichkeit zum Ausdruck, sondern es stellt nur eine mögliche Form eines Systems von Verknüpfungen dar, welches mathematisch nach seinen *inneren* Eigenschaften zu untersuchen ist.

Hiernach kommt die axiomatische Behandlung der Geometrie darauf hinaus, daß man von der Geometrie, so wie sie als Wissenschaft von den räumlichen Figuren vorliegt, den rein mathematischen Bestandteil der Erkenntnis ablöst und für sich abgesondert untersucht. Die räumlichen Verhältnisse werden gleichsam in die Sphäre des Mathematisch-Abstrakten projiziert, in welcher die Struktur ihres Zusammenhanges sich als ein Objekt des rein mathematischen Denkens darstellt und einer Forschungsweise unterzogen wird, die nur auf die logischen Beziehungen gerichtet ist, unbekümmert um die Frage nach der *sachlichen* Wahrheit, d. h. um die Frage, ob die durch die Axiome festgelegten geometrischen Verknüpfungen sich in der Wirklichkeit (oder auch nur in unserer räumlichen Anschauung) vorfinden.

Diese Art der Deutung, welche die axiomatische Methode in Hilberts Grundlagen der Geometrie erfuhr, bot nun insbesondere den Vorteil, daß sie nicht auf die Geometrie beschränkt war, sondern sich ohne weiteres auf andere Disziplinen übertragen ließ. Den Gesichtspunkt der Gleichartigkeit der axiomatischen Methode in ihrer Anwendung auf die verschiedensten Gebiete hat Hilbert auch von vornherein ins Auge gefaßt, und von ihm geleitet suchte er diese Methode in möglichst weitem Umfange zur Geltung zu bringen. So gelang es ihm insbesondere, die kinetische Gastheorie sowie die elementare Strahlungstheorie in strenger Weise axiomatisch zu begründen.

Auch schl$_{a}\underline{\text{o}}_{a}$ssen sich der axiomatischen Forschungsweise Hilberts viele Mathematiker an und wirkten im Sinne seiner Bestrebungen. Insbesondere war es ein Erfolg der Axiomatik, als Zermelo im Gebiete der Mengenlehre die bis dahin bestehende Unsicherheit des Schließens durch eine geeignete
96b axiomatische Abgrenzung der | Schlußweisen überwand und zugleich auch mit seinem Axiomensystem eine gemeinsame Grundlage für Zahlentheorie, Analysis und Mengenlehre schuf$_{a}\underline{.}_{a}$[5]

Eine Zusammenfassung der methodischen Leitgedanken und eine Übersicht über die Ergebnisse der axiomatischen Forschung hat Hilbert in seinem Züricher

[5] „Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre“ (*vide* [**?**]).

Vortrag über „Axiomatisches Denken“ (1917)[6] gegeben. Hier kennzeichnet er die axiomatische Methode als ein allgemeines Verfahren des wissenschaftlichen Denkens. Dieses Verfahren setzt auf allen den Wissensgebieten ein, wo man bereits zur Aufstellung einer Theorie – oder, wie Hilbert es ausdrückt, zu einer Ordnung der Tatsachen mit Hilfe eines Fachwerkes von Begriffen – gelangt ist. Es zeigt sich dann jedesmal, daß zum logischen Aufbau der Theorie einige wenige Sätze ausreichen, und man gewinnt damit die Möglichkeit einer axiomatischen Grundlegung der Theorie. Diese wird zunächst im Sinne der alten Axiomatik erfolgen; man kann dann aber stets – so wie in der Geometrie – zu dem Hilbertschen axiomatischen Standpunkt übergehen, indem man von dem Erkenntnis-Charakter der Axiome absieht und das ganze Fachwerk der Begriffe nur (als eine *mögliche* Form eines Verknüpfungszusammenhanges) auf seine innere Struktur hin betrachtet.

Somit wird die Theorie zum Objekt einer rein mathematischen Untersuchung, welche eben die *axiomatische* heißt. Und zwar sind es bei allen Theorien dieselben Hauptfragen, welche man zu erörtern hat: Zunächst einmal muß das Axiomensystem, damit es einen möglichen Verknüpfungszusammenhang darstellt, der Bedingung der *Widerspruchsfreiheit* genügen, d. h. die in den Axiomen ausgedrückten Beziehungen müssen miteinander logisch vereinbar sein. Somit entsteht die Aufgabe eines Nachweises für die Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems – ein Problem, welches die alte Auffassung der Axiomatik nicht kennt, weil hier ja jedes Axiom als Ausspruch einer Wahrheit gilt. Sodann kommt es darauf an, einen Überblick über die logischen *Abhängigkeiten* zwischen den verschiedenen Sätzen der Theorie zu gewinnen, insbesondere hat man zu untersuchen, ob die Axiome voneinander logisch unabhängig sind, oder ob etwa eines oder mehrere von ihnen aus den übrigen Axiomen bewiesen werden können und somit in ihrer Rolle als Axiome überflüssig sind. Außerdem aber besteht noch die Aufgabe, nach den Möglichkeiten einer „Tieferlegung der Fundamente“ der Theorie zu forschen, d. h. zu prüfen, ob nicht die vorliegenden Axiome der Theorie sich auf Sätze von fundamentalerem Charakter zurückführen lassen, welche dann „eine tiefer $_a$liegende$_a$ Schicht von Axiomen“ für das betrachtete Fachwerk von Begriffen bilden würden.[c]

[6] *Vide* [?].

[c] Both quotations in [?], p. 148; second quote emended.

97a | Diese Art der Untersuchung, welche durchaus mathematischen Charakter besitzt, läßt sich nun auf jedes Wissensgebiet anwenden, das überhaupt einer theoretischen Behandlung fähig ist, und ihre Ausführung ist für die Klarheit der Erkenntnis und für die systematische Übersicht von höchstem Wert. Somit gewinnt durch die Idee der Axiomatik das mathematische Denken eine universale Bedeutung für das wissenschaftliche Erkennen. In der Tat kann Hilbert behaupten: „Alles, was Gegenstand des wissenschaftlichen Denkens überhaupt sein kann, verfällt, sobald es zur Bildung einer Theorie reif ist, der axiomatischen Methode und damit $_{a}$mittelbar$_{a}$ der Mathematik.“[d]

Mit dieser umfassenden Ausgestaltung des axiomatischen Gedankens war nun zwar ein hinlänglich weiter Rahmen für die mathematische Problemstellung gewonnen und die erkenntnistheoretische Fruchtbarkeit der Mathematik klargelegt. Aber in Betreff der *Sicherheit* des mathematischen Verfahrens blieb noch eine grundsätzliche Frage offen.

Nämlich als das Erste und Wichtigste bei der axiomatischen Untersuchung einer Theorie war ja die Aufgabe erkannt, die Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems zu beweisen. In der Tat bildet die Widerspruchsfreiheit der Axiome die Lebensfrage für eine jede axiomatische Theorie; denn von ihr hängt es ab, ob das Fachwerk der Begriffe überhaupt einen Verknüpfungszusammenhang oder nur den Schein eines solchen darstellt.

Wenn wir nun zusehen, wie es bei den verschiedenen geometrischen und physikalischen Theorien, die eine axiomatische Begründung erfahren haben, mit dem Nachweis der Widerspruchsfreiheit bestellt ist, so finden wir, daß dieser überall nur in einem relativen Sinn erbracht ist: die Widerspruchsfreiheit des zu untersuchenden Axiomensystems wird bewiesen, indem man ein System von Gegenständen und von Beziehungen *innerhalb der mathematischen Analysis* aufweist, für welches die Axiome erfüllt sind. Diese „Methode der Zurückführung“ auf die Analysis (d. h. auf die Arithmetik im weiteren Sinne) hat zur Voraussetzung, daß die Analysis selbst ein widerspruchsfreies System bildet, – sei es nun, daß sie als ein Inbegriff von Erkenntnissen oder nur als ein axiomatisches Gebäude (d. h. als ein bloß mögliches System von Verknüpfungen) anzusehen ist.

Nun ist aber die Widerspruchsfreiheit der Analysis nicht so ohne weiteres selbstverständlich, wie man zunächst denken möchte. Die Schlußweisen, welche man in der Theorie der reellen Zahlen und der reellen Funktionen an-

[d] *Vide* [**?**], p. 156; quote emended.

wendet, haben nicht jenen Charakter des unmittelbar Handgreiflichen, wie er etwa den Schlüssen der elementaren Zahlentheorie eigen ist. Und wenn man die Beweismethoden von allem irgendwie Problematischen befreien will, so ist man genötigt, die Analysis axiomatisch aufzubauen. Es erweist sich somit die Notwendigkeit, auch für | die Analysis einen Beweis ihrer Wider- 97b
spruchsfreiheit zu liefern.

Das Erfordernis eines solchen Nachweises zur Sicherheit der axiomatischen Methode und der Mathematik überhaupt hat Hilbert von Anfang an erkannt und betont. Und wenngleich seine Bemühungen um dieses Problem noch nicht zu dem Endziel geführt haben, so ist es ihm doch geglückt, den methodischen Ansatz zu finden, durch welchen die Aufgabe mathematisch angreifbar wird.

Die Grundgedanken dieses Ansatzes wurden von Hilbert schon 1904 in seinem Heidelberger Vortrag „über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik“[7] dargelegt. Jedoch boten diese Ausführungen dem Verständnis große Schwierigkeiten und waren auch manchen Anfechtungen ausgesetzt. Seitdem hat Hilbert seinen Plan weiter verfolgt und seinen Ideen eine faßliche Form gegeben, die er kürzlich in einem Vortragszyklus in Hamburg zur Darstellung brachte.

Der Gedankengang, auf welchem der Hilbertsche Ansatz für die Grundlegung der Arithmetik und Analysis beruht, ist folgender: Die methodischen Schwierigkeiten der Analysis, auf Grund deren man in dieser Wissenschaft genötigt ist, über den Rahmen des konkret Vorstellbaren hinauszugehen, rühren davon her, daß die Stetigkeit und das Unendliche hier eine wesentliche Rolle spielen. Dieser Umstand würde auch für den Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Analysis ein unüberwindliches Hindernis bilden, wenn dieser Nachweis in dem Sinne geführt werden müßte, daß man zeigt: ein System von Dingen, wie es die Analysis annimmt – etwa das System aller endlichen oder unendlichen Mengen von ganzen Zahlen – ist logisch möglich.

Nun braucht aber die Behauptung der Widerspruchsfreiheit gar nicht in diesem Sinne bewiesen zu werden, vielmehr kann man ihr auch folgende ganz andere Wendung geben: die Schlußweisen der Analysis können niemals zu einem Widerspruch führen – oder, was auf dasselbe hinauskommt: es ist unmöglich, aus den Axiomen der Analysis und mit Hilfe ihrer Methoden des Schließens die Beziehung $1 \neq 1$ („1 ist ungleich 1“) abzuleiten. Hier handelt

[7] Anhang VII zu [**?**] (*vide* [**?**]).

es sich nicht um die Möglichkeit einer stetigen, unendlichen Mannigfaltigkeit von gewissen Eigenschaften, sondern um die Unmöglichkeit eines mathematischen Beweises mit bestimmten Eigenschaften. Ein mathematischer Beweis ist aber, im Unterschied von einer stetigen, unendlichen Mannigfaltigkeit, ein konkretes, in allen Teilen überblickbares Objekt; er muß sich, wenigstens grundsätzlich, von Anfang bis Ende vollständig mitteilen lassen. Und auch die verlangte Beschaffenheit des Beweises (daß er gemäß den Prinzipien der Analysis verläuft und zu dem Endergebnis $1 \neq 1$ führt) ist eine konkret
98*a* fest|stellbare Eigenschaft. Es besteht daher auch grundsätzlich durchaus die Möglichkeit, den Nachweis für die Widerspruchslosigkeit der Analysis durch elementare, handgreiflich sichere Überlegungen zu erbringen; wir müssen nur den Standpunkt einnehmen, daß nicht diejenigen Gegenstände, auf welche sich die Beweise der Analysis beziehen, sondern vielmehr diese Beweise selbst das Objekt der Untersuchung bilden.

Auf Grund dieser Erwägung ergibt sich nun für Hilbert die Aufgabe einer genaueren Betrachtung der Formen mathematischer Beweise. Wir müssen – so sagt er in seinem Vortrag über axiomatisches Denken – „den Begriff des spezifisch mathematischen Beweises selbst zum Gegenstand einer Untersuchung machen, gerade wie ja auch der Astronom die Bewegung seines Standortes berücksichtigen, der Physiker sich um die Theorie seines Apparates kümmern muß und der Philosoph die Vernunft selbst kritisiert.“[e] Für die Struktur der mathematischen Beweise sind aber in erster Linie die allgemeinen Formen des logischen Schließens maßgebend. Daher muß die geforderte Untersuchung der mathematischen Beweise jedenfalls die logischen Schlußformen mitbetreffen. Und so erklärte auch Hilbert schon in dem Heidelberger Vortrag, daß „eine teilweise gleichzeitige Entwickelung der Gesetze der Logik und der Arithmetik erforderlich“[f] sei.

Mit diesem Gedanken knüpfte Hilbert an die *mathematische Logik* an. Diese Wissenschaft, deren Idee auf Leibniz zurückgeht und die sich in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts, von primitiven Anfängen anhebend, zu einem fruchtbaren Felde des mathematischen Denkens entwickelte, hat die Methoden ausgebildet, wie man durch eine symbolische Bezeichnung der einfachsten logischen Verknüpfungen (wie „und“, „oder“, „nicht“, „alle“) einer mathematischen Beherrschung der Formen des logischen Schließens gelangt. Es zeigte sich, daß man durch diesen „Logikkalkul“ erst den vollen

[e] *Vide* [**?**], p. 155.
[f] *Vide* [**?**], p. 250.

Überblick über das System der logischen Schlußformen gewinnt, von welchem die Schlußfiguren, die man in der traditionellen Logik behandelt, nur ein verhältnismäßig kleines Teilgebiet bilden. Insbesondere gelang es Peano, Frege und Russell, den Logikkalkul so auszugestalten, daß man damit die gedanklichen Schlüsse der mathematischen Beweise durch symbolische Operationen vollkommen nachbilden kann.

Dieses Verfahren des Logikkalkuls bildet eine sinngemäße Ergänzung der Methode der axiomatischen Begründung einer Wissenschaft, insofern dadurch neben der genauen Festlegung der *Voraussetzungen*, wie sie die axiomatische Methode bewirkt, auch eine genaue Verfolgung der *Schlußweisen* ermöglicht wird, mit Hilfe deren man von den Grundsätzen einer Wissenschaft zu ihren Folgerungen gelangt.

Indem nun Hilbert das Verfahren der mathematischen Logik sich zu eigen machte, nahm er | an dieser Methode eine ganz entsprechende Umdeutung 98b
vor, wie er es mit der axiomatischen Methode getan hatte. So wie er ehedem die Grundbeziehungen und die Axiome der Geometrie ihres anschaulichen Inhalts entkleidete, so schaltet er nun aus den Beweisen der Arithmetik und Analysis, die er zum Gegenstand seiner Untersuchung macht, den gedanklichen Inhalt der Schlüsse aus, indem er die Formalsysteme, durch welche sich jene Beweise in dem Logikkalkul darstellen, losgelöst von ihrer inhaltlich-logischen Interpretation als das unmittelbare Objekt der Betrachtung nimmt und somit die Beweisführungen der Analysis durch ein rein formales Handeln ersetzt, welches mit bestimmten Zeichen nach festen Regeln stattfindet.

Durch diese Betrachtungsweise, in welcher die Absonderung des Spezifisch-Mathematischen von allem Inhaltlichen ihren Gipfelpunkt erreicht, gewinnt die Hilbertsche Ansicht von dem Wesen der Mathematik und der axiomatischen Methode erst ihren wirklichen Abschluß. Denn wir erkennen nunmehr, daß jene Sphäre des Mathematisch-Abstrakten, in welche die Denkmethode der Mathematik alles theoretisch Faßbare übersetzt, nicht diejenige des inhaltlich Logischen, sondern vielmehr das Gebiet des reinen Formalismus ist. Die Mathematik erweist sich als die allgemeine Lehre von den Formalismen, und indem wir sie als solche erfassen, wird auch ihre universale Bedeutung ohne weiteres klar.

Diese Bedeutung der Mathematik als allgemeine Formenlehre ist in der neueren Physik aufs glänzendste zutage getreten, insbesondere in der Einsteinschen Gravitationstheorie, wo der mathematische Formalismus für Einstein die Richtlinie abgab zur Aufstellung seines Gravitationsgesetzes, dessen genauere Form ohne Heranziehung der mathematischen Hilfsmittel niemals hätte gefunden werden können. Und hier war es wiederum Hilbert, der dieses Gravitationsgesetz zuerst auf seine einfachste mathematische Form brachte und, indem er die Möglichkeit einer harmonischen Zusammenfügung der Gravitationstheorie mit der Elektrodynamik aufzeigte, die weiteren an die Einsteinsche Theorie anknüpfenden mathematischen Spekulationen eröffnet hat, die dann von Weyl durch seine geometrische Idee zur systematischen Vollendung geführt wurden. Falls diese Spekulationen sich in der Physik bewähren sollten, so würde damit der Triumph der Mathematik in der modernen Wissenschaft ein vollkommener sein.

Betrachten wir nun im ganzen den Gedankenertrag von Hilberts philosophischen Untersuchungen sowie die Wirkung, die sie ausgeübt haben, und halten wir uns andererseits die anfangs geschilderte Entfaltung der Mathematik in der neueren Zeit vor Augen, so zeigt sich uns das wesentliche an Hilberts
99a philosophischer Leistung darin, daß er den Anspruch auf einen uni|versalen geistigen Einfluß in der Wissenschaft, den sich die Mathematik durch ihre innerliche Vertiefung und ihre großzügige Ausgestaltung erworben hatte, mit Nachdruck und Erfolg zur Geltung gebracht hat, indem er eine weitherzi-
99b ge | philosophische Auffassung von der Mathematik entwickelte, welche es ermöglicht, der Bedeutung und Tragweite ihrer Methode gerecht zu werden, Die Freunde der mathematischen Wissenschaft werden ihm dafür dauernden Dank wissen.

Kapitel 2

Bernays Project: Text No. 2

Über Hilberts Gedanken zur Grundlegung der Arithmetik.[†]
(1922)

On Hilbert's thoughts concerning the founding of arithmetic

(*Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 31, S. 10–19)

---

10 | Der neue methodische Ansatz Hilberts zur Grundlegung der Arithmetik, von dem ich sprechen will, stellt eine modifizierte und bestimmtere Fassung des Planes dar, welchen Hilbert schon seit langem im Auge hatte und dem er zuerst in seinem Heidelberger Vortrag Ausdruck verliehen hat. An die Stelle der damaligen, recht dunklen Andeutungen ist nun ein scharf umrissenes, faßliches Programm getreten, von dem auch bereits die Anfänge ausgeführt sind.

Die Aufgabe, deren Lösung hier erstrebt wird, ist der Nachweis der Widerspruchslosigkeit der Arithmetik. Wir müssen uns zunächst vergegenwärtigen, wie man zu dieser Problemstellung kommt.

[†]The original publication had the following subtitle: „Vortrag, gehalten auf der Mathematikertagung in Jena, September 1921. Von Paul Bernays in Göttingen.“ According to a note added at the end, the paper was received October 13, 1921.

Der Aufbau der Arithmetik (im weiteren Sinne, also einschließlich der Analysis und der Mengenlehre), wie er seit der Einführung der strengen Methoden geschieht, ist ein *axiomatischer*, das heißt, man geht dabei – entsprechend wie bei der automatischen Begründung der Geometrie – aus von der Annahme eines *Systems von Dingen*, von welchem bestimmte Verknüpfungseigenschaften vorausgesetzt werden. Bei der Dedekindschen Begründung der Analysis ist es das System der Elemente des Kontinuums, in Zermelos Aufbau der Mengenlehre ist es der Operationsbereich $\mathfrak{B}$, welcher zu$_a$ $\underline{\mathrm{G}}_a$runde gelegt wird. Und auch bei derjenigen Begründung der Analysis, welche von der Betrachtung der Zahlenfolgen ausgeht, wird die Zahlenreihe als ein abgeschlossenes, überblickbares System, etwa wie eine unendliche Klaviatur, vorgestellt.

In der Annahme eines solchen Systems mit bestimmten Verknüpfungseigenschaften liegt nun etwas für die Mathematik gleichsam *transzendentes*, und da entsteht die Frage, welche grundsätzliche Stellung man dazu einnehmen soll.

Ein Berufen auf ein anschauliches Erfassen der Zahlenreihe sowie der Mannigfaltigkeit der Größen ist durchaus in Betracht zu ziehen. | Aber 11
jedenfalls könnte es sich dabei nicht um Anschauung im primitiven Sinne handeln; denn in der primitiven anschaulichen Vorstellungsweise sind uns jedenfalls keine unendlichen Mannigfaltigkeiten gegeben. Und wenn es auch ganz voreilig wäre, jede weitergehende Art von anschaulicher Evidenz von vornherein abzustreiten, so werden wir doch derjenigen Tendenz der exakten Wissenschaft Rechnung tragen, welche darauf gerichtet ist, die feineren Organe dor Erkenntnis nach Möglichkeit auszuschalten und nur die primitivsten Erkenntnismittel zu Hilfe zu nehmen.

Unter diesem Gesichtspunkt werden wir versuchen, ob es nicht möglich ist, jene transzendenten Annahmen in einer solchen Weise zu begründen, daß nur *primitive anschauliche Erkenntnisse zur Anwendung kommen.* In Anbetracht dieser Beschränkung der Erkenntnismittel werden wir andererseits von dieser Begründung nicht verlangen können, daß sie uns die zu begründenden Annahmen als Wahrheiten (im philosophischen Sinn) erkennen läßt, sondern wir werden zufrieden sein, wenn es gelingt, die auf jene Annahmen aufgebaute Arithmetik als ein mögliches, d. h. widerspruchsfreies Gedankensystem zu erweisen.

Hiermit sind wir schon bei der Hilbertschen Problemstellung angelangt. Ehe wir aber zusehen, wie das Problem in Angriff zu nehmen ist, müssen wir uns erst fragen, ob es nicht eine andere und vielleicht naturgemäßere Art der

Stellungnahme zu den transzendenten Annahmen gibt.

In der Tat liegen zweierlei Versuche nahe und sind auch unternommen worden. Der eine Versuch geht gleichfalls auf den Nachweis der Widerspruchslosigkeit aus, aber nicht mit den Mitteln der primitiven Anschauung, sondern mit Hilfe der *Logik*.

Man erinnert sich daran, daß ja die Widerspruchslosigkeit der Euklidischen Geometrie durch die Methode der Zurückführung auf die Arithmetik von Hilbert bewiesen wurde. So scheint es nun auch sachgemäß, die Widerspruchslosigkeit der Arithmetik durch die Zurückführung auf die Logik zu beweisen.

Es sind besonders Frege und Russell, welche das Problem der logischen Begründung der Arithmetik mit großer Energie in Angriff nahmen.

Das Resultat war in Hinsicht auf das eigentliche Ziel ein negatives.

Zunächst zeigte sich an den berühmten *Paradoxien der Mengenlehre*, daß durch das Zurückgehen auf die Logik gar keine größere Sicherheit des Operierens erreicht wird. Die Widersprüche der naiven Mengenlehre ließen sich ebensogut logisch wie mengentheoretisch wenden, und auch die Kontrolle
12 der Schlüsse durch den Logikkalkul, der ja | gerade zur Sicherung des mathematischen Schließen ausgebaut worden war, half nicht, die Widersprüche zu vermeiden.

Als dann Russell das ganz vorsichtige Verfahren des Stufenkalkuls einführte, stellte sich heraus, daß auf diesem Wege die Analysis und Mengenlehre in der üblichen Form nicht gewonnen werden kann. Und so sahen sich Russell und Whitehead in den ${}_a\underline{P}_a$*rincipia* ${}_a\underline{M}_a$*athematica* genötigt, eine Annahme über das System der Prädikate „erster Stufe“ einzuführen, das sogenannte ${}_d$„${}_d$*Axiom der Reduzibilität*${}_d$“${}_d$.

Damit kehrte man aber wieder ganz zu dem axiomatischen Standpunkt zurück und gab das Ziel der logischen Begründung preis.

Die Schwierigkeit zeigt sich übrigens schon innerhalb der Theorie der ganzen Zahlen. Hier gelingt es zwar, indem man gemäß dem Fregeschen Grundgedanken die Anzahlen logisch definiert, die Rechengesetze der Addition und Multiplikation sowie die bestimmten Zahlengleichungen als logische Sätze zu beweisen. Aber man erhält durch dieses Verfahren nicht die übliche Zahlentheorie, weil man nicht beweisen kann, daß es zu jeder Zahl eine größere gibt, – es sei denn, daß man eigens irgendeine Art von Unendlichkeitsaxiom einführt.

Wenngleich nun die Ausgestaltung der mathematischen Logik nicht grundsätzlich über den axiomatischen Standpunkt hinausgeführt hat, so ist doch auf diesem Wege ein großartiger systematischer Aufbau der gesamten Arithmetik entstanden, welcher dem System von Zermelo gleichgeordnet zur Seite steht.

Überdies hat die symbolische Logik uns in der methodischen Erkenntnis weiter gebracht: Während man sich früher nur von den *Voraussetzungen* der mathematischen Theorien Rechenschaft gab, werden jetzt auch die *Schlüsse* präzisiert, und es zeigt sich, daß man das mathematische Schließen, soweit es nur auf die daraus hervorgehenden Resultate ankommt, ersetzen kann durch ein rein formales Handeln nach bestimmten Regeln, bei welchem das eigentliche Denken ganz ausgeschaltet ist.

Aber, wie schon gesagt, das Ziel einer logischen Begründung der Arithmetik erreicht die mathematische Logik nicht, und es ist nicht anzunehmen, daß der Grund für dieses Mißlingen in der besonderen Form des Fregeschen Ansatzes liegt. Vielmehr seheint es sich so zu verhalten, daß das Problem der Zurückführung der Mathematik auf die Logik überhaupt falsch gestellt ist, weil nämlich Mathematik und Logik zueinander gar nicht in dem Verhältnis von Besonderem und Allgemeinem stehen.

Mathematik und Logik beruhen auf zwei verschiedenen Richtungen der
Abstraktion. Während die Logik es mit dem *inhaltlich* Allge|meinsten zu 13
tun hat, ist die (reine) Mathematik die allgemeine Lehre von den *formalen* Beziehungen und Eigenschaften, – so daß einerseits jede mathematische Überlegung den logischen Gesetzen untersteht, andererseits jedes logische Gedankengebilde, wegen der ihm notwendig anhaftenden äußeren Struktur, in den Bereich der mathematischen Betrachtung fällt.

Angesichts dieser Sachlage wird man zu einem Versuch angetrieben, welcher dem der logischen Begründung der Arithmetik gewissermaßen entgegengesetzt ist. Da es nicht gelingt, die mathematisch transzendenten Grundannahmen als logisch notwendig zu erweisen, so fragt man sich, ob diese Annahmen nicht überhaupt entbehrt werden können.

In der Tat scheint eine Möglichkeit zur Ausschaltung der axiomatischen Grundannahmen darin zu bestehen, daß man die existentiale Form der Axiome durchgängig beseitigt und an Stelle der existentialen Annahmen *Konstruktionspostulate* setzt.

Das Verfahren einer solchen Ersetzung ist dem Mathematiker nicht neu; besonders in der elementaren Geometrie wird vielfach die konstruktive Fassung der Axiome angewandt. Anstatt z. B. das Axiom aufzustellen, daß je zwei Punkte eine Gerade bestimmen, postuliert man das Verbinden zweier Punkte durch eine Gerade als eine mögliche Konstruktion.

Ebenso kann man nun auch bei arithmetischen Axiomen vorgehen. Statt z. B. zu sagen „zu jeder Zahl gibt es eine folgende“, führt man das Fortschreiten um Eins, bzw. das Anhängen von +1 als Grundoperation ein.

Man gelangt somit zu dem Versuch eines *rein konstruktiven Aufbaues der Arithmetik*. Und in der Tat ist das Ziel für das mathematische Denken ein sehr verlockendes: die reine Mathematik soll sich ihr Gebäude selber zimmern und nicht angewiesen sein auf die Annahme eines gewissen Systems von Dingen.

Diese konstruktive Tendenz, welche zuerst Kronecker mit großem Nachdruck und später Poincaré in weniger radikaler Form zur Geltung gebracht hat, wird gegenwärtig von Brouwer und Weyl in ihrer neuen Grundlegung der Arithmetik verfolgt.

Weyl prüft zunächst die höheren Schlußweisen in Hinsicht auf die Möglichkeit der konstruktiven Umdeutung, d. h. er untersucht das Verfahren der Analysis sowie das der Zermeloschen Mengenlehre daraufhin, ob es sich nicht als ein konstruktives deuten lasse. Er findet, daß dies nicht möglich ist, da man bei dem Versuch, die Ersetzung der existentialen Axiome durch Konstruktionsmethoden konsequent durchzuführen, auf Schritt und Tritt in logische Zirkel verfällt.

14 | Hieraus zieht Weyl die Folgerung: die Schlußweisen der Analysis und der Mengenlehre müssen so weit beschränkt werden, daß bei ihrer konstruktiven Deutung keine logischen Zirkel zustande kommen. So sieht er sich insbesondere genötigt, den Satz von der Existenz der oberen Grenze fallen zu lassen.

Brouwer geht in dieser Richtung noch weiter, indem er das konstruktive Prinzip auch auf die großen Zahlen anwendet. Wenn man, wie Brouwer es tut, die Annahme einer abgeschlossen vorhandenen Gesamtheit aller Zahlen vermeiden will und nur den unbegrenzt ausführbaren Akt des Fortschreitens um eins als Grundlage nimmt, dann haben Aussagen von der Form: „Es gibt Zahlen von der und der Art ...“ nicht ohne weiteres einen Sinn, und man ist daher auch nicht berechtigt, allgemein für jede zahlentheoretische Behauptung die Alternative aufzustellen, daß sie entweder für alle Zahlen gilt oder daß es eine Zahl (bzw. ein Zahlenpaar, Zahlentripel, ...) gibt, durch welche sie widerlegt wird. Diese Art der Anwendung des „tertium non datur“ ist dann zum mindesten bedenklich.

So geraten wir nun in eine große Verlegenheit: die erfolgreichsten, elegantesten und bewährtesten Schlußweisen sollen preisgegeben werden, und zwar bloß deshalb, weil man von einem bestimmten Standpunkt keine Begründung für sie hat.

Über das Unbefriedigende eines solchen Vorgehens helfen uns auch nicht die Erwägungen hinweg, durch welche Weyl zu zeigen sucht, daß die in der üblichen Analysis zu$_a$ G$_a$runde liegende Begriffsbildung des mathematischen Kontinuums nicht der bildhaften Vorstellung des Stetigen entspricht. Denn für die Anwendbarkeit und Fruchtbarkeit der Analysis ist eine genaue Analogie zum Inhalt der Wahrnehmung gar nicht nötig, vielmehr genügt es vollkommen, daß die in ihr ausgeübte Methode der Idealisierung und begrifflichen Interpolation folgerichtig durchführbar ist. Es kommt für die Frage der reinen Mathematik nur darauf an, ob das übliche, axiomatisch charakterisierte mathematische Kontinuum ein in sich mögliches, das heißt widerspruchsfreies Gebilde ist.

Diese Frage könnte höchstens dann abgewiesen werden, wenn uns an Stelle des bisherigen mathematischen Kontinuums eine einfachere und übersichtlichere Gedankenbildung zu Gebote stände, durch welche jenes in Schatten gestellt würde. Sieht man sich aber die neuen Ansätze von Weyl und Brouwer des näheren an, so bemerkt man, daß ein Gewinn an Einfachheit hier nicht zu erhoffen ist, daß vielmehr die erforderlichen Komplikationen in den Begriffsbildungen und Schlußweisen statt vermindert nur noch vermehrt werden.

Es besteht also keine Berechtigung, die Frage nach der Wider|spruchslo- 15
sigkeit des üblichen Axiomensystems der Arithmetik zurückzuweisen. Und was wir aus den Untersuchungen von Weyl und Brouwer zu entnehmen haben, ist das Ergebnis, daß ein Nachweis der Widerspruchslosigkeit auf dem Wege einer Ersetzung der Existenzaxiome durch Konstruktionspostulate nicht möglich ist.

Somit kommen wir zurück zu der Hilbertschen Idee einer Theorie der Widerspruchslosigkeit auf primitiv-anschaulicher Grundlage. Und ich möchte nun den Plan schildern, nach welchem Hilbert sich den Aufbau einer solchen Theorie denkt, und die Richtlinien, welche er dabei verfolgt.

Hilbert macht sich von den beiden besprochenen Begründungsversuchen das positiv Fruchtbare zu eigen. Aus der logischen Theorie entnimmt er die Methode der strengen Formalisierung des Schließens. Die Notwendigkeit dieser Formalisierung ergibt sich unmittelbar aus der Aufgabestellung. Denn es sollen die mathematischen Beweise zum Gegenstand einer konkretanschaulichen Betrachtungsweise gemacht werden; hierzu aber ist nötig, daß sie gleichsam in das Gebiet des Formalen projiziert werden. Wir haben demnach bei der Hilbertschen Theorie scharf zu sondern: einerseits das formale Abbild der arithmetischen Sätze und Beweise, als *Gegenstand* der Theorie, andererseits das inhaltliche Denken über diesen Formalismus, als *Inhalt* der Theorie. Die Formalisierung geschieht so, daß an Stelle der inhaltlichen mathematischen Sätze Formeln treten und an Stelle eines Schlusses eine Aufeinanderfolge von Formeln nach gewissen Regeln. Und zwar wird den Formeln nicht etwa eine Bedeutung beigelegt; die Formel gilt nicht als Ausdruck eines Gedankens, sondern sie entspricht nur insofern einem inhaltlichen Urteil, als sie innerhalb des Formalismus die analoge Rolle spielt wie das Urteil innerhalb der inhaltlichen Überlegung.

Mehr grundsätzlich als diese Anknüpfung an die symbolische Logik ist die Berührung des Hilbertschen Ansatzes mit den konstruktiven Theorien Weyls und Brouwers. Denn Hilbert will die konstruktive Tendenz, welche auf die Selbständigkeit der Mathematik ausgeht, keineswegs preisgeben, vielmehr ist er gerade bestrebt, sie aufs stärkste zur Geltung zu bringen. Dies scheint zunächst – angesichts dessen, was wir bezüglich der konstruktiven Methode feststellten – unvereinbar zu sein mit dem Zweck des Nachweises für die Widerspruchslosigkeit der Arithmetik. Tatsächlich aber liegt das Hindernis für die Vereinigung der beiden Ziele nur in einer vorgefaßten Meinung, von welcher die Vertreter der konstruktiven Tendenz bisher immer ausgegangen sind, daß nämlich im Gebiete der Arithmetik jede Konstruktion durchaus
16 eine *Zahlenkonstruktion* (bzw. Mengenkonstruktion) | sein müsse. Diese Ansicht erachtet Hilbert als ein Vorurteil. Eine konstruktive Umdeutung der Existenzaxiome ist nicht nur in der Weise möglich, daß man sie in Erzeugungsprinzipien zur Konstruktion von Zahlen umwandelt, sondern die durch ein solches Axiom ermöglichte Schlußweise kann als Ganzes durch einen formalen Prozeß ersetzt werden, derart, daß an Stelle der Allgemeinbegriffe wie Zahl, Funktion usw. bestimmte Zeichen treten.

Wo Begriffe fehlen, da stellt ein Zeichen zu rechter Zeit sich ein. Dies ist das methodische Prinzip der Hilbertschen Theorie.[a] Wie das gemeint ist, soll ein Beispiel erläutern. In der Zahlentheorie gilt das Existenzaxiom „Zu jeder Zahl gibt es eine folgende". Im Sinne der Beschränkung auf das Konkret-${}_{a}\underline{\mathrm{A}}_{a}$nschauliche handelt es sich nun darum, den Allgemeinbegriff der Zahl sowie die existentiale Form der Behauptung zu vermeiden.

Die übliche konstruktive Umdeutung besteht (wie schon erwähnt) in diesem Falle darin, daß man das Existenzaxiom durch das Verfahren des Fortschreitens um eins ersetzt. Dies ist ein Verfahren der *Zahlen*-konstruktion.

[a] *Vide* [?], p. 163.

Hilbert dagegen ersetzt den Begriff der Zahl durch ein Symbol ${}_{a}\underline{Z}_{a}$ und stellt die Formel auf:

$$Z(a) \to Z(a+1).$$

Hier ist a eine Variable, für welche irgendein mathematischer Ausdruck eingesetzt werden kann, und das Zeichen $\to$ vertritt die hypothetische Aussagenverknüpfung „wenn – so“, das heißt, es gilt die Regel: wenn zwei Formeln $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ aufgeschrieben stehen, so kann auch $\mathfrak{B}$ aufgeschrieben werden.

Auf Grund dieser Festsetzungen leistet die genannte Formel im Rahmen des Formalismus ganz dasselbe, was sonst das Existenzaxiom für die inhaltliche Beweisführung leistet.

Wir sehen hier, wie Hilbert die Methode des Formalisierens der Schlüsse im Sinne der konstruktiven Tendenz verwertet; sie bildet für ihn keineswegs nur ein Hilfsmittel zum Nachweis der Widerspruchslosigkeit, sondern zugleich auch den Weg zu einem *streng konstruktiven Aufbau* der Arithmetik. Und zwar wird der methodische Gedanke der Konstruktion hier so weit gefaßt, daß sich auch alle höheren mathematischen Schlußweisen in den konstruktiven Aufbau einfügen lassen.

Nachdem hiermit die Zielrichtung der Hilbertschen Theorie gekennzeichnet ist, will ich nun die Anlage der Theorie in den Grundzügen beschreiben. Es sind folgende drei Fragen zu beantworten:

1. Wie gestaltet sich der konstruktive Aufbau, welcher das formale Abbild des Lehrgebäudes der Arithmetik darstellen und zugleich | das Objekt 17
bilden soll für die anschauliche Theorie der Widerspruchslosigkeit?

2. Wie wird die Behauptung der Widerspruchslosigkeit gefaßt?

3. Welches sind die Mittel der inhaltlichen Überlegung, durch welche der Nachweis der Widerspruchslosigkeit geführt wird?

Was erstens den konstruktiven Aufbau betrifft, so vollzieht sich dieser folgendermaßen. Es werden zunächst die verschiedenen Arten von Zeichen eingeführt und dabei die Regeln für das Einsetzen festgelegt. Ferner werden gewisse Formeln als Grundformeln aufgestellt. Und nun handelt es sich darum, „Beweise“ zu bilden.

Und zwar gilt als Beweis eine konkret hingeschriebene Aufeinanderfolge von Formeln, in welcher für jede vorkommende Formel die Alternative erfüllt ist, daß sie entweder übereinstimmt mit einer Grundformel oder einer vorhergehenden Formel, bzw. aus einer solchen durch erlaubte Einsetzungen entsteht, oder aber daß sie in einem „Schluß“, d. h. in einer Formelfolge vom Typus

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{A}\\ \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}\end{array}}{\mathfrak{B}}$$

die Endformel bildet.

Hiernach ist ein „Beweis“ nichts anderes als eine Figur mit bestimmten konkreten Eigenschaften, und aus solchen Figuren setzt sich das formale Abbild der Arithmetik zusammen.

Diese Beantwortung der ersten Frage läßt die Dringlichkeit der zweiten besonders deutlich hervortreten. Denn was soll bei dem reinen Formalismus die Behauptung der Widerspruchslosigkeit besagen? Bloße Formeln können sich doch nicht widersprechen?

Hierauf lautet die einfache Entgegnung: der Widerspruch wird eben auch formalisiert. Getreu seinem Prinzip führt Hilbert für den Widerspruch den Buchstaben Ω ein; und die Rolle dieses Buchstabens im Formalismus wird durch Aufstellung von Grundformeln so bestimmt, daß aus je zwei Formeln, denen entgegengesetzte Aussagen entsprechen, Ω abgeleitet werden kann, genauer gesagt: daß bei Hinzunahme zweier solcher Formeln zu den Grundformeln ein Beweis mit Ω als Endformel konstruiert werden kann.

Insbesondere dient hierzu die Grundformel

$$a = b \to (a \neq b \to \Omega),$$

worin $\neq$ das übliche Ungleichheitszeichen ist. (Die Beziehung der Ungleichheit wird von Hilbert als eigentliche arithmetische Beziehung, so wie die
18 Gleichheit, gefaßt, nicht etwa als logische Negation der | Gleichheit. Ein Zeichen für die Negation führt Hilbert überhaupt nicht ein.)

Die Behauptung der Widerspruchslosigkeit ist jetzt einfach so zu formulieren: Ω kann nicht als Endformel eines Beweises erhalten werden.

Für diese Behauptung gilt es also den Nachweis zu erbringen.

Nun bleibt nur noch die Frage, mit welchen Mitteln dieser Nachweis geführt werden soll. Im Prinzip ist diese Frage bereits entschieden. Denn unser ganzes Problem entspringt ja aus der Anforderung, nur das Konkret-$_{a}\underline{\text{A}}_{a}$nschauliche als Grundlage der mathematischen Überlegungen zu nehmen. Es handelt sich also lediglich darum, uns zu vergegenwärtigen, welche Hilfsmittel uns im Rahmen der konkret-anschaulichen Betrachtungsweise zur Verfügung stehen.

So viel ist gewiß, daß wir berechtigt sind, die elementaren Vorstellungen der Reihenfolge und der Anordnung sowie auch das gewöhnliche Zählen in vollem Umfange zu gebrauchen. ($\text{Z}_a\underline{\text{um}}_a$ $\text{B}_a\underline{\text{eispiel}}_a$ können wir nachsehen, ob in einer Formel das Zeichen $\rightarrow$ dreimal vorkommt oder nicht so oft.)

Damit allein kommen wir aber nicht aus, vielmehr ist es unumgänglich notwendig, gewisse Formen von vollständiger Induktion anzuwenden. Jedoch auch hiermit gehen wir nicht über den Bereich des Konkret-anschaulichen hinaus.

Nämlich es sind zwei Arten der vollständigen Induktion zu unterscheiden: die engere Form der Induktion, welche sich nur auf etwas abgeschlossen und konkret Vorliegendes bezieht, und die weitere Form der Induktion, welche entweder den Allgemeinbegriff der ganzen Zahl oder das Operieren mit Variablen wesentlich benutzt.

Während diese weitere Form der vollständigen Induktion eine höhere Schlußweise ist, deren Begründung eine der Aufgaben der Hilbertschen Theorie bildet, gehört die engere Form des Schlusses der primitiven anschaulichen Erkenntnisweise an und kann daher als Hilfsmittel der inhaltlichen Beweisführung angewandt werden.

Als typische Beispiele für die engere Form der vollständigen Induktion, wie sie in den Beweisführungen der Hilbertschen Theorie gebraucht wird, seien folgende beiden Schlüsse angeführt:[b]

1. Wenn in einem konkret vorliegenden Beweise überhaupt das Zeichen $+$ vorkommt, so findet man beim Durchlesen eine Stelle, wo es zum erstenmal vorkommt.

2. Wenn man ein allgemeines Verfahren hat, um aus einem Beweise mit einer gewissen, konkret beschreibbaren Eigenschaft $\mathfrak{E}$ das erste vorkommende
Zeichen ${}_a\underline{Z}_a$ wegzuschaffen, ohne daß der Beweis da|durch die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ 19
verliert, so kann man, durch wiederholte Anwendung des Verfahrens, das Zeichen ${}_a\underline{Z}_a$ gänzlich aus einem solchen Beweis entfernen, ohne daß er die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ verliert.

(Man beachte, daß es sich hier ausschließlich um formalisierte Beweise, d. h. Beweise im Sinne der vorhin gegebenen Definition, handelt.)

Hiermit ist im wesentlichen die Methode dargelegt, welche die Theorie der Widerspruchslosigkeit zu befolgen hat. Die Ausführung dieser Theorie befindet sich gegenwärtig noch ganz in den Anfängen; das meiste muß hier

[b] *Vide* [**?**], p. 164.

erst noch geleistet werden. Jedenfalls aber läßt sich schon aus dem, was bisher vorliegt, die grundsätzliche Möglichkeit und die Durchführbarkeit der geforderten Betrachtungsweise erkennen, und man sieht auch, daß es im gauz echten Sinne *mathematische* Überlegungen sind, welche man hier anzustellen hat.

Gerade darin liegt der große Vorzug des Hilbertschen Verfahrens, daß die Probleme und Schwierigkeiten, welche sich in der Grundlegung der Mathematik bieten, aus dem Bereich des Erkenntnistheoretisch-$_a\underline{\mathrm{P}}_a$hilosophischen in das Gebiet des eigentlich Mathematischen übergeführt werden.

Die Mathematik schafft sich hier selbst ein Schiedsgericht, vor welchem alle grundsätzlichen Fragen in spezifisch mathematischer Weise zum Austrag gebracht werden können, ohne daß man nötig hat, sich über subtile logische Gewissensfragen den Kopf zu zerbrechen, wie etwa: ob Urteile von einer gewissen Form einen Sinn haben oder nicht.

Und so steht auch zu erwarten, daß das Unternehmen der neuen Hilbertschen Theorie in den Kreisen der Mathematiker bald Anklang und auch Beteiligung finden wird.

Kapitel 3

Bernays Project: Text No. 5

Probleme der theoretischen Logik[†] (1927)

Problems of Theoretical Logic

(*Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaft* XXXIII, S. 369–377;
repr. in *Abhandlungen*, S. 1–16)

369/A1 | Das Thema des Vortrages und seine Benennung ist im Sinne Hilberts gewählt worden. Als theoretische Logik wird hier das bezeichnet, was man gewöhnlich symbolische Logik, mathematische Logik, Algebra der Logik oder Logik-Kalkul nennt. Es soll der Zweck der folgenden Ausführungen sein, dieses Forschungsgebiet unter einem solchen Aspekt erscheinen zu lassen, welcher die Bezeichnung als theoretische Logik rechtfertigt.

Im allgemeinen ist die mathematische Logik wenig beliebt. Sie wird meist für eine müßige Spielerei gehalten, die weder für das praktische Schließen

[†] The full title reads (with the first two lines in bold face):
Forschung und Schule
Probleme der theoretischen Logik
Vortrag gehalten auf der 56. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in Göttingen.
Von Professor Dr. Bernays in Göttingen.

zweckmäßig ist, noch auch zur Förderung unserer logischen Einsicht etwas Erhebliches beiträgt.

Was zunächst den Vorwurf des Spielerischen betrifft, so hat dieser wohl gegenüber der anfänglichen Behandlungsweise der mathematischen Logik seine Berechtigung; man legte anfangs den Hauptwert auf die formale Analogie zur Algebra und betrachtete deren Verfolgung vielfach als Selbstzweck. Aber dieser Stand der Dinge liegt schon um Jahrzehnte zurück, und heute sind die Probleme der mathematischen Logik unlöslich verflochten mit den Fragen, welche die Grundlagen der exakten Wissenschaften betreffen, so daß von einem bloß spielerischen Charakter keine Rede mehr ist.

Was zweitens die Anwendung auf das praktische Schließen anbelangt, so ist zunächst zu sagen, daß man sich von einem symbolischen Kalkul nur dann einen Vorteil versprechen kann, wenn man in seiner Handhabung hinreichende Übung besitzt. Außerdem ist aber zu bedenken, daß im Unterschied von den meisten Arten der Symbolik, welche doch Abkürzung und Zusammenziehung von Operationen zum Zweck haben, die Aufgabe des logischen Kalkuls doch in erster Linie darin besteht, die Schlüsse in ihre letzten Bestandteile zu zerlegen und jeden einzelnen Schritt äußerlich ersichtlich zu machen und dadurch der Beachtung zuzuführen. Das Interesse, welches sich mit der Anwendung des logischen Kalkuls verbindet, ist also in der Hauptsache kein technisches, sondern ein theoretisches und prinzipielles.

| Damit komme ich zu dem dritten Vorwurf, nämlich demjenigen, daß durch A2
die mathematische Logik unsere logische Einsicht nicht wesentlich gefördert werde. Diese Meinung steht in Verbindung mit der Ansicht, die Kant in der zweiten Vorrede zur Kritik der reinen Vernunft über die Logik geäußert hat; er sagt da: „Merkwürdig ist noch an ihr (der Logik), daß sie auch bis jetzt keinen Schritt vorwärts hat tun können, und also allem Ansehen nach geschlossen und vollendet zu sein scheint.“[a]

Es ist meine Absicht, zu zeigen, daß dieser Standpunkt irrig ist. Allerdings: daß die Aufstellung der obersten Prinzipien des Schließens und ihrer nächsten Folgerungen, so wie sie durch Aristoteles geschah, eine der bedeutsamsten geistigen Leistungen bildet, und auch zu dem ganz wenigen gehört$_{a_2,a_2}$ was als dauernder gesicherter Besitzstand im Bereiche der philosophischen Erkenntnis vorliegt, diese Tatsache soll ihre volle Würdigung behalten. Dies hindert aber nicht festzustellen, daß die traditionelle Logik

[a] KrV B VII.

in ihrer Problemstellung wesentlich unabgeschlossen ist und daß sie in ihrer Anordnung der Tatsachen weder den Bedürfnissen der systematischen Übersicht, noch auch denjenigen der methodischen und erkenntniskritischen Einsicht genügend angepaßt ist. Erst die neuere Logik, wie sie sich unter dem Namen der Algebra der Logik oder der mathematischen Logik entwickelt hat, brachte diejenigen Begriffsbildungen und einen solchen Ansatz der formalen Logik, welche es ermöglichen, jenen Bedürfnissen der Systematik und der Philosophie zu entsprechen.

Das Reich der logischen Gesetze, die Welt der abstrakten Relationen ist damit in ihrer formalen Struktur überhaupt erst vor uns enthüllt worden, und das Verhältnis von Mathematik und Logik ist auf neue Weise beleuchtet wor-
370 den. Ich möchte ver|suchen, von dieser Wandlung und von den Ergebnissen, die sie zutage gefördert hat, in Kürze einen Begriff zu geben.

Dabei soll es mir nicht darauf ankommen, den historischen Gang der Entwicklung und die verschiedenen Formen, in denen die mathematische Logik ausgebildet worden ist, vorzuführen, sondern ich will eine solche Darstellung der neuen Logik wählen, welche die Anknüpfung an die traditionelle Logik und den Vergleich mit ihr möglichst erleichtert. Hinsichtlich der logischen Zeichen werde ich mich an diejenige Symbolik anschließen, die Hilbert jetzt in seinen Vorlesungen und Publikationen verwendet.

Die traditionelle Logik teilt ihre Probleme ein in die Untersuchung der Begriffsbildung, des Urteils und des Schließens. Es ist nicht vorteilhaft, mit
A3 der Begriffsbildung zu beginnen, weil die wesentlichen | Formen der Begriffsbildung nicht elementar sind, sondern sich bereits auf das Urteil stützen. Beginnen wir also mit dem Urteil.

Hier bringt nun gleich die neuere Logik ein wesentliches Moment der Neueinstellung, indem sie an die Stelle der Klassifikationen das Aufsuchen der logischen Elementaroperationen setzt. Man spricht hier nicht von dem kategorischen, dem hypothetischen, dem negativen Urteil, sondern von der kategorischen, hypothetischen Verknüpfung und von der Negation als logischer Operation. Ebenso teilt man nicht ein in allgemeine und partikuläre Urteile, sondern führt für die Allgemeinheit und Partikularität logische Operatoren ein.

Dieses Verfahren ist aus dem Grunde sachgemäßer als das der Einteilung, weil in den Urteilen die verschiedenen logischen Prozesse im allgemeinen kombiniert auftreten, so daß eine eindeutige Charakterisierung danach gar nicht möglich ist.

Betrachten wir zunächst das *kategorische* Verhältnis, d. h. dasjenige von

Subjekt und Prädikat. Wir haben hier einen Gegenstand und eine Aussage über ihn. Die symbolische Darstellung dafür ist

$$P(x),$$

zu lesen:

„x hat die Eigenschaft P“.

Die Beziehung des Prädikates auf einen Gegenstand wird hier explizite durch die Variable zum Ausdruck gebracht. Doch das ist nur eine deutlichere Art der Schreibweise. Wesentlich ist aber die Bemerkung, daß *mehrere Gegenstände* Subjekte einer Aussage sein können. Man spricht dann von einer *Beziehung* (Relation) zwischen mehreren Gegenständen. Die Schreibweise dafür ist

$$R(x, y), \text{ bzw. } R(x, y, z) \text{ usw.}$$

Im sprachlichen Ausdruck werden zur Bezeichnung der verschiedenen Glieder von Relationen teils die Kasus, teils Präpositionen angewandt.

Durch die Berücksichtigung der Relationen erfährt die Logik gegenüber ihrer traditionellen Form eine wesentliche Erweiterung. Auf die Bedeutsamkeit dieser Erweiterung werde ich bei der Lehre von den Schlüssen zu sprechen kommen.

An das kategorische Verhältnis knüpfen sich die Formen der Allgemeinheit und des Partikulären. Die Allgemeinheit stellen wir symbolisch dar durch

$$(x)P(x)$$

„alle x haben die Eigenschaft P“.

Die Variable x tritt hier als „gebundene Variable“ auf; die Aussage hängt nicht von x ab, – entsprechend wie der Wert eines Integrals nicht von der Integrationsvariablen abhängt.

An dem partikulären Urteil nehmen wir zunächst die Verschärfung | vor, A4
daß wir an die Stelle der etwas unbestimmten Aussage „einige x haben die Eigenschaft P“ das existenziale Urteil setzen:

„es gibt ein x von der Eigenschaft P“,

symbolisch geschrieben:

$$(Ex)P(x).$$

Durch Hinzunahme der *Negation* ergeben sich die vier Urteilsarten, die in der Aristotelischen Logik durch die Buchstaben „a, e, i, o“ bezeichnet werden.

Indem wir die Negation durch Überstreichen des zu negierenden Ausdrucks darstellen, erhalten wir für jene vier Urteilsarten folgende Darstellungen:

$$\begin{array}{rll} \text{a:} & (x) & P(x) \\ \text{e:} & (x) & \overline{P(x)} \\ \text{i:} & (Ex) & P(x) \\ \text{o:} & (Ex) & \overline{P(x)}. \end{array}$$

Hier, in der Lehre von der „Opposition“, erweist sich bereits die Trennung der Operationen für die Auffassung als nützlich; so erkennen wir z. B., daß der Unterschied zwischen kontradiktorischem und konträrem Gegenteil darin
371 besteht, daß | einmal die ganze Aussage, z. B. $(x)P(x)$, das andere Mal nur das Prädikat $P(x)$ negiert wird.

Wenden wir uns nun zu dem *hypothetischen Verhältnis.*

$$A \rightarrow B \quad \text{„wenn } A\text{, so } B\text{“.}$$

Dieses enthält eine Verknüpfung *zweier* Aussagen (Prädikationen). Die Glieder der Verknüpfung haben also hier bereits die Form von Aussagen, und das hypothetische Verhältnis bezieht sich auf diese Aussagen als *ungetrenntes Ganzes*. Das Letztere gilt auch schon von der Negation $\overline{A}$.

Nun gibt es aber noch anderweitige solche Aussagenverknüpfungen, insbesondere:

das *Zusammenbestehen* von A mit B: $A \,\&\, B$,

ferner die *disjunktive Verknüpfung*; wir haben da zu unterscheiden zwischen dem ausschließenden „Oder“, im Sinne des Lateinischen „aut-aut“ und dem „Oder“ im Sinne von „vel“. Diese letztere Verknüpfung stellen wir, gemäß der Bezeichnung von Russell, durch $A \vee B$ dar.

In der Sprache werden solche Aussagenverknüpfungen mit Hilfe der Konjunktionen ausgedrückt.

Es liegt nun nahe, hier eine analoge Betrachtung wie in der Lehre von der Opposition anzustellen: wir kombinieren die zweigliedrigen Aussagenverknüpfungen mit der Negation, was auf zwei Weisen geschehen kann, indem

A5 wir entweder die einzelnen Glieder der Verknüpfung oder | diese als Ganzes negieren, und nun sehen wir zu, was sich für Abhängigkeitsbeziehungen ergeben.

Um anzugeben, daß zwei Verknüpfungen sachlich gleichbedeutend („äquivalent“) sind, will ich zwischen die betreffenden Verknüpfungen „aeq“ schreiben (was aber kein Zeichen unserer logischen Symbolik ist). Es ergeben sich insbesondere folgende Verknüpfungen und Äquivalenzen:

$$\begin{array}{rl}
\overline{A} \mathbin{\&} \overline{B}: & \text{„weder A noch B“} \\
\overline{A \mathbin{\&} B}: & \text{„A und B schließen einander aus“} \\
\overline{A \mathbin{\&} B}: & \text{aeq } \overline{A} \vee \overline{B} \\
 & \text{aeq } A \to \overline{B} \\
 & \text{aeq } B \to \overline{A} \\
\overline{A} \to B & \text{aeq } A \vee B \\
\overline{\overline{B}} & \text{aeq } B
\end{array}$$

(doppelte Verneinung ist gleichbedeutend mit Bejahung).

Hieraus ergibt sich weiter:

$$\begin{array}{rl}
A \to B & \text{aeq } \overline{A \mathbin{\&} \overline{B}} \\
 & \text{aeq } \overline{A} \vee B \\
\overline{A \vee B} & \text{aeq } \overline{\overline{A} \to B} \\
 & \text{aeq } \overline{A} \mathbin{\&} \overline{B}.
\end{array}$$

Auf Grund dieser Äquivalenzen ergibt sich die Möglichkeit, von den durch

$$\overline{}, \to, \&, \vee$$

bezeichneten logischen Verknüpfungen einen Teil durch die übrigen auszudrucken. In der Tat läßt sich gemäß den obigen Äquivalenzen

$$\begin{array}{c}
\to \text{ durch } \vee \text{ und } \overline{} \\
\vee \text{ durch } \& \text{ und } \overline{} \\
\& \text{ durch } \to \text{ und } \overline{}
\end{array}$$

ausdrücken, so daß als Grundverknüpfungen

$$\begin{array}{c}
\& \text{ und } \overline{} \\
\text{bzw. } \vee \text{ und } \overline{} \\
\text{bzw. } \to \text{ und } \overline{}
\end{array}$$

je allein schon ausreichen. Man kann sogar mit einer einzigen Grundverknüpfung auskommen, freilich keiner von denen, für die wir bereits ein eigenes Zeichen haben. Führen wir nämlich für die Verknüpfung des Ausschließens $\overline{A \& B}$ das Zeichen $A|B$ ein, so bestehen die Äquivalenzen:

$$\begin{array}{rll} A|A & \text{aeq} & \overline{A} \\ A|\overline{B} & \text{aeq} & \overline{A \mathbin{\&} \overline{B}} \\ & \text{aeq} & A \rightarrow B, \end{array}$$

A6 | woraus hervorgeht, daß man mit Hilfe dieser Verknüpfung sowohl die Negation wie auch $\rightarrow$ und mithin auch die übrigen Verknüpfungen darstellen kann.
372 Ebenso wie die Beziehung des Ausschließens kann auch die Verknüpfung |

$$\text{„weder – noch"} \quad \overline{A} \mathbin{\&} \overline{B}$$

als einzige Grundverknüpfung genommen werden. Schreiben wir nämlich für diese

$$A \parallel B,$$

so gilt

$$\begin{array}{rll} A \parallel A & \text{aeq} & \overline{A} \\ \overline{A} \parallel \overline{B} & \text{aeq} & A \mathbin{\&} B, \end{array}$$

so daß sowohl die Negation wie & durch diese Verknüpfung ausdrückbar ist.

Diese Überlegungen grenzen schon etwas ans Spielerische. Immerhin ist es doch merkwürdig, daß die Entdeckung einer so einfachen Tatsache wie die der Zurückführbarkeit aller Aussagenverknüpfungen auf eine einzige dem 20. Jahrhundert vorbehalten geblieben ist. Überhaupt sind die Äquivalenzen zwischen Aussagenverknüpfungen in der alten Logik nicht systematisch betrachtet worden.[1] Es finden sich da nur einzelne Bemerkungen, wie z. B. die der Äquivalenz von

[1]Diese historischen Bemerkungen bedürfen heute der Korrektur. Erstens wurde die Zurückführbarkeit aller Aussagenverknüpfungen auf eine einzige bereits im 19. Jahrhundert von C. S. Peirce entdeckt – was freilich erst durch die Herausgabe seiner gesammelten Werke 1933 allgemeiner bekannt wurde. Ferner trifft es nicht zu, daß die Äquivalenzen zwischen Aussagenverknüpfungen in der alten Logik nicht systematisch betrachtet worden sind – freilich nicht in der Aristotelischen Logik, wohl aber in anderen griechischen Philosophenschulen. (Siehe hierüber in dem Buche *Formale Logik* (*vide* [**?**]).)

Bemerkung: Diese Fußnote sowie die weiteren drei sind nachträgliche Hinzufügungen anläßlich der neuen Publikation des Vertrages.

$$A \to \overline{B} \text{ mit } B \to \overline{A},$$

auf welcher der Schluß durch „Kontraposition“ beruht. Das systematische Aufsuchen der Äquivalenzen ist aber um so lohnender, als man hier zu einem in sich geschlossenen und vollkommen überblickbaren Teilgebiet der Logik gelangt, dem sogenannten *Aussagenkalkul*. Worin der Wert dieses Kalkuls für das Schließen besteht, will ich etwas näher auseinandersetzen.

Überlegen wir uns, was der Sinn der Äquivalenz ist. Wenn ich sage

$$\overline{A \mathbin{\&} B} \text{ aeq } \overline{A} \vee \overline{B},$$

| so behaupte ich nicht, daß die beiden Aussagenverknüpfungen sinnesgleich A7
sind, sondern nur, daß sie *wahrheitsgleich* sind, d. h. daß, wie auch die einzelnen Aussagen A, B gewählt werden, immer $\overline{A} \vee \overline{B}$ zugleich mit $\overline{A \& B}$ wahr und zugleich damit falsch ist, so daß diese beiden Ausdrücke einander in Hinsicht auf die Wahrheit vertreten können.

Es kann überhaupt jede Aussagenverknüpfung von A und B aufgefaßt werden als eine mathematische Funktion, welche jedem Aussagenpaar A, B einen der Werte „wahr“, „falsch“ zuordnet. Und zwar kommt es dabei gar nicht auf den genaueren Inhalt der Aussagen, A, B an, sondern vielmehr nur darauf, ob A wahr oder falsch und ob B wahr oder falsch ist. Wir haben es also zu tun mit *Wahrheitsfunktionen*: einem Paar von Wahrheitswerten wird wieder ein solcher Wert zugeordnet.

Eine jede solche Funktion läßt sich durch ein Schema darstellen, indem man die vier möglichen Kombinationen zweier (den Aussagen A, B zugehörigen) Wahrheitswerte durch vier Felder repräsentiert und in jedes von diesen den zugehörigen Wahrheitswert der Funktion („wahr“ bzw. „falsch“) hineinschreibt.

Es seien hier die Schemata für $A \mathbin{\&} B$, $A \vee B$, $A \to B$ angegeben.

$A \mathbin{\&} B$:

B \ A	wahr	falsch
wahr	wahr	falsch
falsch	falsch	falsch

$A \vee B$:

B \ A	wahr	falsch
wahr	wahr	wahr
falsch	wahr	falsch

$A \to B$:

B \ A	wahr	falsch
wahr	wahr	wahr
falsch	falsch	wahr

373/A8 | Man kann sich leicht ausrechnen, daß es genau 16 verschiedene solcher Funktionen gibt. Entsprechend ist die Anzahl der verschiedenen Funktionen von n Wahrheitswerten

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

gleich $2^{(2^n)}$.

Jeder Funktion von zwei oder mehr Wahrheitswerten entspricht eine Klasse von untereinander ersetzbaren Aussagenverknüpfungen.[b] Unter diesen ist eine Klasse ausgezeichnet; diese wird gebildet von denjenigen Verknüpfungen, die immer wahr sind.

Diese Verknüpfungen stellen alle diejenigen allgemein gültigen logischen Sätze dar, in denen die einzelnen Aussagen nur als ungetrenntes Ganzes auftreten. Wir wollen die Ausdrücke allgemein gültiger Sätze als *allgemeingültige Formeln* bezeichnen.[c]

Wir beherrschen die Aussagenlogik, wenn wir die allgemeingültigen Formeln (im Bereich der Aussagenverknüpfungen) kennen, bzw. wenn wir von einer vorgelegten Aussagenverknüpfung entscheiden können, ob sie allgemeingültig ist oder nicht. Denn eine Aufgabe für das Schließen in der Aussagenlogik wird doch so lauten:

Es sind gewisse Verknüpfungen

$$V_1, V_2, \ldots, V_k$$

vorgelegt, die sich aus Elementaraussagen $A, B, \ldots$ zusammensetzen, und die bei einer bestimmten Deutung der Elementaraussagen wahre Sätze darstellen. Es fragt sich, ob eine weitere gegebene Verknüpfung W dieser Elementaraussagen aus der Gültigkeit von $V_1, V_2, \ldots, V_k$ logisch folgt, und zwar ohne Berücksichtigung des genaueren Inhalts der Aussagen $A, B, \ldots$.

[b] *Vide* [**?**], pp. 47–48: „Um uns kurz ausdrücken zu können wollen wir zwei Aussagenverknüpfungen durch einander ‚ersetzbar' nennen, wenn sie dieselbe Wahrheitsfunktion darstellen."

[c] *Vide* ■ für die Unterscheidung zwischen „allgemein gültig" und „allgemeingültig."

Diese Frage ist dann und nur dann mit „ja“ zu beantworten, wenn

$$(V_1 \;\&\; V_2 \;\&\; \ldots \;\&\; V_k) \;\rightarrow\; W,$$

ausgedrückt durch $A, B, \ldots$, eine allgemeingültige Formel darstellt.

Nun ist grundsätzlich die Entscheidung über die Allgemeingültigkeit einer Aussagenverknüpfung immer dadurch zu erzielen, daß man alle in Betracht kommenden Wahrheitswerte durchprobiert. Die Methode der Betrachtung der Äquivalenzen liefert aber ein bequemeres Verfahren. Man kann nämlich durch äquivalente Umformungen jede Formel auf eine gewisse *Normalform* bringen, worin von den logischen Zeichen nur &, $\vee$, $-$ auftreten, und an dieser Normalform kann man direkt ablesen, ob eine allgemeingültige Formel vorliegt oder nicht.

Die Regeln der Umformung sind auch sehr einfach. Insbesondere kann mit & und $\vee$ ganz analog gerechnet werden, wie mit $+$ und $\cdot$ in der Algebra; ja es liegt hier insofern noch einfacher, als & und $\vee$ ganz symmetrisch behandelt werden können.

| Mit der Betrachtung der Äquivalenzen haben wir uns, wie schon bemerkt, A9
bereits in das Gebiet der Schlüsse begeben. Diese haben wir aber hier sozusagen naiv ausgeführt, auf Grund der Bedeutung der logischen Verknüpfungen, und die Aufgabe des Schließens haben wir in ein Entscheidungsproblem umgeformt.

Es bleibt aber für die Logik die Aufgabe, die Regeln des Schließens *systematisch* darzustellen.

Die Aristotelische Logik stellt folgende Prinzipien des Schließens auf:

1. Regel des kategorischen Schließens: das „dictum de omni et nullo“: was allgemein gilt, das gilt in jedem Einzelfall.

2. Regel des hypothetischen Schließens: wenn der Grund gesetzt ist, so ist die Folge gesetzt, d. h. wenn A und wenn $A \rightarrow B$, so B.

3. Gesetze der Negation: Satz vom Widerspruch und Satz vom ausgeschlossenen Dritten: A und $\overline{A}$ können nicht beide zutreffen, und eine der beiden Aussagen trifft jedenfalls zu.

4. Regel des disjunktiven Schließens: wenn mindestens einer der Fälle A, B vorliegt und wenn sowohl $A \rightarrow C$ wie $B \rightarrow C$, so gilt C.

Man kann sagen, daß jedes dieser Gesetze die implizite Definition für einen logischen Prozeß darstellt: 1. für die Allgemeinheit, 2. für die hypothetische Beziehung, 3. für die Negation, 4. für die Disjunktion ($\vee$).

Diese Gesetze enthalten nun tatsächlich das Wesentliche, was beim Schließen zur Geltung kommt. Aber für den Zweck einer restlosen Analyse der Schlüsse genügt das nicht. Hierzu verlangen wir, daß, nachdem einmal die Prinzipien des Schließens genannt sind, nun nichts mehr überlegt zu werden braucht. Die Regeln des Schließens müssen so beschaffen sein, daß sie das logische Denken el$_a\underline{\text{i}}_a$minieren. Andernfalls müßten wir ja erst wieder logische Regeln dafür haben, wie jene Regeln anzuwenden sind.

374 | Dieser Forderung der Austreibung des Geistes kann nun wirklich genügt werden. Der Aufbau der Schlußlehre, den man so erhält, ist analog dem axiomatischen Aufbau einer Theorie. Den Axiomen entsprechen hier gewisse als Formeln aufgeschriebene logische Gesetze, und dem inhaltlichen Schließen, durch welches man sonst von den Axiomen zu den Lehrsätzen gelangt, entspricht ein äußeres Handeln nach bestimmten Regeln, durch deren Anwendung man von den Ausgangsformeln zu weiteren Formeln gelangt.

Jede Formel, die auf solche Weise abgeleitet werden kann, stellt einen allgemeingültigen logischen Satz dar.

A10 Es empfiehlt sich hier nun wieder, die *Aussagenlogik*, die auf den | Prinzipien 2., 3., 4. beruht, abzusondern. Hier brauchen wir als Regeln nur folgende: wir stellen die Elementaraussagen durch Variable dar

$$X, Y, \dots$$

Die erste Regel besagt nun: für jede solche Variable kann irgendeine Aussagenverknüpfung eingesetzt werden (Einsetzungsregel).

Die zweite Regel besteht in dem Schlußschema

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{S}\\ \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}\end{array}}{\mathfrak{T}}$$

wonach aus zwei Formeln $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ die Formel $\mathfrak{T}$ erhalten wird.

Die Wahl der Ausgangsformeln kann auf sehr verschiedene Weise getroffen werden. Man hat sich besonders darum bemüht, mit einer möglichst geringen Zahl von Axiomen auszukommen, und hat hierin in der Tat die Grenze des Möglichen erreicht. Den Zwecken der logischen Untersuchung wird aber besser gedient, wenn wir, entsprechend wie in der Axiomatik der Geometrie, verschiedene *Axiomgruppen* voneinander sondern, derart, daß jede von ihnen die Rolle einer logischen Operation zum Ausdruck bringt. Es ergibt sich so folgende Aufstellung:

I	Axiome der Folge
IIa)	Axiome für &
IIb)	Axiome für $\vee$
III	Axiome der Negation.

Dieses System von Axiomen liefert nun durch Anwendung der Regeln *sämtliche* allgemeingültigen Formeln der Aussagenlogik.[2] Diese Eigenschaft der *Vollständigkeit* des Axiomensystems läßt sich noch schärfer durch folgende Tatsachen kennzeichnen: nehmen wir noch irgendeine nichtableitbare Formel zu den Axiomen hinzu, so können wir mit Hilfe der Regeln jede beliebige Aussagenformel ableiten.

Ein besonderer Vorteil, den die Trennung der Axiomgruppen gewährt, besteht darin, daß sie die Absonderung der *positiven Logik* ermöglicht. Hierunter verstehen wir das System derjenigen Aussagenverknüpfungen, die allgemeingültig sind, ohne die Voraussetzung der Existenz eines Gegenteils,[d] wie z. B.

$$(A \mathbin{\&} B) \to A$$
$$(A \mathbin{\&} (A \to B)) \to B.$$

| Das System dieser Formeln stellt sich in unserer Axiomatik dar als die A11
Gesamtheit derjenigen Formeln, die ohne Benutzung der Axiomgruppe III ableitbar sind. Dieses System ist bei weitem nicht so übersichtlich wie das Totalsystem der allgemeingültigen Formel. Man kennt auch kein Entscheidungsverfahren, durch welches nach einer eindeutigen Vorschrift die Zugehörigkeit einer Formel zu diesem System festgestellt werden kann.[3] Insbesondere trifft

[2]Gemeint sind hier nur diejenigen Formeln, die sich mit den Operationen $\to, \&, \vee$ und der Negation bilden lassen. Nimmt man weitere Operationssymbole hinzu, so können diese durch Ersetzungsregeln eingeführt werden. Man ist freilich nicht an diese Art der Auszeichnung der vier genannten Operationen gebunden.

[3]Seither sind für die positive Logik Entscheidungsverfahren von G. Gentzen und M. Wajsberg angegeben worden.

---

[d]*Vide* [?], p. 67: "Die '*positive Logik*' ..., d. h. die Formalisierung derjenigen logischen Schlüsse, welche unabhängig sind von der Voraussetzung, daß zu jeder Aussage ein Gegenteil existiert."

es nicht etwa zu, daß jede durch →, &, ∨ ausdrückbare Formel, die allgemeingültig, also auf Grund von I–III ableitbar ist, auch schon aus I–II ableitbar ist. Man kann streng beweisen, daß dies nicht der Fall ist.

Ein Beispiel liefert die Formel

$$A \vee (A \rightarrow B).$$

Diese geht auf Grund der Darstellung von ∨ durch → und ‾ über in

$$A \vee (\overline{A} \vee B),$$

und diese Darstellung läßt sofort die Allgemeingültigkeit der Formel erkennen. Jedoch ist die Formel innerhalb der positiven Logik, d. h. auf Grund der Axiome I–II nicht ableitbar, wie man zeigen kann; sie stellt also kein Gesetz der positiven Logik dar.

Wir erkennen hier ganz deutlich, daß die Rolle der Negation diejenige eines *idealen Elementes* ist, dessen Einführung den Sinn hat, das logische System zu einer Gesamtheit von einfacherer Struktur abzurunden, gerade so wie das System der reellen Zahl durch die Einführung des Imaginären zu einer übersichtlicheren Gesamtheit erweitert wird, und wie die gewöhnliche Ebene durch die Hinzunahme der unendlich fernen Elemente zu einer Man-
375 nigfaltigkeit ergänzt wird, die in ${}_a\underline{\mathrm{B}}_a$ezug | auf die projektive Beschaffenheit einfacher ist. Diese für die Wissenschaft fundamentale Methode der idealen Elemente tritt uns also hier bereits in der Logik entgegen, wenn wir uns auch dieser ihrer Bedeutung zumeist nicht bewußt sind.

Ein spezieller Teil der positiven Logik ist die Lehre von den *Kettenschlüssen*, welche ja bereits in der Aristotelischen Logik erörtert worden ist. Auch auf diesem Gebiet gibt es naturgemäße Problemstellungen und einfache Resultate, welche der traditionellen Logik nicht bekannt waren, und die wiederum die Heranziehung spezifisch mathematischer Betrachtungen erfordern. Ich denke da an die Untersuchungen von P. Hertz über Satzsysteme. —

Die bisherige Axiomatik bezieht sich auf diejenigen Schlüsse, welche al-
A12 lein auf den Regeln des hypothetischen, des disjunktiven Schließens | und der Negation beruhen. Nun bleibt uns noch die Aufgabe, das *kategorische Schließen* in unsere Axiomatik einzubeziehen. Wie dies geschieht, will ich hier nur kurz schildern.

Wir brauchen von dem dictum de omni et nullo auch die Umkehrung: „was in jedem einzelnen Fall gilt, das gilt auch allgemein“. Ferner müssen wir das partikuläre Urteil berücksichtigen. Es gilt entsprechend:

> „Wenn eine Aussage $A(x)$ auf irgendein Ding x zutrifft, so gibt es ein Ding, auf welches sie zutrifft, und umgekehrt.“

Wir erhalten so vier Prinzipien des Schließens, die sich für die Axiomatik durch zwei neue Ausgangsformeln und zwei Regeln darstellen. Dazu kommt noch eine Einsetzungsregel für die Gegenstandsvariablen $x, y, \ldots$.

Außerdem muß die Einsetzungsregel für die Aussagenvariablen $X, Y, \ldots$ jetzt so erweitert werden, daß die Formeln der Aussagenlogik auch auf solche Ausdrücke anwendbar sind, welche Gegenstandsvariable enthalten.

Sehen wir uns nun zunächst einmal an, wie sich von diesem Standpunkt die typischen Aristotelischen Schlüsse gestalten. Hierzu ist es nötig, erst etwas über die Deutung des allgemeinen Urteils „alle S sind P“ zu sagen.

Nach der Aristotelischen Auffassung wird in einem solchen Urteil schon vorausgesetzt, daß es gewisse Dinge von der Eigenschaft S gibt, und von diesen Dingen wird dann ausgesagt, daß sie alle die Eigenschaft P besitzen. Diese Deutung des allgemeinen Urteils, gegen die sich von philosophischer Seite insbesondere Franz Brentano gewandt hat, ist zwar in sich ganz korrekt, aber sowohl für die Zwecke der theoretischen Wissenschaft wie auch für die Formalisierung der Logik ungeeignet, da die implizite Voraussetzung eine unnötige Komplikation mit sich bringt. Wir werden daher den Inhalt des Urteils „alle S sind P“ auf die Behauptung beschränken: „ein Ding, das die Eigenschaft S hat, hat auch die Eigenschaft P“.

Hiernach ist ein solches Urteil zugleich allgemein und hypothetisch; es stellt sich dar in der Form

$$(x)(S(x) \to P(x)).$$

Infolgedessen enthalten auch die sogenannten kategorischen Schlüsse eine Vereinigung kategorischer und hypothetischer Schlußweisen. Ich will dies erläutern an dem alten Schulbeispiel:

> „Alle Menschen sind sterblich, Cajus ist ein Mensch, also ist Cajus sterblich.“

Stellen wir nach der Art unserer Schreibweise die Prädikate „x ist ein | A13
Mensch“, „x ist sterblich“ bezüglich durch $M(x)$, $Stb(x)$ dar, so lauten die Prämissen

$$(x)(M(x) \to Stb(x)),$$
$$M(Cajus),$$

und der Schlußsatz lautet: $Stb(Cajus)$.

Die Ableitung geschieht so, daß zuerst, gemäß dem Schluß vom Allgemeinen aufs Besondere, aus

$$(x)(M(x) \rightarrow Stb(x))$$

abgeleitet wird:

$$M(Cajus) \rightarrow Stb(Cajus),$$

und diese Aussage in Verbindung mit

$$M(Cajus)$$

ergibt, gemäß dem Schema des hypothetischen Schlusses:

$$Stb(Cajus).$$

An dieser Darstellung des Schlusses ist charakteristisch, daß in ihr von jeglicher quantitativen Deutung des kategorischen Urteils (im Sinne der Subsumption) abgesehen wird. Man erkennt hier besonders deutlich, daß die mathematische Logik keineswegs darauf angewiesen ist, eine Umfangs-Logik zu sein.

Unsere Regeln und Ausgangsformeln gestatten nun, alle die bekannten Aristotelischen Schluß-Modi, soweit sie unserer Deutung des allgemeinen Urteils entsprechen – es bleiben danach nur noch 15 – abzuleiten. Man erkennt dabei, daß es sich eigentlich nur um ganz wenige wirklich voneinander ver-
376 schiedene Schluß|arten handelt. Außerdem aber gewinnt man den Eindruck, daß die Problemstellung, die hier zu$_a$ $\underline{\text{G}}_a$runde liegt, sehr willkürlich abgegrenzt ist.

Ein allgemeiner gefaßtes Problem, das auch in der mathematischen Logik gelöst ist, besteht darin, ein Verfahren der Entscheidung zu finden, durch welches man von einer Prädikatenformel feststellen kann, ob sie allgemeingültig ist oder nicht. Damit beherrscht man dann wieder das Schließen im Gebiete der Prädikate, entsprechend wie man es nach dem früher erwähnten Entscheidungsverfahren für die Aussagenlogik beherrscht.

Aber unsere Schlußregeln gehen noch viel weiter. Die eigentliche Fülle der logischen Zusammenhänge eröffnet sich erst, wenn wir die *Relationen* (Prädikate mit mehreren Subjekten) betrachten. Dadurch wird es erst möglich, die *mathematischen Beweisführungen* restlos logisch zu verfolgen.

Allerdings wird man hier veranlaßt, noch verschiedene *Erweiterungen* vorzunehmen, die uns auch durch die Sprache nahegelegt sind.

A14 Die erste Erweiterung besteht in der Einführung eines formalen | Ausdruckes dafür, daß „x dasselbe Ding ist wie y“, bzw. „ein anderes Ding ist als y“. Dazu muß die *„Identität* von x und y“ formal als eine bestimmte Relation dargestellt werden, deren Eigenschaften als Axiome zu formulieren sind.

Zweitens brauchen wir eine symbolische Darstellung für diejenige logische Beziehung, die wir sprachlich mit Hilfe des Genetivs oder des Relativpronomens in Wendungen wie „der Sohn des Herrn X“ oder „dasjenige Ding, welches“ zum Ausdruck bringen, und auf der in der Mathematik der *Funktionsbegriff* beruht. Es kommt hier darauf an, daß ein Ding, das als einziges eine gewisse Eigenschaft besitzt, bzw. eine gewisse Relation zu bestimmten Dingen erfüllt, durch diese Eigenschaft oder Relation charakterisiert wird.

Die bedeutsamste Erweiterung aber kommt dadurch zustande, daß wir uns veranlaßt sehen, die Prädikate und Relationen selbst als Gegenstände zu betrachten, wie es ja auch in der Sprache geschieht, z. B. wenn wir sagen: „Geduld ist eine Tugend“. Wir können Eigenschaften von Prädikaten und Relationen, ferner auch Beziehungen zwischen Prädikaten sowie zwischen Relationen konstatieren. Auch die Formen des Allgemeinen und Partikulären lassen sich mit Bezug auf Prädikate und Relationen anwenden. Wir gelangen auf diese Weise zu einer ${}_{d}$„${}_{d}$*zweiten Stufe*${}_{d}$“${}_{d}$ der Logik, für deren formale Durchführung die Gesetze des kategorischen Schließens in sinngemäßer Weise auf den Gegenstandsbereich der Prädikate und Relationen auszudehnen sind.

Für diesen durch die Einbeziehung der Relationen und die ferneren angegebenen Erweiterungen vergrößerten Umkreis der logischen Beziehung stellt die Lösung des Entscheidungsproblems – welches sich hier übrigens von selbst einem allgemeineren Probleme unterordnet – eine gewaltige Aufgabe dar. Seine Lösung würde bedeuten, daß wir ein Verfahren haben, wonach wir jedenfalls grundsätzlich von jedem vorgelegten mathematischen Satz entscheiden können, ob er aus einer gegebenen Reihe von Axiomen beweisbar ist oder nicht. In der Tat sind wir auch von einer Lösung dieser Aufgabe weit entfernt. Immerhin sind aber doch in diesem Problemgebiet, durch die Untersuchungen von Löwenheim und Behmann, verschiedene beträchtliche Ergebnisse von sehr allgemeinem Charakter erzielt worden; insbesondere ist es gelungen, das Entscheidungsproblem der *Prädikatenlogik* auch für die zweite

Stufe der Logik zur vollständigen Lösung zu bringen.[4]

A15 | Wir sehen hier, wie die traditionelle Schlußlehre nur einen ganz winzigen Ausschnitt von dem bildet, was tatsächlich zu dem Bereiche des logischen Schließens gehört.

Nun habe ich noch gar nicht von der *Begriffsbildung* gesprochen. Ich kann auch darauf aus Mangel an Zeit nicht näher eingehen. Nur so viel will ich sagen, daß eine wirklich eingehende logische Analyse der Begriffsbildung erst auf Grund der Theorie der Relationen möglich wird. Man erkennt durch diese erst, welch komplizierte Zusammensetzungen von logischen Ausdrücken (Beziehungen, Existenzsätzen usw.) durch kurze Ausdrücke der Sprache verdeckt werden. Eine solche Analyse der Begriffsbildung ist, vor allem von Bertrand Russell, bereits weitgehend in Angriff genommen und hat zur Erkenntnis allgemeiner logischer Prozesse der Begriffsbildung geführt, durch deren Klarstellung das methodische Verständnis der Wissenschaften erheblich gefördert wird. –

Ich komme nun zum Schluß meiner Ausführungen. Ich habe zu zeigen gesucht, daß die Logik, und zwar die richtige alte Logik, so wie man sie immer gemeint hat, ihre wirkliche Abrundung, sachgemäße Entwicklung und systematische Vollständigkeit erst durch die mathematische Behandlung erreicht. Die mathematische Betrachtungsweise wird hier nicht etwa künstlich herangebracht, sondern stellt sich ganz von selbst bei der weiteren Verfolgung der Probleme ein.

377 | Der Widerstand, der gegenüber der mathematischen Logik, besonders auch bei Philosophen, verbreitet ist, hat außer den anfangs genannten Gründen auch noch einen prinzipiellen. Viele sind einverstanden damit, die Mathematik in Logik aufgehen zu lassen. Was man aber hier gewahr wird, ist das Umgekehrte, daß nämlich das System der Logik in Mathematik aufgeht. Die Logik erscheint hier gegenüber dem mathematischen Formalismus als eine spezielle Deutung und als Anwendung, ganz in demselben Verhältnis, wie etwa die Elektrizitätslehre zur mathematischen Analysis steht, wenn sie gemäß der Maxwellschen Theorie behandelt wird.

Das widerspricht nicht der Allgemeinheit der Logik, wohl aber der Mei-

[4] Man beachte, daß hier von „Prädikatenlogik“ im Sinne der Unterscheidung von Prädikaten und Relationen gesprochen wird. Mit „Prädikatenlogik“ ist also hier gemeint, was man gegenwärtig meist als Logik der einstelligen Prädikate bezeichnet. Die Logik der mehrstelligen Prädikate ist bereits für die erste Stufe nicht allgemein entscheidbar, wie von A. Church gezeigt wurde.

nung, daß diese Allgemeinheit derjenigen der Mathematik übergeordnet ist. Die Logik handelt von gewissen Inhalten, die auf jedwede Materie, sofern darüber gedacht wird, Anwendung finden. Andererseits handelt aber die Mathematik von den allgemeinsten Gesetzen jeglicher | Zusammensetzung. A16
Dies ist auch eine Art von höchster Allgemeinheit, nämlich in Richtung auf das *Formale*. Ebenso wie jede Überlegung, auch die mathematische, den logischen Gesetzen untersteht, so muß jede Struktur, jede noch so primitive Mannigfaltigkeit, also auch die, welche in der Kombination von Sätzen oder von Satzteilen gegeben ist, der mathematischen Gesetzlichkeit unterliegen.

Wollten wir eine von Mathematik freie Logik, so würde gar keine Theorie übrigbleiben, sondern nur das reine Besinnen auf die einfachsten Bedeutungszusammenhänge. Solche rein inhaltlichen Überlegungen – man kann diese unter dem Namen der „philosophischen Logik“ zusammenfassen – sind in der Tat unerläßlich und für den Ansatz der logischen Theorie entscheidend, ebenso wie die rein physikalischen Überlegungen, die zum Ansatz einer physikalischen Theorie führen, für diese die grundlegende Gedankenleistung bilden. Aber solche Überlegungen machen doch nicht die Theorie selbst aus. Diese zu entwickeln erfordert den mathematischen Formalismus. Exakte systematische Theorie eines Gegenstandes ist eben mathematische Behandlung, und in diesem Sinne gilt Hilberts Ausspruch: „Alles was Gegenstand des wissenschaftlichen Denkens überhaupt sein kann, verfällt, sobald es zur Bildung einer Theorie reif ist, … der Mathematik.“[e] Diesem Schicksal kann auch die Logik nicht entrinnen.

[e] *Vide* [**?**], p. 156.

Kapitel 4

Bernays Project: Text No. 6

Zusatz zu Hilberts Vortrag (über „Die Grundlagen der Mathematik“)[†] (1927)

Appendix to Hilbert’s lecture “The foundations of mathematics”

(*Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* 6, S. 89–92; engl. in [?], S. 485–489)

---

89 | 1. Zur Ergänzung der vorstehenden Abhandlung seien einige nähere$_{dd}$ Ausführungen über den dort angedeuteten Ackermannschen Beweis der Widerspruchsfreiheit nachgetragen.

Was zunächst, beim *Fall der Einlagerung*, die Abschätzung für die Höchstzahl der Ersetzungsschritte betrifft, so wird eine solche durch

$$2^n$$

geliefert, wobei n die Anzahl der gestaltlich verschiedenen ε-Funktionale bedeutet. Die geschilderte Beweismethode liefert noch eine wesentlich schärfere Abschätzung, welche z. B. für den Fall, daß gar keine Einlagerung vorkommt,

[†] The original title had a third line, reading „Von P. Bernays in Göttingen.“

die Höchstzahl

$$n+1$$

ergibt.

2. Die Betrachtung, durch die man beim *Fall der Überordnung* die Endlichkeit des Verfahrens erkennt, möge unter einfachen spezialisierenden Annahmen durchgeführt werden.

Die Annahmen sind folgende: Die im Beweis vorkommenden ε-Funktionale seien

$$\varepsilon_a \mathfrak{A}(a, \varepsilon_b \mathfrak{K}(a,b))$$

und

$$\varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_1, b), \varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_2, b), \ldots, \varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_n, b),$$

worin

$$\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$$

das $\varepsilon_a \mathfrak{A}(a, \varepsilon_b \mathfrak{K}(a,b))$ enthalten können, aber sonst kein ε-Funktional enthalten sollen.

Das Verfahren besteht nun in einer Aufeinanderfolge von „Gesamtersetzungen"; jede von diesen wird gebildet durch: eine Funktionsersetznng $\chi(a)$ für $\varepsilon_b \mathfrak{K}(a,b)$, vermöge deren $\varepsilon_a \mathfrak{A}(a, \varepsilon_b \mathfrak{K}(a,b))$ übergeht in $\varepsilon_a \mathfrak{A}(a, \chi(a))$, und eine Ersetzung für $\varepsilon_a \mathfrak{A}(a, \chi(a))$, vermöge deren $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ in Zahlzeichen $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n$ übergehen und für

$$\varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_1, b), \ldots, \varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_n, b)$$

die Werte

$$\chi(\mathfrak{z}_1), \ldots, \chi(\mathfrak{z}_n)$$

erhalten werden.

| Wir beginnen mit der Funktion 90

$$\chi_0(a),$$

die für alle a den Wert 0 hat („Nullersetzung"), und ersetzen auch demgemäß

$$\varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_1, b), \ldots, \varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_n, b)$$

alle durch 0.

Unter Festhaltung dieser Ersetzung wenden wir auf

$$\varepsilon_a \mathfrak{A}(a, \chi_0(a))$$

das ursprüngliche Verfahren des Probierens an, das nach höchstens zwei Schritten zum Ziele führt, derart, daß dann die zu

$$\varepsilon_a \mathfrak{A}(a, \chi_0(a))$$

gehörigen kritischen Formeln alle richtig werden.

So erhalten wir eine bzw. zwei Gesamtersetzungen

$$\mathfrak{E}_0, \text{ bzw. } \mathfrak{E}_0, \ \mathfrak{E}'_0.$$

Nun ist entweder $\mathfrak{E}_0$ bzw. $\mathfrak{E}'_0$ endgültig, oder es wird eine der zu

$$\varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_1, b), \text{ bzw. } \varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_2, b), \text{ bzw. } \ldots$$

gehörigen kritischen Formeln falsch. Es gehöre diese etwa zu $\varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_1, b)$ und $\mathfrak{a}_1$ gehe in $\mathfrak{z}_1$ über. Dann finden wir ein Beispiel $\mathfrak{z}$, so daß

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z})$$

richtig ist. Dieses Beispiel berücksichtigen wir nun, indem wir als Ersetzungsfunktion für

$$\varepsilon_b \mathfrak{K}(a, b)$$

anstatt $\chi_0(a)$ die Funktion

$$\chi_1(a)$$

nehmen, die definiert ist durch:

$$\begin{aligned} \chi_1(\mathfrak{z}_1) &= \mathfrak{z} \\ \chi_1(a) &= 0 \quad \text{für } a \neq \mathfrak{z}_1. \end{aligned}$$

Mit $\chi_1(a)$ wiederholen wir nun das obige Verfahren, wobei jetzt die Werte der

$$\varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_\nu, b) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

sich erst nach der Wahl des Wertes für

$$\varepsilon_a \mathfrak{A}(a, \chi_1(a)),$$

91 | bestimmen, und bekommen dadurch eine bzw. zwei Gesamtersetzungen

$$\mathfrak{E}_1, \text{ bzw. } \mathfrak{E}_1, \ \mathfrak{E}'_1.$$

Nun ist entweder $\mathfrak{E}_1$ bzw. $\mathfrak{E}'_1$ endgültig oder wir finden wieder ein Beispiel $\mathfrak{z}'$ für eines der aus

$$\varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_1, b), \ldots, \varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_n, b),$$

durch die letzte Gesamtersetzung hervorgehenden ε-Funktionale, derart, daß für ein gewisses $\mathfrak{z}_2$

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}')$$

richtig ist, während

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{z}_2, \chi_1(\mathfrak{z}))$$

falsch ist. Daraus folgt zugleich, daß

$$\mathfrak{z}_2 \neq \mathfrak{z}_1.$$

Nunmehr führen wir statt $\chi_1(a)$ als Ersetzungsfunktion $\chi_2(a)$ durch folgende Definition ein

$$\begin{aligned} \chi_2(\mathfrak{z}_1) &= \mathfrak{z} \\ \chi_2(\mathfrak{z}_2) &= \mathfrak{z}' \\ \chi_2(a) &= 0 \quad \text{für } a \neq \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2. \end{aligned}$$

Mit dieser Funktion $\chi_2(a)$ wird nun wiederum das Ersetzungsverfahren wiederholt.

Indem wir in dieser Weise fortfahren, erhalten wir eine Reihe von Ersetzungsfunktionen

$$\chi_0(a), \chi_1(a), \chi_2(a), \ldots,$$

von denen jede aus der vorigen durch Hinzunahme eines von 0 verschiedenen Funktionswertes für einen neuen Argumentwert gebildet ist; und zu jeder Funktion $\chi_p(a)$ haben wir eine bzw. zwei Ersetzungen

$$\mathfrak{E}_p \text{ bzw. } \mathfrak{E}_p,\ \mathfrak{E}'_p.$$

Es kommt darauf an, zu zeigen, daß diese Ersetzungsreihe abbricht. Dazu betrachten wir zunächst die Ersetzungen

$$\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots .$$

Bei diesen ist jedesmal

$$\varepsilon_a \mathfrak{A}(a, \varepsilon_b \mathfrak{K}(a, b))$$

durch 0 ersetzt; die

$$\varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_\nu, b) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

gehen daher jedesmal in dieselben ε-Funktionale über; und für jedes von
92 diesen wird entweder 0 gesetzt oder ein von 0 verschiedenes Zahl|zeichen, welches dann als definitive Ersetzung beibehalten wird. Somit können unter den Ersetzungen

$$\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots$$

höchstens $n+1$ verschiedene sein. Ist aber $\mathfrak{E}_k$ mit $\mathfrak{E}_l$ identisch, *so* gehört entweder zu keiner von beiden oder zu jeder eine anschließende Ersetzung

$$\mathfrak{E}'_k \text{ bzw. } \mathfrak{E}'_l,$$

und in diesen ist dann

$$\varepsilon_a \mathfrak{A}(a, \varepsilon_b \mathfrak{K}(a, b))$$

beidemal durch dieselbe als Beispiel gefundene Zahl ersetzt, so daß auch die

$$\varepsilon_b \mathfrak{K}(\mathfrak{a}_\nu, b) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

für beide Ersetzungen in die gleichen ε-Funktionale übergehen.

Demnach können unter den Ersetzungen $\mathfrak{E}'_l$, für welche $\mathfrak{E}_l$ mit einer festen Ersetzung $\mathfrak{E}_k$ übereinstimmt, wieder höchstens $(n+1)$ verschiedene sein.

Im ganzen kann es also nicht mehr als $(n+1)^2$ verschiedene

$$\mathfrak{E}_p \text{ bzw. } \mathfrak{E}_p, \;\; \mathfrak{E}'_p$$

geben. Daraus folgt aber, daß spätestens mit der Ersetzungsfunktion

$$\chi_{(n+1)^2}(a)$$

unser Verfahren zum Abschluß kommt. Denn es können nicht die zu zwei verschiedenen Ersetzungsfunktionen $\chi_p(a)$, $\chi_q(a)$, $(q > p)$ gehörigen Ersetzungen völlig übereinstimmen, da man sonst mit Hilfe von $\chi_q(a)$ auf dasselbe Beispiel $\mathfrak{z}^*$ geführt werden müßte, das man schon mit Hilfe von $\chi_p(a)$ gefunden hat, während dieses doch in der Definition der auf $\chi_p(a)$ folgenden Ersetzungsfunktionen, insbesondere also auch derjenigen von $\chi_q(a)$, schon benutzt ist.

3. Schließlich sei noch bemerkt, daß man zur Berücksichtigung des Axioms der vollständigen Induktion, welches für den Zweck des Nachweises der Widerspruchsfreiheit in der Form

$$(\varepsilon_a A(a) = b') \to \overline{A}(b),$$

angesetzt werden kann, nur nötig hat, jedesmal wo man ein Beispiel $\mathfrak{z}$ für das Zutreffen einer Aussage $\mathfrak{B}(a)$ gefunden hat, zum kleinsten Beispiel überzugehen, indem man in der Reihe der auf numerische Formeln reduzierten Aussagen

$$\mathfrak{B}(0), \mathfrak{B}(0'), \ldots, \mathfrak{B}(\mathfrak{z})$$

die erste richtige aufsucht.

Kapitel 5

Bernays Project: Text No. 7

Über Nelsons Stellungnahme in der Philosophie der Mathematik†
(1928)

On Nelson's Position in the Philosophy of Mathematics

(*Die Naturwissenschaften* 16, S. 142–145)

142*a* | Im Anschluß an den vorausgehenden Aufsatz von Otto Meyerhof möge noch einiges über Nelsons Bedeutung für die Philosophie der Mathematik ausgeführt werden.

Nelson gehörte zu denjenigen Philosophen, deren Denkweise aus einer Vertrautheit mit dem Geiste der exakten Wissenschaften erwächst. Die Mathematik und die theoretische Physik bildeten für ihn das methodische Vorbild, dem er in der Ausgestaltung seiner philosophischen Gedanken nachstrebte.

142*b* Die Anforderung strenger Systematik fand er | in vollkommener Weise erfüllt in der mathematischen Axiomatik, insbesondere in derjenigen Form, die ihr Hilbert in den *Grundlagen der Geometrie* gegeben hatte. Und so war es sein Bestreben, dieser Methode der Axiomatik im Bereiche der Philosophie neues Feld zu erobern.

† The original title had a second line, reading: „Von Paul Bernays, Göttingen."

Dabei war Nelson fern von jener unfruchtbaren Art der Nachahmung der Mathematik, wie sie in der vorkantischen Metaphysik herrschend war, beruhend auf dem Glauben, daß man durch logisches Schließen Erkenntnisse aus dem Nichts hervorzaubern könne.

| Als Anhänger Kants vertrat er die Lehre von dem *synthetischen Charakter* 143*a*
der mathematischen Erkenntnis; er betonte, daß der Erkenntnisgehalt der Mathematik in ihren Axiomen eingeschlossen sei, und diese galten ihm als der Ausdruck von Erkenntnissen aus *reiner Anschauung*.

In verschiedenen Schriften, insbesondere der Abhandlung „Bemerkungen über die nichteuklidische Geometrie" (1906)[a], wandte er sich gegen die skeptischen und die empiristischen Auffassungen, die bezüglich der Geltung der geometrischen Axiome seit der Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie unter den Vertretern der Wissenschaft immer mehr Anhang gewonnen haben.

Er zeigt hier, wie diese Ansichten sich ergeben aus dem Festhalten an der alten Aristotelischen Lehre, wonach alle Erkenntnisse entweder in der Sinnlichkeit, als der Quelle der Erfahrung, oder dem Verstande, als der Quelle der Logik, ihren Ursprung haben.

Läßt man diese Disjunktion, die ja an sich nicht zwingend ist, fallen, so behält man die Möglichkeit, außerlogische Notwendigkeiten, insbesondere anschaulicher Art, anzuerkennen, welche in synthetischen Sätzen zum Ausdruck kommen. Was speziell das Parallelenaxiom betrifft, so kann – wenn jene „dogmatische Disjunktion" preisgegeben wird – aus der logischen Möglichkeit einer nichteuklidischen Geometrie nicht etwa geschlossen werden, daß das Parallelenaxiom keine notwendige Geltung besitzt, vielmehr kann nur der synthetische, d. h. nicht-logische Charakter dieses Axioms gefolgert werden.

Noch weiter ausgeführt wurden diese Gedanken von Nelson in einem Vortrag „Über die Grundlagen der Geometrie"[b], den er im April 1914 in Paris (bei der Gründung der „Société internationale de Philosophie mathématique") gehalten hat.

Hier stützt Nelson durch eine Reihe von Argumenten seine Behauptung von dem *anschaulichen und zugleich rationalen Charakter der geometrischen Erkenntnis.*

So weist er insbesondere darauf hin, daß die Schwierigkeiten, welche die begriffliche Beschreibung des Kontinuums (der Stetigkeit) bietet, ein deutliches Anzeichen dafür geben, daß hier eine dem Denken von außen her, eben

[a] *Vide* [**?**].
[b] *Vide* [**?**].

durch die Anschauung, gestellte Aufgabe vorliegt.

Ferner hebt er hervor, daß die typischen geometrischen Irrtümer, wie z. B. diejenigen, welche auf dem Übersehen der Möglichkeit von einseitigen Flächen beruhen, nicht der Anschauung zur Last zu legen sind, sondern aus einer voreiligen begrifflichen Verallgemeinerung anschaulich erfaßter Sachverhalte entspringen.

Des weiteren wendet er sich gegen die Behauptung, daß man die nichteuklidische Räumlichkeit anschaulich erfassen könne. Bei den bekannten räumlichen Darstellungen der nichteuklidischen Geometrie, z. B. durch die Geometrie im Innern einer Kugel mit geeigneter Definition der Kongruenz,
143*b* ist das, was aufgewiesen wird, in der Tat | nicht etwa eine nichteuklidische Räumlichkeit, sondern nur die Erfüllung der nichteuklidischen Gesetzlichkeit durch gewisse Objekte und Beziehungen des euklidischen Raumes.

Wenn dieses Argument heute von vielen nicht anerkannt wird, so hängt das damit zusammen, daß die eigentliche Bedeutung der Worte „Anschauung“ und „anschaulich“ den heutigen Mathematikern und Physikern großenteils abhanden gekommen ist, so daß von Anschaulichkeit meist nur in einem abgeblaßten und verschwommenen Sinne die Rede ist, wonach insbesondere zwischen eigentlichem anschaulichen Vorstellen und bloßer anschaulicher Analogie gar nicht unterschieden wird.

Eine gewichtigere Opposition gegen den Standpunkt Nelsons geht aus von der Auffassung, daß unsere räumliche Anschauung keine vollkommene Schärfe besitzt, daß daher die geometrischen Gesetze nur approximativ durch die Anschauung bestimmt sind und erst durch einen *Idealisierungsprozeß* aus den Daten der Anschauung gewonnen werden.

Gegenüber dieser Behauptung argumentiert Nelson folgendermaßen: Daß die geometrischen Axiome im Verhältnis zu den *Beobachtungstatsachen* eine Idealisierung darstellen, kann nicht bestritten werden. Aber dieser Umstand spricht nur gegen den *empirischen* Charakter der geometrischen Gesetze. Ihr *anschaulicher* Charakter wird dadurch nicht angefochten (es sei denn, daß man wieder jene erwähnte dogmatische Disjunktion zu$_a$ $\underline{\text{G}}_a$runde legt).

Im Gegenteil: eine Idealisierung setzt ein Ideal voraus. Nur dann, wenn uns ein solches Ideal im Sinne einer erkenntnisartigen Norm gegeben ist, hat die bei der Idealisierung auszuführende Abstraktion ihre eindeutige, von Willkür freie Bestimmtheit, und auch nur dann ist die Beständigkeit der Idealisierung gegenüber den Erweiterungen unseres Erfahrungsbereiches gewährleistet. Somit liefert uns gerade der Gesichtspunkt der Idealisierung einen Hinweis auf die Tatsache der reinen Anschauung, auf Grund deren sich der Idealisierungsprozeß einfach als der Übergang von der Sinnesanschauung zur reinen Anschauung verstehen läßt.

Aus dieser Lehre von der reinen Anschauung als der Norm für die geometrischen Idealisierungen ergibt sich für Nelson die Konsequenz, daß ein grundsätzlicher Unterschied besteht zwischen der geometrischen und der physikalischen Idealisierung: Bei den physikalischen Idealisierungen ist die Anwendbarkeit auf die Wirklichkeit zunächst stets problematisch, da die Annahme eines Limes für den idealisierenden Grenzprozeß einer Rechtfertigung durch die Erfahrung bedarf und durch diese bestenfalls als höchst wahrscheinlich erwiesen werden kann. Dagegen sind uns für die geometrischen Idealisierungen die Grenzgebilde in der reinen Anschauung gegeben, an deren Leitfaden der geometrische Idealisierungsprozeß sich vollzieht; die Existenz des Limes ist uns also hier unabhängig von der Erfahrung gewiß.

| Diese Unabhängigkeit von der Erfahrung ist nicht im Sinne einer bloßen 144*a*
Immanenz aufzufassen, so daß man etwa die apriorische Gültigkeit der Geometrie für die Anschauung von der Gültigkeit für den „wirklichen“ (physikalischen) Raum zu unterscheiden hätte. Vielmehr erklärt Nelson – hierin auch ganz Anhänger Kants – ausdrücklich: „Wir kennen nur *einen* Raum. Das ist der Raum, von dem die Geometrie handelt und in dem sich die physischen Körper befinden."[c]

Die Gesetze der Geometrie haben hiernach unmittelbare Verbindlichkeit für die Physik, sie bilden einen Rahmen, an den alle Naturforschung gebunden ist und durch welchen auch die Aufgabe der physikalischen Forschung erst ihre Bestimmtheit erhält. Denn – so führt Nelson aus – macht man die Geometrie selbst zum Gegenstand der experimentellen Kontrolle, so geht damit die Möglichkeit verloren, aus den physikalischen Beobachtungen eindeutige Schlüsse zu ziehen, da man dann bei einer neuen Beobachtung niemals wissen kann, ob sie eine vorher unbekannte Eigenschaft des Raumes oder eine anderweitige physikalische Tatsache zum Ausdruck bringt. Nelson erläutert dies durch folgendes Beispiel: Gesetzt, man hätte zur Zeit, als man glaubte, die Erde sei eine Scheibe, durch Triangulationen festgestellt, daß die Winkelsumme irdischer Dreiecke größer ist als zwei Rechte, so hätte man, gemäß der empirischen Auffassung der Geometrie, aus diesem Ergebnis mit gleichem Recht auf eine nichteuklidische Beschaffenheit des Raumes schließen können wie auf die Kugelgestalt der Erde.

[c] *Vide* ■ , p. ■ .

Was hier speziell über die geometrischen Gesetze gesagt ist, erstreckt sich gleichermaßen auf alle diejenigen Gesetze, welche, nach der Kantischen Lehre, der reinen Anschauung entnommen sind, also auch auf die Gesetze der Zeit und der geometrischen Bewegungslehre (der Kinematik).

Durch seine Überzeugung von der apriorischen Verbindlichkeit dieser Gesetze für die physikalische Naturerklärung mußte Nelson in Gegensatz treten zu der neueren Physik, deren kennzeichnendes Moment gerade darin besteht, daß man sich immer mehr losgemacht hat von dem Glauben an die Notwendigkeit der Einordnung aller physikalischen Tatsachen in den Rahmen der a priori feststehenden räumlich-zeitlichen Ordnung und an die damit sich ergebende grundsätzliche Sonderstellung der geometrisch-kinematischen Gesetzlichkeit gegenüber den physikalischen Gesetzen.

Diese Wandlung in der methodischen Auffassung der Physik bildet aber nur einen Teil der philosophischen Einwirkung, welche von der neueren Entwicklung der exakten Wissenschaften ausgegangen ist. Ein anderer wichtiger Einfluß rührt her von den Forschungen über die *Grundlagen der Arithmetik*. An der Entwicklung dieser Forschungen hat Nelson lebhaften und auch aktiven Anteil genommen.

Schon mit den Bestrebungen, welche von der *Cantorschen Mengenlehre*
144b ausgingen, stand Nelson | durch mehrere Angehörige der von ihm begründeten Neu-Fries$_a$'$_a$schen Schule, insbesondere durch Gerhard Hessenberg, der ja einer der Führer in der Ausgestaltung der Cantorschen Mengenlehre war, in enger Fühlung.

Eingehend befaßte er sich mit den *Paradoxien der Mengenlehre*, deren erstes Bekanntwerden er miterlebte. Diese Paradoxien hatten für Nelson ein besonderes Interesse wegen ihres Zusammenhanges mit gewissen dialektischen Schlußweisen, deren er sich öfters zur Widerlegung gegnerischer Ansichten bediente – so insbesondere der Aufweisung eines „introjizierten“ Widerspruches, d. h. eines Widerspruches, wie er überall da vorliegt, wo die Annahme der Gültigkeit bzw. der Einsichtigkeit einer aufgestellten allgemeinen Behauptung bereits ein Gegenbeispiel gegen deren Gültigkeit liefert.

Die von Nelson gemeinsam mit Grelling verfaßte Abhandlung „Bemerkungen zu den Paradoxien von Russel$_a$l$_a$ und Burali-Forti“[d] beansprucht nicht eine Lösung der Paradoxien zu bringen; sie diente der Präzisierung und Verschärfung der vorgefundenen Problematik – z. B. wurde hier die an das

[d] *Vide* [**?**]; the misspelling „Russel“ is the that of the original title.

Wort „heterologisch“ sich knüpfende, besonders prägnante Paradoxie zum erstenmal aufgestellt – sowie zur Widerlegung ungenügender Lösungsversuche.

Gegenüber den Bemühungen, die Mathematik durch reine Logik zu begründen, hielt sich Nelson in kritischer Reserve. Dagegen brachte er dem Hilbertschen Unternehmen der Neugründung der Mathematik starkes Interesse und lebhafte Sympathie entgegen. An dieser Art der Grundlegung der Mathematik begrüßte Nelson die Durchführung des methodischen Grundsatzes der *Trennung von Kritik und System*, d. h. die völlige Loslösung des Begründungsverfahrens von dem deduktiv-systematischen Aufbau der Mathematik und die damit verbundene erkenntnistheoretische Unterscheidung zwischen den eigentlich mathematischen und den durch die Begründung zu erweisenden „metamathematischen“ Tatsachen. Diese Einhelligkeit des Hilbertschen Ansatzes mit den Leitgedanken seiner eigenen, an Fries sich anschließenden kritischen Methodenlehre war für Nelson eine große Genugtuung. Noch kurz vor seinem Lebensende hat er in einem Vortrage$_{dd}$[e] die methodische Verwandtschaft der Hilbertschen Grundlegung mit der Fries'schen Vernunftkritik dargelegt.

Es gibt aber noch einen anderen Gesichtspunkt, unter dem die Hilbertsche Begründung der Mathematik in Beziehung steht zu der Philosophie Nelsons: die von Hilbert als methodische Grundlage geforderte „finite Einstellung“ muß erkenntnistheoretisch als eine Art von *reiner Anschauung* charakterisiert werden. Denn sie ist einerseits anschaulich und geht andererseits jedenfalls über das eigentlich Erfahrbare hinaus.

| Das Erfordernis einer derartigen Erkenntnisgrundlage ist an sich noch un- 145*a*
abhängig von der besonderen Art des Hilbertschen Ansatzes; es besteht für eine jede finite Begründung der Mathematik. Für die Hilbertsche Grundlegung ist aber kennzeichnend, daß hier der *finite Standpunkt in Zusammenhang gebracht* wird *mit der axiomatischen Begründung der theoretischen Wissenschaften*. Dadurch stellen sich die Voraussetzungen der finiten Einstellung zugleich als *Bedingungen* dar *für die Möglichkeit theoretischer Naturerkenntnis*, ganz im Sinne der Kantischen Problemstellung.

Wenn dieser Zusammenhang zum allgemeinen | Bewußtsein gelangt, so 145*b*
wird damit die Möglichkeit gegeben, daß die Grundgedanken der Kantischen Kritik der reinen Vernunft in neuer Ausgestaltung wieder aufleben, losgelöst von den speziellen Formen ihrer zeitlichen Bedingtheit, von deren Bindungen

[e] *Vide* [**?**].

sich die theoretische Wissenschaft befreit hat.

Eine solche methodische Klärung kann jedenfalls auch dazu beitragen, daß das Berechtigte an den heute einseitig mißachteten rationalen Tendenzen wieder zur Geltung kommt, für deren Verfechtung Nelson sich Zeit seines Lebens eingesetzt hat.

Kapitel 6

Bernays Project: Text No. 8

Die Grundbegriffe der reinen Geometrie in ihrem Verhältnis zur Anschauung[1] (1928)

The Basic Notions of Pure Geometry in Their Relation to Intuition

(*Die Naturwissenschaften* 16, S. 197–203)

197a | Die Erörterung des Verhältnisses der axiomatischen Geometrie zur Anschauung kann unter sehr verschiedenen Gesichtspunkten und auf Grund verschiedener erkenntnistheoretischer Voraussetzungen geschehen.

Das vorliegende, von R. Strohal unter wesentlicher Mitwirkung von Franz Hillebrand verfaßte Buch will eine bestimmte methodische und erkenntnistheoretische Auffassung von der Geometrie zur Geltung bringen. In der Einleitung wird gesagt, daß die „psychologische Vorgeschichte" der geometrischen Begriffe und Grundsätze den Gegenstand der Untersuchung bilde. Tatsächlich aber zeigt bereits die nähere Entwicklung des Programms, daß es sich hier nicht etwa um Fragen der genetischen Psychologie handelt, sondern

[1][Review of] *Untersuchungen zur psychologischen Vorgeschichte der Definitionen, Axiome und Postulate*, von Richard Strohal. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner 1925. 137 S. und 13 Abbild. 13 x 19 cm. Preis RM 6.40.

um Fragen wie die: in welcher Weise wir bei der Einführung der geometrischen Begriffe auf die Anschauung zu rekurrieren haben, welche Rolle die Anschauung für die Bildung der Grundbegriffe und der zusammengesetzten Begriffe sowie für die Aufstellung der Grundsätze der Geometrie spielt und wie wir danach den Erkenntnischarakter dieser Grundsätze zu beurteilen haben.

| Hierbei liegt es auch keineswegs in der Absicht des Verfassers, die An- *197b*
schauung in möglichst weitgehendem Maße als bestimmend für die Geometrie erscheinen zu lassen.

Strohal will einerseits, wie er eingangs bemerkt, von der Frage der Anwendung auf „unseren Raum“ völlig absehen (tatsächlich verhält er sich nicht ganz so extrem), es handelt sich ihm um die Grundlagen der *reinen* Geometrie. Eine Begründung der Geometrie durch räumliche Erfahrung kommt also für ihn nicht in Betracht. Aber auch eine rationale Begründung durch Berufung auf eine apriorische Evidenz geometrischer Anschauung ist für ihn ausgeschlossen, da er keine andere apriorische Evidenz als die analytische annimmt und der Anschauung keinerlei rationalen Charakter zuerkennt. Eine nähere Erörterung des Begriffes der „Anschauung“ nimmt er nicht vor, sondern legt, sozusagen als selbstverständlich, die – allerdings unter den exakten Forschern auch herrschende – Vorstellung zu$_a$ $\underline{\text{G}}_a$runde, dergemäß die Anschauung nicht imstande ist, uns vollkommen scharfe Objekte zu geben, noch auch eine Beziehung uns als notwendig darzustellen, so daß danach alle Idealisierungen und alle Einsichten von strenger Allgemeingültigkeit erst auf dem Wege der begrifflichen Abstraktion zustande kommen.

Man sollte nun denken, daß Strohal in Anbetracht seiner erkenntnistheoretischen Einstellung den Standpunkt der Hilbertschen formalen Axiomatik
als den | seiner Auffassung und seiner Intention entsprechenden begrüßen *198a*
müßte. In der Tat aber ist er mit dieser heutigen Axiomatik keineswegs einverstanden, sondern wendet sich ausdrücklich gegen sie, insbesondere auch gegen die Hilbertsche Grundlegung der Geometrie.

Was für eine Art der Behandlung der Geometrie Strohal anstrebt, ist schwer mit wenigen Worten in verständlicher Weise zum Ausdruck zu bringen, da bei ihm verschiedenartige Bestrebungen zusammenwirken. Jedenfalls ist der hier vorliegende Versuch eines prinzipiellen Abweichens von dem heutigen Standpunkt der Axiomatik und des Zurückgreifens auf ältere Tendenzen, der beim ersten ungenauen Aufnehmen wohl manchen bestechen kann, beim näheren Betrachten nur geeignet, unseren heutigen Standpunkt in helleres Licht zu setzen und die Motive, aus denen er erwachsen ist, in ihrer

Berechtigung besonders deutlich hervortreten zu lassen. Aber gerade unter diesem Gesichtspunkt erscheint es als nicht nutzlos, die Ansichten Strohals in den Hauptpunkten darzulegen und seine Ausführungen einer kritischen Besprechung zu unterziehen.

Besonders eingehend befaßt sich Strohal mit der *Begriffsbildung.* Was hier zunächst die Rolle der Anschauung anbetrifft, so besteht diese nach Strohal in folgendem:

1. werden die Elementarbegriffe durch Abstraktionsprozesse aus der Anschauung gewonnen$_a$;$_a$

2. dient die Anschauung für die Bildung zusammengesetzter Begriffe (für die „synthetischen Definitionen") als Anlaß (causa occasionalis), indem sie die Bildung gewisser begrifflicher Synthesen nahelegt. Dies geschieht in der Weise, daß an Stelle von anschaulichen, d. h. direkt aus der Anschauung entnommenen Begriffen (wie dem anschaulichen Begriff der Geraden oder des Kreises) scharfe Definitionen durch Zusammensetzung von elementaren Begriffen aufgestellt werden, wobei sich übrigens der Umfang eines so gebildeten Begriffes mit dem des entsprechenden anschaulichen nicht vollkommen zu decken braucht.

Zu beachten ist dabei zunächst, daß die Anschauung, von der die Rede ist, keineswegs immer räumliche Anschauung zu sein braucht, z. B. wird nach Strohal der Elementarbegriff der *Kongruenz*, den er in Anlehnung an Bolyai gleichsetzt mit dem der „Ununterscheidbarkeit abgesehen vom Ort" in der Weise gewonnen, daß zunächst „das anschauliche Gegebensein von ununterschiedenen Qualitäten, Farben, Tönen, Gerüchen und dgl." zu einem unscharfen Begriff von Ununterscheidbarkeit (Gleichheit) führt, aus dem dann durch einen Abstraktionsprozeß der strenge Begriff der Ununterscheidbarkeit als Grenzbegriff erhalten wird (S. 71–72).

Wesentlich ist aber vor allem, daß es uns nach der Auffassung Strohals nicht freisteht, irgendeinen aus der Anschauung durch Abstraktion gewonnenen Begriff als Elementarbegriff einzuführen. Er behauptet vielmehr: nur dann darf ein Begriff als Elementarbegriff angesehen werden, „wenn ein Gebilde, das in den Umfang des betreffenden Begriffes fällt, nicht auch durch begriffliche Merkmale gegeben sein kann", oder in kürzerer Formulierung: „Wo es überhaupt *möglich* ist, einen Begriff explizite zu definieren, dort *muß* man ihn auch definieren." Dieses „Kriterium" ist freilich ganz unbestimmt; denn die Möglichkeit, einen Begriff explizite zu definieren, hängt ja wesentlich von der Wahl der geometrischen Grundsätze ab, und die Aufstellung der Grundsätze richtet sich ja wiederum nach der Wahl der Elementarbegriffe.

| Auch die Motivierung des Kriteriums ist durchaus unbefriedigend. Strohal macht geltend, daß die Erklärung eines Begriffes es ermöglichen muß, „von einem irgendwie gegebenen Objekt zu entscheiden, ob es dem Umfang des betreffenden Begriffes angehört oder nicht“ (S. 18). Zum Beispiel müssen wir entscheiden können, ob der geometrische Ort aller Punkte, die von zwei festen Punkten A, B gleichweit entfernt sind, unter den Umfang des Begriffes der Geraden fällt; einer solchen Aufgabe, so meint er, stünde man hilflos gegenüber, wenn man den Begriff der Geraden als Grundbegriff betrachtet (S. 19). Strohal bedenkt wiederum nicht, daß die Umfangsbeziehungen zwischen den geometrischen Begriffen erst durch die Grundsätze der Geometrie bestimmt werden und daß diese andererseits es auch ermöglichen können, einen zusammengesetzten Begriff als umfangsgleich mit einem elementaren Begriff zu erweisen. Mangels einer näheren Begründung sagt er „offenbar“. 198*b*

Trotz der Unbestimmtheit des Kriteriums ist doch die mit ihm verfolgte Bestrebung erkennbar: Die Geometrie soll – nach Art einer philosophischen Wissenschaft – in ihren Begriffsbildungen von der höchsten Allgemeinheit ausgehend auf dem Wege der begrifflichen Synthese zum Besonderen fortschreiten. Als Elementarbegriffe darf sie daher nicht Begriffe von speziellen geometrischen Gebilden, sondern nur solche ganz allgemeinen Charakters zu$_a$ G$_a$runde legen.

Durch diese methodische Forderung ist Strohal genötigt, von dem bekannten elementaren Aufbau der Geometrie, wie er sich bei Euklid und ähnlich in Hilberts Grundlagen findet, ganz abzugehen. Eine seinem Prinzip entsprechende geometrische Begriffsbildung findet er bei Lobatschefskij und Bolyai. Diesen beiden, vor allem Lobatschefskij, schließt er sich in der Einführung der Elementarbegriffe an. Auf Grund einer ausführlichen Erörterung gelangt er zu folgendem System von Elementarbegriffen:

1. Das Räumliche (Raumgebilde);

2. die Berührung (das Aneinandergrenzen);

3. das „In-sich-haben“ (Beziehung des Ganzen zum Teil);

4. die Kongruenz (Ununterscheidbarkeit abgesehen vom Ort).

Wir haben es hier, wie ersichtlich, mit einem solchen Aufbau der Geometrie zu tun, bei welchem die *topologischen* Eigenschaften des Raumes vorangestellt werden und hernach die *Metrik* eingeführt wird. Diese Methode

des Aufbaues der Geometrie und ihre systematischen Vorzüge sind dem Mathematiker – insbesondere seit den Untersuchungen von Riemann und Helmholtz[2] über die Grundlagen der Geometrie – wohl vertraut. Er wird sich jedoch nicht damit begnügen, diese Art der Begründung allein zur Verfügung zu haben. Insbesondere bietet die übliche elementare Begründungsweise den großen methodischen Vorteil, daß hier die Geometrie, so wie die elementare Zahlentheorie, von der Betrachtung bestimmter, einfacher, leicht faßlicher Objekte ausgeht, und daß man nicht nötig hat, von vornherein gleich den
199*a* Stetigkeitsbegriff und die Grenzprozesse einzuführen. Überhaupt aber | wird man sich die Freiheit nicht nehmen lassen, je nach dem Gesichtspunkt, unter dem die Geometrie betrieben wird, die Grundbegriffe zu wählen. Allerdings räumt Strohal auch grundsätzlich die Möglichkeit ein, daß andere Systeme als das von ihm angegebene „in anderer Weise unmittelbar an die Anschauung anknüpfen, d. h. andere Elementarbegriffe zu$_a$ $\underline{\text{G}}_a$runde legen“ (S. 63). Tatsächlich werden aber von ihm beinah alle anderen Begründungsarten abgelehnt.

So soll nach seiner Meinung der Begriff der Geraden nicht als Grundbegriff genommen werden[3]. Auch vermeidet er es geflissentlich, den Punkt als Grundelement einzuführen. In seiner Systematik wird der Punkt als die gemeinsame Grenze zweier sich berührender Linien definiert, die Linie ergibt sich entsprechend durch Berührung zweier Flächen und die Fläche durch Berührung zweier Körper.

Die Voranstellung des *Richtungsbegriffes* als Elementarbegriff hält er für ausgeschlossen. Wolle man, so erklärt er, den Richtungsbegriff zur Definition der Geraden verwenden, so sei dies „nur in der Art möglich, daß man den Begriff „gleichgerichtet“ als einen nicht weiter rückführbaren Elementarbegriff betrachtet und damit an die Anschauung der „Geradheit“ selbst anknüpft. Da nämlich zur Gewinnung dieses Elementarbegriffes keine andere Anschauung verhelfen kann als die einer anschaulichen geraden Linie, so kommt dies darauf hinaus, daß man die Gerade selbst als Elementarbegriff zu betrach-

[2][1] Der gruppentheoretische Ansatz von Helmholtz, der durch Lie und Hilbert weitergeführt wurde, liegt allerdings (wie aus dem Folgenden hervorgehen wird) nicht in der Richtung der Intention Strohals. Mehr dieser entsprechend ist die von Weyl (im ersten Paragraphen seines Buches *Raum, Zeit, Materie* (*vide* [**?**])) skizzierte „Herleitung der elementaren Raumbegriffe aus dem der Gleichheit“.

[3][1] Übrigens denkt Strohal nur an die Gerade als Raumgebilde oder an die Geradheit als Eigenschaft einer Linie. Die Möglichkeit, die Kollinearität als Beziehung zwischen *drei* Punkten einzuführen, wird von ihm gar nicht in Betracht gezogen.

ten hätte“ (S. 56). Demgegenüber ist zu bemerken, daß die Unterscheidung der Richtungen von einem Punkt aus unabhängig von der Vorstellung der Geradheit durch die Betrachtung der verschiedenen Stellen des Gesichtsfeldes sowie durch die mit unseren Bewegungsimpulsen verknüpften Richtungsvorstellungen anschaulich gewonnen werden kann. Und was ferner die Vergleichung der von *verschiedenen* Punkten ausgehenden Richtungen betrifft, so müßte Strohal deren synthetische Einführung durch die Verbindung des Richtungsbegriffes mit dem Begriff der „Ununterscheidbarkeit“ gemäß seinen methodischen Grundsätzen anerkennen, da er ja zur Vergleichung der Längen von örtlich getrennten Strecken auf eine ganz entsprechende Weise gelangt. Daß in der Tat die Vergleichbarkeit getrennter Strecken a priori um nichts verständlicher ist als die Vergleichbarkeit der von verschiedenen Punkten ausgehenden Richtungen, ist insbesondere in neuerer Zeit durch die von Weyl entdeckte reine Nahegeometrie ganz klargestellt worden. Strohal wiederholt hier nur ein altes Vorurteil. Auch die Charakterisierung der Kongruenzbeziehung mit Hilfe des Begriffes der *starren Bewegung* wird von Strohal als ein zirkelhaftes Verfahren abgelehnt. „Der Begriff des starren Körpers, der in diesem Zusammenhange auftritt, kann wiederum nicht anders erklärt werden als dadurch, daß man die Kongruenz der verschiedenen Lagen dieses Körpers voraussetzt. Will man aber den starren Körper als Elementarbegriff auffassen, so findet man, daß zu seiner Gewinnung keine anderen Anschauungen verhelfen können als jene, die uns den Begriff der Kongruenz selbst liefern, so daß der Umweg über den Begriff des starren Körpers jeden Sinn verliert“ (S. 17–18). Diese Argumentation wäre nur dann berechtigt, wenn der Begriff des starren Körpers als ein gewöhnlicher Gattungsbegriff gebildet wer|den 199b
müßte in der Weise etwa, daß man von der empirischen Vorstellung des festen Körpers ausgehend durch Abstraktion zu dem Begriff des vollkommen starren Körpers gelangt. Tatsächlich kann aber an Stelle dieses Abstraktionsprozesses ein ganz anderer vorgenommen werden, der darin besteht, daß man die an den festen Körpern gefundenen anschaulichen Tatsachen, betreffend die Arten der Bewegungsfreiheit und die Koinzidenzen, durch Abstraktion zu einer strengen Gesetzlichkeit verschärft und mit Bezug auf diese *Gesetzlichkeit* den geometrischen Begriff des starren Körpers bildet. In der mathematischen Fassung kommt diese Art der Begriffsbildung dadurch zur Geltung, daß man von vornherein die starren Bewegungen nicht einzeln, sondern die *Gruppe der starren Bewegungen* betrachtet. Auf diesen von Helmholtz herrührenden Gedanken, der für eine ganze Richtung der geometrischen Forschung bahnbrechend war und angesichts der Relativitätstheorie eine erhöhte Aktualität

erlangt hat, geht Strohal mit keinem Worte ein.

Wenn nun so viele der von der Mathematik eingeschlagenen Wege zum Aufbau der Geometrie ausgeschaltet werden, so könnte man erwarten, daß die von Strohal so entschieden bevorzugte Begründungsweise uns als ein Muster der Methodik vorgeführt würde. Tatsächlich sind aber die Betrachtungen, durch welche Strohal, in Anlehnung an Lobatschefskij, die Methode darlegt, wie man von den Elementarbegriffen des Räumlichen, der Berührung und des In-sich-habens zur Unterscheidung der Dimensionen und zu den Begriffen Fläche, Linie, Punkt gelangt, von der Präzision, wie wir sie heute bei der Behandlung solcher topologischer Fragen gewöhnt sind, sehr weit entfernt; man kann an Hand dieser Ausführungen gar nicht feststellen, ob es überhaupt möglich ist, mit jenen drei Elementarbegriffen für die topologische Charakterisierung des Raumes auszukommen. –

Bisher haben wir nur den Teil der Ausführungen Strohals in Betracht gezogen, der von der geometrischen *Begriffsbildung* handelt. Der Standpunkt Strohals wird aber erst wirklich deutlich an seiner Auffassung von den *Grundsätzen* der Geometrie. Wesentlich für diese Auffassung ist, daß Strohal festhält an der Trennung der *κοιναὶ έννοιαι* (communes animi conceptiones) von den *αιτήματα* (postulata), wie sie sich in Euklids *Elementen* findet. Diese Unterscheidung erachtet Strohal als grundsätzlich bedeutsam, und er sieht in dem Abgehen von dieser einen wesentlichen Mangel der neueren Begründungen der Geometrie.

Hierzu ist zunächst zu bemerken, daß das Abweichen von Euklid in diesem Punkte nicht etwa aus bloßer Nachlässigkeit, sondern mit voller Absicht geschehen ist. Euklid stellt den *spezifisch geometrischen* Postulaten die unter dem Titel *κοιναὶ έννοιαι* zusammengefaßten Sätze der *Größenlehre* voran, als Sätze von höherer als geometrischer Allgemeinheit, welche auf die Geometrie *angewendet* werden sollen.

Die Art der Anwendung gibt aber Anlaß zu grundsätzlichen Einwänden, indem die Unterordnung der geometrischen Beziehungen unter die in den *κοιναὶ έννοιαι* auftretenden Begriffe verschiedentlich stillschweigend vorausgesetzt wird in Fällen, wo die Möglichkeit einer solchen Unterordnung ein keineswegs selbstverständliches geometrisches Gesetz darstellt.

Insbesondere hat in diesem Sinne Hilbert Kritik geübt an der Anwendung, die Euklid in der Lehre vom Flächeninhalt der ebenen Figuren von dem Grundsatz macht, daß das Ganze größer ist als der Teil, – eine Anwendung,
200*a* die nur dann gerechtfertigt wäre, wenn | man ohne weiteres voraussetzen dürfte, daß jeder geradlinig begrenzten ebenen Figur eindeutig eine *positive*

Größe als ihr Flächeninhalt zugeordnet werden kann (derart, daß kongruente Figuren denselben Inhalt haben und beim Aneinandersetzen von Flächen die Inhalte sich addieren)[4].

An der Betrachtung eines derartigen Falles erkennt man, daß bei der Anwendung der *κοιναὶ ἔννοιαι* der wesentliche Punkt immer in den Bedingungen der Anwendbarkeit liegt. Wenn diese Bedingungen als zutreffend erkannt sind, so wird die Anwendung des betreffenden Grundsatzes meist ganz überflüssig, ja mitunter gehört der durch Anwendung des allgemeinen Grundsatzes zu beweisende Satz selbst zu jenen Bedingungen der Anwendbarkeit.

Die Voranstellung der *κοιναὶ ἔννοιαι* erscheint somit als eine dauernde Versuchung zu logischen Fehlern und eher geeignet, den wahren geometrischen Sachverhalt zu verschleiern als ihn klarzustellen, und man ist deshalb von diesem Verfahren ganz abgekommen.

Strohal scheint von diesen Gedankengängen nichts zu wissen; jedenfalls geht er auf die Hilbertsche Kritik mit keiner Silbe ein. Er will die Trennung der beiden Arten von Grundsätzen von neuem zur Geltung bringen. Insbesondere erscheint ihm diese schon deshalb als erforderlich, weil nach seiner Ansicht die *κοιναὶ ἔννοιαι* einen ganz anderen Erkenntnischarakter besitzen als die Postulate, nämlich den von evidenten analytischen Sätzen, während die Postulate überhaupt nicht den Ausdruck einer Erkenntnis bilden, sondern uns nur *nahegelegt* werden durch gewisse Erfahrungen.

Strohal bezeichnet deshalb die *κοιναὶ ἔννοιαι* als die „eigentlichen Axiome“. Er sieht einen besonderen Erfolg seiner Theorie der geometrischen Begriffsbildung darin, daß sie den analytischen Charakter der *κοιναὶ ἔννοιαι* begreiflich mache. Diese Begreiflichkeit findet er darin, daß diese Axiome, als Sätze über je eine Elementarrelation, den Sinn einer *Anweisung* haben, aus welchen Relationsanschauungen man den Elementarbegriff abstrahieren muß, „um eben das betreffende Axiom zu einem identischen Satz zu machen“ (S. 70). Diese Charakterisierung besagt, daß die betrachteten Axiome auf Grund der inhaltlichen Auffassung der Elementarbegriffe logische Identitäten darstellen.

Es erscheint merkwürdig, daß solche geometrisch nichtssagenden Sätze als „eigentliche Axiome“ der Geometrie angesehen werden sollen, und man fragt

[4][1] Daß in der Tat diese Voraussetzung nicht immer erfüllt zu sein braucht, hat Hilbert an Hand der Konstruktion einer speziellen „nichtarchimedischen“ und „nichtpythagoräischen“ Geometrie gezeigt.

sich ferner, wozu überhaupt diese Sätze eigens als Grundsätze aufgestellt zu werden brauchen, nachdem doch die Elementarbegriffe inhaltlich eingeführt sind.

Zum Beispiel wird als eines von diesen Axiomen der Satz genannt, daß wenn a von b und b von c ununterscheidbar ist, auch a von c ununterscheidbar ist. Dieser Satz ist auf Grund der Bedeutung der „Ununterscheidbarkeit" eine Folge des rein logischen Satzes: wenn zwei Dinge a, b sich in Hinsicht auf das Zutreffen oder Nichtzutreffen eines Prädikates P gleich verhalten und ebenso b, c sich hierin gleich verhalten, dann verhalten auch a und c sich darin gleich.

Wir stehen hier vor folgender Alternative: entweder der Begriff „ununterscheidbar" wird in seiner inhaltlichen Bedeutung verwendet, dann haben wir einen rein logisch einzusehenden Satz vor uns, und es besteht kein Grund, einen solchen Satz als Axiom aufzuführen, da wir doch in der Geometrie
200*b* die Gesetze der Logik | ohnehin als selbstverständliche Grundlage betrachten. Oder aber der Begriff „ununterscheidbar" und ebenso die anderen Elementarbegriffe werden gar nicht inhaltlich angewendet, sondern es werden zunächst nur Begriffs*namen* eingeführt, über deren Bedeutung die Axiome gewisse *Anweisungen* geben. Dann befinden wir uns auf dem Standpunkt der formalen Axiomatik, und die *κοιναὶ έννοιαι* sind dann nichts anderes, als was man nach Hilbert *implizite Definitionen* nennt.

Daß dies auch tatsächlich die Auffassung Strohals ist – der sich freilich sorgsam hütet, den Terminus „implizite Definition" irgendeinmal zu gebrauchen –, dafür sprechen die Stellen, an denen er hervorhebt, daß die *κοιναὶ έννοιαι* keine „wirkliche Definition" bzw. keine „explizite Definition" einer Elementarrelation liefern (S. 68 und 72).

Von diesem Standpunkt ist es aber nicht angängig, den in Rede stehenden Axiomen den Charakter der *Evidenz* zuzuschreiben. Sie stellen dann einfach *formale Anforderungen* an gewisse, zunächst unbestimmte Relationen dar, und es besteht dann auch keine prinzipielle Nötigung, diese Axiome von den „Postulaten" abzusondern.

Also entweder ist überhaupt die Aufstellung der Axiome, welche nach Strohal die Rolle der *κοιναὶ έννοιαι* haben, überflüssig, oder die Absonderung dieser Axiome als analytisch evidenter Sätze von den übrigen Grundsätzen ist unberechtigt.

Außerdem aber finden wir in der Anwendung dieser Axiome bei Strohal dieselben Übelstände wieder, durch welche bereits die Euklidischen *κοιναὶ έννοιαι* in Mißkredit kamen: die Formulierung dieser Sätze, welche leicht mit geometrisch gehaltvollen Sätzen verwechselt wird, verführt zu logischen Fehlern, und solche werden auch wirklich begangen.

Zwei Fälle sind besonders charakteristisch, 1. Als Beispiel eines eigentlichen Axioms wird der Satz angeführt[5], daß bei einem „Schnitt“, d. h. bei der Berührung zweier aneinandergrenzender Teile eines Körpers (Raumgebildes) immer *zwei Seiten des Schnittes* zu unterscheiden sind (S. 64). Dieser Satz ist allerdings tautologisch, denn da als „Seiten“ des Schnittes die beiden aneinandergrenzenden Teile bezeichnet werden (S. 23), so besagt er nichts anderes, als daß, wenn zwei Teile eines Körpers einander berühren (aneinandergrenzen), zwei aneinandergrenzende Teile zu unterscheiden sind. Dieser Satz ist aber auch für die Geometrie ganz belanglos. Er scheint aber etwas geometrisch Bedeutsames zu besagen, weil man bei dem Wortlaut an einen anderen Satz denkt, der eine topologische Eigenschaft des Raumes zum Ausdruck bringt. Daß auch Strohal selbst vor Verwechslungen ähnlicher Art nicht sicher ist, zeigt folgendes Versehen. Er wirft (anläßlich der Erörterung des Kongruenzbegriffes) folgende Frage auf: „Ist es möglich, zwei Körper zu finden, die durch eine stetige Folge solcher Körper verbunden sind, welche eine und dieselbe Fläche gemeinsam haben, sich also alle in *einer* Fläche berühren?“ „Diese Frage“, so fährt er fort, „ist zu verneinen, denn aus der Erklärung der Fläche geht hervor, daß sich nur *zwei* Körper in einer und derselben Fläche berühren“ (S. 42–43).

2. Das berühmte Axiom: „Das Ganze ist größer als der Teil“, welches, wie erwähnt, für Euklid zur Quelle eines Fehlers wurde, wird von Strohal folgendermaßen gedeutet: Das Axiom weist auf einen Elementarbegriff „größer“
hin, „der durch Abstraktion an einem | zerteilten Körper gewonnen ist“. 201*a*
Der Abstraktionsvorgang ist dadurch charakterisiert, „daß jene Relation betrachtet wird, die zwischen der Gesamtheit aller Teilkörper (dem *Ganzen*) und einem von ihnen (dem *Teil*) besteht. Für den so gewonnenen Begriff ‚größer‘ ist der Satz ‚Totum parte maius est‘ ein identischer“ (S. 71). Wir wollen hier davon absehen, daß in dieser Deutung das „Ganze“ fälschlich mit der Gesamtheit aller Teilkörper identifiziert wird. Jedenfalls geht aus der Interpretation hervor, daß danach die Aussage „a ist größer als b“ nur ein anderer Ausdruck dafür ist, daß b ein Teil von a ist. Wir haben also wieder eine vollkommene Tautologie, aus der man für die Geometrie nichts entnehmen kann; insbesondere ist es unmöglich, daraus den Satz zu folgern, daß ein

[5][1] Bei diesem Beispiel knüpft Strohal an Betrachtungen von Lobatschefskij an.

Körper nicht einem seiner Teile kongruent sein kann, – was auch daraus hervorgeht, daß dieser Satz überhaupt nur unter bestimmten Einschränkungen allgemein gültig ist. (Zum Beispiel kann ja ein Halbstrahl durch kongruente Verschiebung in einen Teil, ebenso ein räumlicher Oktant durch kongruente Verschiebung in einen Teiloktanten übergehen.)

Tatsächlich müßte aber Strohal diesen Satz in irgendeiner Fassung für die Theorie der Kongruenz – die er freilich in dieser Hinsicht gar nicht ausführt – zur Verfügung haben. Denn sonst wäre gar nicht ausgemacht, ob nicht die „Ununterscheidbarkeit abgesehen vom Orte“ lediglich *topologische Gleichheit* bedeutete. In der Tat gehören ja in dem von Strohal zu$_a$$\underline{\text{ G}}_a$runde gelegten Begriffssystem die ersten drei Elementarbegriffe: Raumgebilde, Berührung, In-sich-haben, alle dem Bereich der topologischen Bestimmungen an, und durch den Kongruenzbegriff wird erst die *Metrik* in die Geometrie eingeführt. Der Begriff der Kongruenz muß also außer dem Momente der Übereinstimmung auch ein *neues Unterscheidungsmerkmal* enthalten. In dem Begriff der Ununterscheidbarkeit abgesehen vom Ort[6] ist aber ein solches Unterscheidungsmerkmal an sich nicht gegeben; dazu bedarf es noch eines Grundsatzes, zufolge dessen gewisse Gebilde, die zunächst nur als lagenmäßig, nicht aber topologisch verschieden bestimmt sind, auch *abgesehen vom Ort als unterscheidbar* erkannt werden können. Mit anderen Worten: es kommt darauf an, den *Größenunterschied* einzuführen. Hierzu müßte uns eigentlich der Grundsatz, daß das Ganze größer ist als der Teil, verhelfen. Das ist aber nicht möglich, wenn wir den Satz so deuten, wie Strohal es tut; denn aus dieser Deutung kann nicht entnommen werden, daß ein Gebilde a, welches größer als b ist, von diesem, auch abgesehen vom Orte, *unterscheidbar* ist.

Auf diesen Umstand hat wohl Strohal nicht geachtet; denn sonst wäre es ihm wohl aufgefallen, daß sein Begriff der Ununterscheidbarkeit abgesehen vom Ort noch gar nicht die geometrische Kongruenz liefert. Wir finden also hier eine ganz entsprechende Lücke wie in Euklids Lehre vom Flächeninhalt.

Das Ergebnis dieser Betrachtung ist, daß die Methode der Voranstellung der *κοιναὶ ἔννοιαι* durch die modifizierte Deutung, die ihr Strohal gibt, nur noch anfechtbarer wird und jedenfalls nicht als ein nachahmenswertes Vorbild erscheint.

Zugleich hat uns Strohals Charakterisierung dieser Axiome zu der Vermu-

[6][1] Der „Ort“ eines Körpers ist nach der Definition, die Strohal von Lobatschefskij, mit einer gewissen Abänderung, übernimmt (S. 24 und 93), gleichbedeutend mit der Begrenzung des Körpers.

tung geführt, daß er die inhaltliche Auffassung der Elementarbegriffe inner-
halb der Geo|metrie selbst gar nicht beibehält, bzw. von ihr für die geome- 201b
trischen Beweise keinen Gebrauch macht. In dieser Vermutung werden wir bestärkt durch das, was Strohal über die *Postulate* der Geometrie ausführt.

Zur Aufstellung der Postulate sind wir nach Strohal weder durch die Anschauung noch durch logische Gründe *gezwungen*, „sondern durch gewisse Erfahrungen veranlaßt" (S. 91). Für die reine Geometrie haben sie die Bedeutung von Festsetzungen; sie sind „Definitionsmittel für den geometrischen Raum, ihre Gesamtheit bildet die Definition des geometrischen Raumes" (S. 103). Inhaltlich werden sie charakterisiert als „Ausschließungen gewisser a priori möglicher Kombinationen von Elementarbegriffen" (S. 103).

Der Sinn dieser Charakterisierung ergibt sich aus der Auffassung, die Strohal von der deduktiven Entwicklung der Geometrie hat. Diese geschieht nach Strohal auf dem Wege einer fortschreitenden Kombination von Merkmalen, d. h. durch Bildung synthetischer Definitionen. Bei der Bildung der ersten Synthesen ist man nur an diejenigen Beschränkungen gebunden, die sich aus den *κοιναὶ ἔννοιαι* ergeben. „Im übrigen kann man bei der Kombination der Elementarbegriffe ganz willkürlich vorgehen", d. h. die Entscheidung, „ob man die Vereinigung bestimmter Elementarbegriffe zu einer Synthese vornehmen oder sie ausschließen will", ist durch Motive veranlaßt, „die außerhalb der reinen Geometrie liegen". „Indem man aber willkürlich das Bestehen einer bestimmten Kombination ausschließt, führt man einen Satz in die Geometrie ein, der für weitere Synthesen als Norm zu gelten hat. Derartige Sätze heißen Forderungen, *αιτήματα*, Postulate." „Bei der Bildung höherer Synthesen" muß man zeigen, daß diese „nicht in Widerspruch mit bereits aufgestellten Postulaten stehen. Man muß, wie man kurz sagt, für das definierte Gebilde die *Möglichkeit*, die *Existenz* nachweisen. Existenz und Möglichkeit bedeuten hier dasselbe und heißen nichts anderes als *Widerspruchslosigkeit* mit den Postulaten" (S. 98–99 und S. 102). An dieser Beschreibung des geometrischen Verfahrens fällt vor allem auf, daß hier, im Unterschied von allen bekannten Arten geometrischer Axiomatik, den Postulaten nur ein *negativer* Inhalt, nämlich der der Ausschließung von Möglichkeiten zugeschrieben wird, während alle geometrischen Existenzsätze bloß als Aussagen über Widerspruchslosigkeit gedeutet werden.

Diese Auffassung Strohals entspricht seiner philosophischen Schulrichtung, zu der als wesentlicher Bestand Brentanos Lehre vom Urteil gehört. Nach dieser sind alle allgemeinen Urteile negative Existentialurteile, von dem Inhalt, daß eine Urteilsmaterie (eine Kombination von Vorstellungsinhalten) verworfen (ausgeschlossen) wird.

In der Tat läßt sich jedes allgemeine Urteil auf diese logische Form bringen. Durch die Herstellung einer solchen Normalform wird aber das existentiale Moment nicht beseitigt, sondern nur in die Bildung der Urteilsmaterien verlegt.

So gelingt es auch in der Geometrie nicht, die Existenzbehauptungen gänzlich auszuschalten bzw. sie auf Behauptungen über Widerspruchslosigkeit zu reduzieren. Man kann nur durch doppelte Anwendung der Negation eine Existenzbehauptung verstecken. In dieser Weise verfährt z. B. Strohal, wenn er von einem $\alpha\iota\tau\eta\mu\alpha$ spricht, welches die Annahme ausschließt, „daß etwa irgendein mal bei der Teilung des geometrischen Körpers Kongruenz von Teilen nicht auftreten kann“ (S. 93). Ein ebensolches Beispiel finden
202*a* wir bei seiner Besprechung des Dedekindschen Stetig|keitsaxioms. Nachdem er von den Zerlegungen einer Strecke AB, welche die Schnitteigenschaft besitzen, und ferner von der Erzeugung eines Schnittes durch einen Punkt C gesprochen hat, fährt er fort: „Indem ich nun die Möglichkeit einer derartigen Zerlegung irgendeiner Strecke AB, bei der sich ein solcher Punkt *C nicht* fände, *ausschließe*, spreche ich das $\alpha\iota\tau\eta\mu\alpha$ der Stetigkeit für die Strecke aus“ (S. 113). Ob man von „Auftreten“, „sich Finden“ oder „Existenz“ spricht, kommt auf dasselbe hinaus. Und jedenfalls ist hier, wo es sich um die Aufstellung von Postulaten handelt, die Deutung der Existenz im Sinne der Widerspruchslosigkeit mit den Postulaten nicht angängig. Die Gleichsetzung von Existenz und Widerspruchslosigkeit ist in zweierlei Sinn berechtigt: erstens mit Bezug auf den geometrischen Raum, dessen Existenz in der Tat nur in der Widerspruchslosigkeit der ihn definierenden Postulate besteht, zweitens auch mit Bezug auf die geometrischen Gebilde, jedoch nur unter der Bedingung der *Vollständigkeit des Systems der Postulate*.

Wenn das System der Postulate vollständig ist, d. h. wenn durch die Postulate bereits für jede Kombination (jede Synthese) von Elementarbegriffen entschieden wird, ob sie zugelassen oder ausgeschlossen ist, dann fällt allerdings die Möglichkeit (Widerspruchslosigkeit) eines Gebildes mit seiner Existenz zusammen.

Solange man sich aber noch auf dem Wege zur Gewinnung eines Postulatensystems, d. h. zur schrittweisen Bestimmung des geometrischen Raumes befindet, muß man zwischen Existenz und Widerspruchslosigkeit unterscheiden. Aus dem Nachweis der Widerspruchslosigkeit einer Synthese folgt ja dann nur, daß diese mit den *bisher eingeführten* Postulaten im Einklang steht; es könnte uns dennoch freistehen, diese Synthese durch ein weiteres

Postulat auszuschließen. Ein *Existenzbeweis* dagegen besagt, daß wir durch die bisherigen Postulate bereits logisch *genötigt* sind, die betreffende Synthese zuzulassen.

Nehmen wir als Beispiel die „absolute Geometrie", welche aus der gewöhnlichen Geometrie durch Weglassung des Parallelen-Axioms entsteht. In dieser kann, ohne Widerspruch mit den Postulaten, ein Dreieck mit der Winkelsumme von einem Rechten angenommen werden; wollten wir hier Widerspruchslosigkeit mit Existenz gleichsetzen, so hätten wir den Satz: „Es existiert in der absoluten Geometrie ein Dreieck mit der Winkelsumme von einem Rechten." Dann müßte aber gleichermaßen der Satz gelten: „Es existiert in der absoluten Geometrie ein Dreieck mit der Winkelsumme von zwei Rechten." Demnach müßte in der absoluten Geometrie sowohl ein Dreieck mit der Winkelsumme von einem Rechten wie auch ein solches mit der Winkelsumme von zwei Rechten existieren. Diese Konsequenz widerspricht aber einem von Legendre bewiesenen Satz, wonach in der absoluten Geometrie aus dem Vorhandensein eines Dreiecks mit der Winkelsumme von zwei Rechten folgt, daß *jedes* Dreieck diese Winkelsumme hat.

Um also, wie es Strohal will, die Existenz der geometrischen Gebilde durch die Widerspruchslosigkeit mit den Postulaten charakterisieren zu können, muß man ein *vollständiges* System von Postulaten haben, bei welchem keine Entscheidung über die Zulassung einer Synthese mehr offensteht. Dieses Erfordernis der Vollständigkeit wird von Strohal nirgends erwähnt, und es geht auch aus seiner Schilderung des fortschreitenden Verfahrens der Bildung und Ausschließung von Synthesen gar nicht hervor, daß man auf diesem Wege überhaupt zum Abschluß gelangt.

| Abgesehen aber von all diesen Einwendungen, welche sich auf die beson- 202*b*
dere Art der Charakterisierung der Postulate und des fortschreitenden Verfahrens ihrer Gewinnung beziehen, ist vor allem zu bemerken, daß gemäß der Beschreibung, wie sie Strohal hier in dem Abschnitte über die Postulate von der Geometrie gibt, diese sich als reine Begriffskombinatorik herausstellt, – wie sie auch in der formalen Axiomatik nicht extremer durchgeführt werden kann: es werden Kombinationen der Elementarbegriffe durchprobiert; der Inhalt dieser Begriffe wird dabei gar nicht berücksichtigt, sondern nur gewisse diesen Inhalt vertretende Axiome, welche als erste Spielregeln fungieren. Ferner werden durch willkürliche Festsetzungen gewisse Kombinationen ausgeschlossen, und man sieht nun zu, was als möglich übrigbleibt.

Hier wird die Loslösung von der inhaltlichen Begriffsbildung ganz im selben Maße wie in der Hilbertschen Axiomatik vollzogen; die anfängliche inhaltliche Einführung der Elementarbegriffe kommt innerhalb dieser Entwicklung gar nicht zur Geltung; sie ist sozusagen eliminiert mit Hilfe der *κοιναὶ ἔννοιαι*.

Wir haben also hier – ähnlich wie in Euklids Begründung der Geometrie – den Sachverhalt, daß die inhaltliche Festlegung der Grundbegriffe gänzlich leerläuft, d. h. gerade denjenigen Sachverhalt, um dessentwillen man in der neueren Axiomatik der Geometrie von der inhaltlichen Fassung der Elementarbegriffe abgesehen hat.

Bei der Euklidischen Grundlegung ist aber die Sachlage insofern anders, als hier die Postulate noch in durchaus anschaulichem Sinn gefaßt werden. Besonders an den drei ersten Postulaten ist die enge Anlehnung an das geometrische Zeichnen ersichtlich. Die hier geforderten Konstruktionen sind ja nichts anderes als Idealisierungen zeichnerischer Prozesse. Diese inhaltliche Fassung der Postulate läßt diejenige Deutung zu, wonach die Postulate positive Existenzbehauptungen über anschaulich ersichtliche Möglichkeiten sind, die auf Grund des anschaulichen Inhaltes der Elementarbegriffe ihre Verifikation erhalten. Ein solcher Standpunkt *inhaltlicher Axiomatik* kommt für Strohal nicht in Betracht, da dieser eine anschaulich einsichtige Verifikation der Postulate für ausgeschlossen hält und daher den Postulaten nur den Charakter von Festsetzungen zuerkennen kann.

So endet Strohals Entwurf der geometrischen Axiomatik in einem Zwiespalt zwischen der anschaulichen Einführung der Begriffe und der ganz unanschaulichen Art, nach der das geometrische Lehrgebäude als reine Begriffswissenschaft, ausgehend von der durch die Postulate gegebenen Definition des geometrischen Raumes, entwickelt werden soll, – eine Diskrepanz, welche durch die zweifache Rolle der *κοιναὶ ἔννοιαι*, einerseits als analytisch einsichtiger Sätze, andererseits als erster beschränkender Bedingungen für die Begriffssynthesen, nur notdürftig verdeckt wird.

Angesichts dieses unbefriedigenden Ergebnisses fragt man sich, was denn Strohal für Gründe hat, den einfachen und konsequenten Standpunkt der Hilbertschen Axiomatik abzulehnen. Diese Frage ist um so mehr angebracht, als Strohal sehr wohl die Gründe kennt, die zu dem Hilbertschen Standpunkt hinleiten. So sagt er selbst: „Die Anschauungen, welche die causa occasionalis zur Bildung der Synthesen darstellen, gehen … nicht in dem Sinne in die Geometrie ein, daß man unmittelbar durch Berufung auf die Anschauung einen Satz als richtig erweisen könnte“; ferner kurz darauf: „Sobald die Axio-
203a me“ – Strohal meint hier nur die *κοιναὶ ἔννοιαι* – „formuliert sind, | hat die besondere Art der Elementarbegriffe keinen Einfluß mehr auf den Gang der

geometrischen Deduktion“ (S. 132–133).

In der Tat hat auch Strohal in seiner Polemik gegen die Hilbertsche Grundlegung der Geometrie, die sich im Schlußabschnitt seines Buches findet, nichts objektiv Stichhaltiges vorzubringen.

Sein Hauptargument ist hier, daß durch die Hilbertsche Auffassung der Axiomatik das inhaltliche Element nur auf die formalen Eigenschaften der Grundrelationen, also auf Relationen höherer Ordnung *zurückgeschoben* werde. Die in den Axiomen ausgedrückten formalen Anforderungen an die Grundrelationen seien doch ihrerseits inhaltlich aufzufassen und die hierzu erforderlichen inhaltlichen Vorstellungen könnten wiederum nur durch Abstraktion an entsprechenden Relationsanschauungen gewonnen werden. Man sei also doch hinsichtlich der höheren Relationen, die in den geforderten Eigenschaften der geometrischen Grundrelationen bestehen, „bei der Berufung auf die Anschauung angelangt, was ja gerade von der Axiomatik vermieden werden will“ (S. 129).

Diese Argumentation geht an dem wesentlichen Punkt vorbei. Was durch die Hilbertsche Axiomatik vermieden werden soll, ist die Berufung auf die *Raumanschauung*.

Der Sinn dieser Methode ist, daß an anschaulichem Inhalt nur dasjenige beibehalten wird, was *wesentlich* in die geometrischen Beweise *eingeht*. Durch die Erfüllung dieser Forderung machen wir uns von dem speziellen Vorstellungsbereich des Sachgebietes der Räumlichkeit los, und was wir an inhaltlicher Vorstellung benutzen, ist nur jene primitive Art von Anschauung, welche die elementaren Formen der Zusammensetzung diskreter begrenzter Objekte zum Gegenstand hat, und welche die gemeinsame Vorbedingung für jedes exakte wissenschaftliche Denken bildet – wie dies insbesondere Hilbert in seinen neueren Untersuchungen zur Grundlegung der Mathematik hervorgehoben hat[7].

Diese methodische Loslösung von der Raumanschauung ist nicht gleichzusetzen mit einem Ignorieren des raumanschaulichen Ausgangspunktes der Geometrie. Es ist auch damit nicht die Absicht verbunden – wie es Strohal darstellt – „so zu tun, als ob diese und gerade diese Axiome sich durch irgendeine innere Notwendigkeit zum System der Geometrie zusammengefunden hätten“ (S. 131). Vielmehr werden ja geflissentlich die Namen der räumlichen Gebilde und der räumlichen Verknüpfungen für die entsprechen-

[7][1] Vgl. insbesondere die Abhandlung „Neubegründung der Mathematik“ (*vide* [**?**]).

den Gegenstände und Beziehungen des Axiomensystems beibehalten, um den Zusammenhang mit den räumlichen Vorstellungen und Tatsachen zum sichtbaren Ausdruck zu bringen und dauernd gegenwärtig zu erhalten.

Die Unzulänglichkeit der Polemik Strohals zeigt sich insbesondere darin, daß er sich noch künstlich den Anlaß zu einer Einwendung schafft. Beim Referieren über das Verfahren des Nachweises der Widerspruchslosigkeit der geometrischen Axiome erklärt er: „Als Interpretation wählt man zu diesem Zweck z. B. die Begriffe der gewöhnlichen Geometrie; die Hilbertschen
203*b* Axiome verwandeln sich dadurch in gewisse | Sätze der gewöhnlichen Geometrie, deren Verträglichkeit, d. i. Widerspruchslosigkeit von anderer Seite her bereits feststeht. Oder man interpretiert die Symbole durch Zahlen oder Funktionen; dann gehen die Axiome in gewisse Beziehungen von Zahlen über, deren Verträglichkeit nach den Gesetzen der Arithmetik festgestellt werden kann“ (S. 127).

Die erste Art der Interpretation hat Strohal selbst hinzugefügt; bei Hilbert steht von einer Interpretation durch die „gewöhnliche Geometrie“ keine Silbe. Strohal scheut sich aber nicht, an diese eigenmächtig hinzugebrachte Erläuterung einen Einwand gegen Hilberts Methode zu knüpfen: „Wenn man etwa die Widerspruchslosigkeit von Hilbertschen Axiomen dadurch beweist, daß man ihre ‚Punkte‘, ‚Geraden‘, ‚Ebenen‘ als die Punkte, Geraden, Ebenen der Euklidischen Geometrie interpretiert, deren Widerspruchslosigkeit feststehe, so setzt man … diese Gebilde als von anderer Seite her definiert voraus“ (S. 130).

Im ganzen gewinnt man den Eindruck, daß Strohal sich gefühlsmäßig gegen die Annahme des Hilbertschen Standpunktes sperrt, aus einem Widerstand gegen die methodische Neuerung, welche der formale Standpunkt der Axiomatik gegenüber der inhaltlich-begrifflichen Einstellung bringt.

Dieses Verhalten zeigt aber Strohal nicht nur gegenüber der Hilbertschen Axiomatik, sondern gegen das meiste, was die neuere Wissenschaft an selbständigen, bedeutsamen Gedanken zu dem behandelten Thema beigesteuert hat. Dieser Geist der Feindseligkeit äußert sich in dem vorliegenden Buch nicht nur durch die Verteilung von Lob und Tadel, sondern noch mehr darin, daß wesentliche Leistungen, Gedanken und Ergebnisse einfach verschwiegen werden. So übergeht Strohal (wie schon früher bemerkt) die berühmte Untersuchung von Helmholtz, die doch im engsten Sinne das vorliegende Thema betrifft, desgleichen auch Kants Lehre von der Raumanschauung, gänzlich mit Stillschweigen. Und was den strengen mathematischen Beweis für die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms von den übrigen geometrischen Axiomen betrifft, so stellt Strohal es geradezu so dar, als ob hier noch ein ungelöstes Problem vorläge: „Endgültig geklärt ist die Frage erst, wenn man zeigt, daß eine Konsequenz aus den übrigen Postulaten niemals mit einer Ablehnung des Parallelenpostulates in Kollision geraten *kann*“ (S. 101). Und diese Äußerung ist nicht etwa durch Unkenntnis zu erklären; denn, wie aus anderen Stellen hervorgeht, hat Strohal Kenntnis von Kleins projektiver Maßbestimmung und kennt auch (aus dem Referat von Wellstein) die Poincarésche Darstellung der nichteuklidischen Geometrie durch die Kugelgeometrie im Euklidischen Raum. Die Erklärung liegt vielmehr nur in der oppositionellen Gefühlseinstellung Strohals, der sich dagegen sträubt, die großen Leistungen der neueren Mathematik in ihrer Bedeutung zu würdigen.

So kann ein unkundiger Leser aus Strohals Buch nur ein Zerrbild von der Entwicklung der geometrischen Wissenschaft empfangen. Wer aber über unsere heutige Wissenschaft orientiert ist, dem kann das verunglückte Unternehmen Strohals, in Anbetracht der verschiedenen darin zusammenwirkenden methodischen Tendenzen, zum Anlaß werden, die prinzipiellen Fragen der Axiomatik noch einmal durchzudenken.

Kapitel 7

Bernays Project: Text No. 9

Die Philosophie der Mathematik und die Hilbertsche Beweistheorie (1930)

The Philosophy of Mathematics and Hilbert's Proof Theory

(*Blätter für deutsche Philosophie* 4, 1930–1931, S. 326–367;
repr. in *Abhandlungen*, S. 17–61)

I. Teil: Das Wesen der mathematischen Erkenntnis

326/A17 | Wenn wir heute von der Grundlagenkrisis in der Mathematik oder von dem Streit zwischen „Formalismus“ und „Intuitionismus“ lesen und hören, so kann derjenige, der mit dem Betriebe der mathematischen Wissenschaft nicht vertraut ist, auf den Gedanken kommen, als sei diese Wissenschaft von Grund auf erschüttert. In Wirklichkeit bewegt sich die Mathematik jetzt schon seit langem in einem dermaßen glatten Fahrwasser, daß man eher einen Mangel an stärkeren Sensationen verspürt, obwohl es an bedeutenden systematischen Fortschritten und $_{d_2}\underline{\text{an}}_{d_2}$ glänzenden Leistungen durchaus nicht fehlt.

Tatsächlich entspringt die gegenwärtige Diskussion über die Grundlagen der Mathematik auch gar nicht einer Notlage der Mathematik selbst. Diese befindet sich in einem völlig befriedigenden Zustande methodischer Sicherheit. Insbesondere ist die Beunruhigung durch die Paradoxien der Mengenlehre längst überwunden, seitdem man erkannt hat, daß zur Vermeidung der angetroffenen Widersprüche solche Beschränkungen ausreichen, welche die Ansprüche der mathematischen Theorien an die Mengenlehre nicht im geringsten antasten.

Die Problematik, die Schwierigkeiten und Meinungsverschiedenheiten beginnen vielmehr erst da, wo man nicht einfach nach den mathematischen Tatsachen, sondern nach den Erkenntnisgründen und nach der Abgrenzung der Mathematik fragt. Diese Fragen philosophischen Charakters haben eine besondere Dringlichkeit erhalten seit der Wandlung, welche die methodische Einstellung der Mathematik gegen Ende des 19. Jahrhunderts erfuhr.

Die kennzeichnenden Momente dieser Wandlung sind: das Vordringen des Mengenbegriffs, mit Hilfe dessen die strenge Begründung der Infinitesimalrechnung gelang, und ferner das Aufkommen der existentialen Axiomatik, d. h. der Methode der Entwicklung einer mathematischen Disziplin als Lehre von einem System von Dingen mit bestimmten Verknüpfungen, deren Eigenschaften den Inhalt der Axiome bilden. Dazu tritt noch, als Folge der beiden genannten | Momente, die Herstellung einer engeren Verbindung zwischen A18
Mathematik und Logik.

| Diese Entwicklung stellte die Philosophie der Mathematik vor eine völlig 327
neue Situation und vor ganz neue Einsichten und Probleme. Die Diskussion über die Grundlagen der Mathematik ist von da an nicht zur Ruhe gekommen. In dem gegenwärtigen Stadium dieser Diskussion steht im Vordergrund die Auseinandersetzung mit den Schwierigkeiten, welche durch die Rolle des Unendlichen in der Mathematik verursacht werden.

Das Problem des Unendlichen bildet aber nicht die erste und auch nicht die allgemeinste Frage, mit der man sich in der Philosophie der Mathematik auseinanderzusetzen hat. Hier handelt es sich zunächst darum, überhaupt Klarheit darüber zu gewinnen, worin das Spezifische der mathematischen Erkenntnis besteht. Wir wollen uns zuerst mit dieser Frage befassen und uns dabei – wenn auch nur in groben Zügen und ohne eine genau chronologische Anordnung – die Entwicklung der Ansichten in Erinnerung rufen.

§ 1 Die Entwicklung der Auffassungen von der Mathematik

Die ältere Auffassung von der mathematischen Erkenntnis ging aus von der Zweiteilung der Mathematik in Arithmetik und Geometrie; für sie war die Mathematik charakterisiert als Lehre von zweierlei bestimmten Sachgebieten, dem der Zahlen und dem der geometrischen Figuren. Diese Zweiteilung ließ sich aber schon angesichts des Vordringens der arithmetischen Methode in der Geometrie nicht halten. Auch begnügte sich die Geometrie keineswegs damit, die Eigenschaften von Figuren zu studieren, sondern erweiterte sich zu einer allgemeinen Theorie der Mannigfaltigkeiten. Die völlig veränderte Situation der Geometrie fand einen besonders prägnanten Ausduck in Kleins Erlanger Programm, welches die verschiedenen Zweige der Geometrie unter dem Gesichtspunkt einer gruppentheoretischen Aufgabestellung systematisch zusammenfaßte.

Angesichts dieser Sachlage ergab sich die Möglichkeit, die Geometrie in die Arithmetik einzuordnen, und da die strenge Begründung der Infinitesimalrechnung durch Dedekind, Weierstraß und Cantor die allgemeineren Zahlbegriffe, wie sie die mathematische Größenlehre erfordert (rationale Zahl, reelle Zahl), auf die gewöhnlichen („natürlichen") Zahlen 1, $2_{a,a}$ … zurückführte, so bildete sich die Auffassung, daß die natürlichen Zahlen das wahre Objekt der Mathematik bilden und daß die Mathematik eben in der *Lehre von den Zahlen* bestehe.

A19 | Diese Auffassung hat viele Anhänger. Für sie spricht der Umstand, daß alle mathematischen Gegenstände sich repräsentieren lassen durch Zahlen oder Zahlenkombinationen oder durch höhere Mengenbildungen, welche von der Zahlenreihe aus gewonnen werden. In grundsätzlicher Hinsicht ist aber
328 die | Charakterisierung der Mathematik als Lehre von den Zahlen schon darum unbefriedigend, weil dabei offen bleibt, was man denn als das Wesentliche an der Zahl betrachtet. Die Frage nach der Natur der mathematischen Erkenntnis wird hiermit verschoben auf die Frage nach der Natur der Zahlen.

Jedoch erscheint diese Frage den ausgesprochenen Vertretern der Auffassung von der Mathematik als der Wissenschaft von den Zahlen als gänzlich müßig. Diese gehen von der Einstellung aus, wie sie dem mathematischen Denken die geläufige ist, daß nämlich die Zahlen eine Gattung von Dingen bilden, die ihrer Art nach uns völlig vertraut sind, dermaßen, daß eine Antwort auf die Frage nach der Natur der Zahlen nur darin bestehen könnte, etwas Bekanntes auf etwas weniger Bekanntes zurückzuführen. Den Grund für die Sonderstellung der Zahlen erblickt man von diesem Standpunkt aus darin, daß die Zahlen einen wesentlichen Bestandteil der Weltordnung ausmachen$_{a_1,a_1}$ die uns eben gerade in dem Maße streng wissenschaftlich verständlich ist, wie sie durch das Moment der Zahl beherrscht wird.

Dieser Ansicht, wonach die Zahl etwas ganz Absolutes und Letztes ist, trat bald, in der schon erwähnten Epoche der Ausbildung der Mengenlehre und der Axiomatik, die ganz andere Auffassung entgegen, welche eine besondere, eigentümliche Art der mathematischen Erkenntnisweise überhaupt bestreitet und die Behauptung vertritt, daß die Mathematik *aus reiner Logik* zu gewinnen sei. Zu dieser Auffassung wurde man naturgemäß hingeführt einerseits durch die Axiomatik und andererseits auch von der Mengenlehre aus.

Die neue methodische Wendung in der Axiomatik bestand in der Hervorkehrung der Tatsache, daß für die Entwicklung einer axiomatischen Theorie der Erkenntnischarakter ihrer Axiome gleichgültig ist. Die strenge Axiomatik verlangt, daß in den Beweisen keine anderen Erkenntnisse aus dem zu behandelnden Sachgebiet benutzt werden als die, welche ausdrücklich in den Axiomen formuliert sind. So ist schon bei Euklid die Axiomatik gemeint, wenn auch an gewissen Stellen das Programm nicht restlos durchgeführt ist.

Gemäß dieser Forderung wird durch die Entwicklung einer axiomatischen Theorie die logische Abhängigkeit der Lehrsätze von den Axiomen dargetan. Für diese logische Abhängigkeit ist es aber gleichgültig, ob die vorangestellten Axiome wahre Sätze sind oder nicht; sie stellt einen | rein hy- A20
pothetischen Zusammenhang dar: wenn es sich so verhält, wie die Axiome aussagen, dann gelten die Lehrsätze. Eine solche Loslösung der Deduktion von der Behauptung der Wahrheit der Ausgangssätze ist keineswegs eine müßige Spitzfindigkeit. Vielmehr kann eine axiomatische Entwicklung von Theorien, die ohne Rücksicht auf die Wahrheit der zum Ausgang genommenen Grundsätze erfolgt, für unsere wissenschaftliche | Erkenntnis von hohem 329
Wert sein, indem auf diese Weise einerseits Annahmen, deren Zutreffen zweifelhaft ist, durch die systematische Verfolgung ihrer logischen Konsequenzen einer Prüfung an Hand der Tatsachen zugänglich gemacht werden und ferner die *Möglichkeiten der Theorienbildung* a priori, nach Gesichtspunkten der systematischen Einfachheit, gleichsam auf Vorrat durch die Mathematik erforscht werden können. Mit der Entwicklung solcher Theorien übernimmt die Mathematik die Rolle derjenigen Disziplin, welche man früher als *mathematische Naturphilosophie* bezeichnete.

Indem man nun bei einem Axiomensystem von der Wahrheit der Axiome ganz absieht, wird auch die inhaltliche Auffassung der Grundbegriffe irrelevant, und man kommt so dazu, überhaupt *von allem anschaulichen Inhalt der Theorie zu abstrahieren.* Diese Abstraktion wird noch unterstützt durch ein zweites Moment, das in der neueren Axiomatik, wie sie vor allem in Hilberts

Grundlagen der Geometrie zur Ausbildung gelangte, noch hinzukommt und welches überhaupt für die Gestaltung der neueren Mathematik wesentlich ist, nämlich die *existentiale* Fassung der Theorie.

Während Euklid sich die zu betrachtenden Figuren immer konstruiert denkt, geht die heutige Axiomatik aus von der Vorstellung eines von vornherein festliegenden *Systems von Dingen.* Man denkt sich z. B. in der Geometrie die Punkte, Geraden und Ebenen in ihrer Gesamtheit als ein solches System von Dingen. Innerhalb dieses Systems denkt man die Beziehungen der Inzidenz (das Liegen eines Punktes auf einer Geraden bzw. in einer Ebene), des Zwischenliegens (ein Punkt liegt zwischen zwei andern) und der Kongruenz als von vornherein bestimmt. Diese Beziehungen können nun, ohne Rücksicht auf ihre anschauliche Bedeutung, rein abstrakt als gewisse *Grundprädikate* charakterisiert werden. (Den Terminus „Prädikat“ wollen wir auch im Falle einer Beziehung zwischen mehreren Gegenständen anwenden, so daß wir auch von Prädikaten mit mehreren Subjekten sprechen.[1])

A21 | So tritt nun z. B. an die Stelle des euklidischen Konstruktions-Postulates, welches die Möglichkeit der Verbindung zweier Punkte durch eine Gerade fordert, im Hilbertschen System das Existenzaxiom: Zu zwei Punkten gibt es stets eine Gerade, die mit jedem der beiden Punkte zusammengehört. „Zusammengehören“ ist hier der abstrakte Ausdruck für die Inzidenz.

330 | Im Sinne dieser Auffassung der Axiomatik stellen sich sowohl die Axiome wie die Lehrsätze einer axiomatischen Theorie als Aussagen über ein oder mehrere Prädikate dar, welche sich auf die Dinge eines zu$_a$ G$_a$runde gelegten Systems beziehen, und die Erkenntnis, welche uns der Beweis eines Lehrsatzes L liefert, der mit Hilfe der Axiome $A_1 \ldots A_k$ geführt ist – wir wollen der Einfachheit halber annehmen, daß darin nur von *einem* Prädikat die Rede sei –, besteht in der Feststellung, daß, wenn für ein Prädikat die Aussagen $A_1 \ldots A_k$ zutreffen, dann auch die Aussage L darauf zutrifft.

Was wir hier vor uns haben, ist aber ein ganz allgemeiner Satz über Prädikate, d. h. ein Satz der reinen Logik. In dieser Weise stellen sich die Ergebnisse einer axiomatischen Theorie, im Sinne der rein hypothetischen und existentialen Fassung der Axiomatik, als *Sätze der Logik* dar.

Diese Sätze sind allerdings nur dann von Bedeutung, wenn die in den

[1] Diese Bezeichnungsweise entspricht einem Vorschlag von Hilbert. Sie bietet gegenüber der üblichen Unterscheidung zwischen „Prädikaten“ und „Relationen“ für die Auffassung des prinzipiell Logischen gewisse Vorteile und steht auch mit dem gewöhnlichen Sinne des Wortes „Prädikat“ im Einklang.

Axiomen formulierten Anforderungen sich überhaupt durch ein System von Dingen mit gewissen auf sie bezogenen Prädikaten erfüllen lassen. Ist eine solche Erfüllung undenkbar, d. h. logisch unmöglich, so führt das Axiomensystem zu gar keiner Theorie, und die einzige logisch belangvolle Aussage über das System ist dann die Feststellung des aus den Axiomen sich ergebenden Widerspruchs. Aus diesem Grunde besteht für jede axiomatische Theorie die Erforderlichkeit eines Nachweises der *Erfüllbarkeit*, d. h. der *Widerspruchsfreiheit* ihrer Axiome.

Dieser Nachweis geschieht nun im allgemeinen, sofern man nicht mit direkten endlichen Modell-Konstruktionen auskommt, durch die Methode der *Zurückführung auf die Arithmetik*, d. h. dadurch, daß man innerhalb des Bereiches der Arithmetik Gegenstände und Beziehungen aufweist, welche die zu untersuchenden Axiome erfüllen. Hiermit wird man von neuem vor die Frage nach dem Erkenntnischarakter der Arithmetik gestellt.

Noch ehe diese Frage in dem geschilderten Zusammenhang mit der | Axio- A22
matik akut wurde, hatte bereits die Mengenlehre und die Logistik in neuartiger Weise zu ihr Stellung genommen. Cantor zeigte, daß der Zahlbegriff sowohl im Sinne der Kardinalzahl (Anzahl) wie im Sinne der Ordinalzahl (Ordnungszahl) sich auf unendliche Mengen ausdehnen läßt. Die Theorie der natürlichen Zahlen und die Theorie der Maßzahlen (die Analysis) wurden als Teilgebiete in die allgemeine Mengenlehre eingeordnet. Büßte hiermit die natürliche Zahl von ihrer ausgezeichneten Rolle Wesentliches ein, so bildete doch auch für den Standpunkt Cantors die Reihe der Zahlen etwas unmittelbar Gegebenes, von dessen Betrachtung die Mengenlehre ihren Ausgang nahm.

| Hierbei blieb man aber nicht stehen, vielmehr gingen die Logiker bald zu 331
der weitergehenden Behauptung über: die Mengen sind nichts anderes als Begriffsumfänge und die Mengenlehre ist gleichbedeutend mit der Umfangs-Logik, insbesondere ist auch die Lehre von den Zahlen aus reiner Logik abzuleiten.

Mit dieser These, daß die Mathematik aus reiner Logik zu gewinnen sei, wurde ein alter Lieblingsgedanke der rationalen Philosophie wieder aufgenommen, der durch die Kantische Lehre von der reinen Anschauung zurückgedrängt worden war.

Nun zeigte ohnehin schon die Entwicklung der Mathematik und der theoretischen Physik, daß die Kantische Theorie der Erfahrung jedenfalls einer grundsätzlichen Revision bedurfte, und den radikalen Gegnern der Philosophie Kants schien jetzt der Moment gekommen, diese Philosophie bereits in ihrer Anfangs-These, nämlich der Behauptung des synthetischen Charakters der Mathematik, zu entkräften.

Dieses ist aber doch nicht restlos gelungen. Ein erstes Symptom dafür, daß der Sachverhalt schwieriger und verwickelter war, als die Führer der logistischen Bewegung ihn sich dachten, zeigte sich in der Entdeckung der berühmten *mengentheoretischen Paradoxien*. Diese Entdeckung bildete historisch das Signal zum Einsetzen der Kritik. Wenn wir heute den Sachverhalt philosophisch erörtern wollen, so ist es befriedigender, die Überlegung direkt, ohne Heranziehung des dialektischen Argumentes der Paradoxien zu führen.

§ 2 Das mathematische Element in der Logik. – Die Fregeschen Anzahldefinitionen

Wir brauchen in der Tat, um auf die wesentlichen Gesichtspunkte zu kommen, nur die neue Disziplin der theoretischen Logik, das Gedankenwerk
A23 der großen Logiker Frege, Schröder, Peano, Russell selbst zu | betrachten und zuzusehen, was sie uns über das Verhältnis des Mathematischen zum Logischen lehrt.

Es zeigt sich da sogleich eine eigenartige Doppelseitigkeit dieses Verhältnisses, welche sich schon an einer verschiedenartigen Fassung der Aufgabe der theoretischen Logik kundtut: während Frege bestrebt ist, die mathematischen Begriffe den Begriffsbildungen der Logik unterzuordnen, sucht Schröder umgekehrt den mathematischen Charakter der logischen Beziehungen hervorzukehren und entwickelt seine Theorie als eine „Algebra der Logik“.

Doch besteht der Unterschied hier nur in der Betonung. In den verschiedenen Systemen der Logistik finden wir nirgends den spezifisch logischen Gesichtspunkt als allein beherrschend, sondern überall von vornherein mit
332 mathe|matischer Betrachtungsweise durchsetzt. Der mathematische Formalismus und die mathematische Begriffsbildung erweist sich hier in ganz analoger Weise wie im Gebiete der theoretischen Physik als das sachgemäße Hilfsmittel zur Darstellung der Zusammenhänge und zur Gewinnung eines systematischen Überblicks.

Allerdings ist es nicht der gewöhnliche Formalismus der Algebra und der Analysis, der hier angewandt wird, sondern ein neu geschaffener Kalkül, den die theoretische Logik an Hand der Formelsprache entwickelt, mit der sie die logischen Verknüpfungen darstellt. Daß dieser Kalkül und seine Theorie einen ausgesprochen mathematischen Charakter hat, darüber wird niemand, der ihn kennt, im Zweifel sein.

An diesem Sachverhalt stellt sich zunächst das Erfordernis heraus, den Begriff des Mathematischen unabhängig von dem faktischen Bestande an mathematischen Disziplinen durch eine grundsätzliche Charakterisierung der mathematischen Erkenntnisart abzugrenzen. Wenn wir dem nachgehen, was wir unter dem mathematischen Charakter einer Betrachtung verstehen, so zeigt sich, daß das Kennzeichnende in einer bestimmten Art der Abstraktion liegt, die dabei zur Geltung kommt. Diese Abstraktion, welche als die *formale* oder *mathematische Abstraktion* bezeichnet werden möge, besteht darin, daß von einem Gegenstand – „Gegenstand" hier im weitesten Sinne genommen – die strukturellen Momente, d. h. die Art seiner Zusammensetzung aus Bestandteilen hervorgekehrt und ausschließlich in Betracht gezogen wird. Man kann demnach als mathematische Erkenntnis eine solche definieren, welche auf der *strukturellen* Betrachtung von Gegenständen beruht.

Was uns nun des weiteren die Beschäftigung mit der theoretischen Logik lehrt, das ist, daß in der Beziehung von Mathematik und Logik die mathematische Betrachtungsweise gegenüber der inhaltlich logischen | unter Umständen den Standpunkt der höheren Abstraktion bildet. Die schon erwähnte Analogie der theoretischen Logik zur theoretischen Physik erstreckt sich auch darauf, daß gerade so, wie die mathematische Gesetzlichkeit der theoretischen Physik durch ihre physikalische Deutung inhaltlich spezialisiert wird, auch die mathematischen Beziehungen der theoretischen Logik durch ihre inhaltlich logische Deutung eine Spezialisierung erfahren. *Die Gesetzlichkeit der logischen Beziehungen erscheint hier als ein spezielles Modell für einen mathematischen Formalismus.* A24

Dieses eigentümliche Verhältnis zwischen Logik und Mathematik, daß nicht nur die mathematischen Urteile und Schlüsse einer logischen Abstraktion, sondern auch die logischen Beziehungen einer mathematischen Abstraktion unterworfen werden können, hat seinen Grund in der Sonderstellung, die das Sachgebiet | des Formalen gegenüber der Logik einnimmt. Während nämlich sonst von den spezifischen Bestimmungen eines jeden Sachgebietes in der Logik abstrahiert werden kann, ist das bei dem Gebiete des Formalen nicht möglich, weil *in die Logik selbst formale Momente wesentlich eingehen.* 333

Dieses gilt insbesondere für das *logische Schließen.* Die theoretische Logik lehrt, daß man einen logischen Beweis „formalisieren" kann. Die Methode der Formalisierung besteht darin, daß zunächst die Ausgangssätze des Beweises mit Hilfe der logischen Formelsprache durch gewisse Formeln dargestellt werden und ferner die Prinzipien des logischen Schließens durch Regeln ersetzt werden, welche bestimmte Verfahren angeben, gemäß denen man von gegebenen Formeln zu weiteren Formeln gelangt. Das Ergebnis des Beweises stellt sich dar durch eine Endformel, welche auf $_a\underline{\text{G}}_a$rund der Deutung der logischen Formelsprache den zu beweisenden Satz wiedergibt.

Hierbei kommt zur Geltung, daß alles logische Schließen, seinem Verlaufe nach betrachtet, auf eine begrenzte Anzahl von logischen Elementarprozessen zurückführbar ist, die sich genau und vollständig aufzählen lassen. Dadurch wird es möglich, die Fragen der *Beweisbarkeit* systematisch zu verfolgen. Es ergibt sich hier ein Feld der theoretischen Forschung, innerhalb dessen die in der traditionellen Logik aufgestellte Lehre von den verschieden möglichen Formen der kategorischen Schlüsse nur ein ganz spezielles Sonderproblem behandelt.

Der typisch mathematische Charakter der Theorie der Beweisbarkeit gibt sich besonders deutlich durch die Rolle der logischen *Symbolik* kund. Die Symbolik ist hier das *Hilfsmittel zum Vollzuge der formalen Abstraktion.* Der
A25 Übergang von der inhaltlich logischen zu der | formalen Einstellung findet in der Weise statt, daß wir von der ursprünglichen Bedeutung der logischen Symbole absehen und die Symbole selbst zu $_{a1}$<u>*Repräsentanten*</u>$_{a1}$ formaler Objekte und Verknüpfungen machen.

Wird z. B. die hypothetische Beziehung

„wenn A, so B"

symbolisch durch

$$A \to B$$

wir von jener Bedeutung des Symbols $\to$ abstrahieren und die Verknüpfung durch das „Zeichen" $\to$ selbst als das zu Betrachtende nehmen. Hiermit tritt allerdings an die Stelle der ursprünglichen inhaltlichen Spezialisierung der Verknüpfung eine figürliche Spezialisierung; diese ist aber insofern unschädlich,
334 als sie ohne weiteres als ein unwesentliches Moment erfaßt wird. | Das mathematische Denken vollzieht eben an Hand der Symbolfigur die formale Abstraktion.

Die Methode der formalen Betrachtung ist hier nun nicht etwa künstlich herangebracht, sondern sie stellt sich fast zwangsmäßig ein, wenn man das logische Schließen in Hinsicht auf seine Auswirkung näher verfolgen will.

Überlegen wir nun, woran es denn liegt, daß die Untersuchung des logischen Schließens so sehr der mathematischen Methode bedarf, so finden wir folgenden Sachverhalt. Im Beweisen kommen zwei wesentliche Momente zur Zusammenwirkung: das Klarlegen der Begriffe, das Moment der *Reflexion* und das mathematische Moment der *Kombination*.

Soweit das Schließen nur auf der Klarlegung der Bedeutungen beruht, ist es im engsten Sinne analytisch; das Fortschreiten zu etwas Neuem kommt erst durch mathematische Kombination zustande.

Dieses kombinatorische Element erscheint leicht als so selbstverständlich, daß es gar nicht als besonderer Faktor beachtet wird. In der Philosophie besonders pflegte man immer nur dasjenige an einer deduktiv gewonnenen Erkenntnis als erkenntnistheoretisch problematisch und der Erörterung bedürftig anzusehen, was für den Beweis das Vorgegebene ist: die Ausgangssätze und die Regeln des Schließens. Dieser Standpunkt ist aber für das philosophische Verständnis der Mathematik unzulänglich; denn die typische Leistung eines mathematischen Beweises setzt gerade erst ein, nachdem die Ausgangssätze und die Schlußregeln schon festliegen, und das Erstaunliche der mathematischen Ergebnisse schwindet nicht, wenn wir die beweisbaren Sätze inhaltlich dadurch modifizieren, daß wir die obersten Voraussetzungen der Theorie | als Prämissen einführen und außerdem auch noch die Regeln des A26
Schließens, im Sinne des formalen Standpunktes, ausdrücklich angeben.

Zur Verdeutlichung des Sachverhaltes kann uns der von Weyl angestellte Vergleich eines rein formal geführten Beweises mit einem Schachspiel dienen; den Ausgangssätzen beim Beweise entspricht die Ausgangsstellung im Spiel, den Regeln des Schließens entsprechen die Spielregeln. Nehmen wir nun an, ein scharfsinniger Schachmeister habe für eine gewisse Anfangsstellung A die Möglichkeit entdeckt, in 10 Zügen den Gegner mattzusetzen. Vom Standpunkt der üblichen Betrachtungsweise müssen wir dann sagen, daß diese Möglichkeit *logisch* durch die Anfangsstellung und die Spielregeln bestimmt ist. Andererseits kann man aber doch nicht behaupten, daß in der Angabe der Anfangsstellung A und der Spielregeln die Behauptung, daß in 10 Zügen mattgesetzt werden kann, sinnesmäßig enthalten ist. Der Anschein eines Widerspruches zwischen diesen Behauptungen schwindet, wenn | wir uns 335
klarmachen, daß die „logische“ Auswirkung der Spielregeln auf *Kombination* beruht und sich daher nicht durch bloße Bedeutungsanalyse$_{a_2 , a_2}$ sondern nur durch wirkliche Vorführung herausstellt.

Eine Vorführung in diesem Sinne ist aber jeder mathematische Beweis. Es sei hier an einem einfachen Spezialfall dargelegt, wie sich das kombinatorische Element in einem Beweise geltend macht.

Wir haben die Schlußregel: „wenn A ist und wenn aus A folgt B, so ist B“.

Bei einem ins Formale übersetzten Beweise entspricht diesem Schlußprinzip die Regel, daß aus zwei Formeln A, $A \to B$ die Formel B entnommen werden kann. Nun werde in einer formalen Ableitung diese Regel angewandt, und zwar wollen wir annehmen, daß A und $A \to B$ nicht zu den Ausgangsformeln gehören. Dann haben wir eine Schlußreihe S, die zu A führt, und eine solche T, die zu $A \to B$ führt; und nun liefern die Formeln A, $A \to B$ gemäß der genannten Regel die Formel B.

Wollen wir zergliedern, was hier vorgeht, so müssen wir uns hüten, durch die Art der Bezeichnung den entscheidenden Punkt vorwegzunehmen. Nämlich die Endformel der Schlußreihe T ist zunächst nur als solche bestimmt, und es ist für die Erkenntnis ein neuer Schritt, daß die Übereinstimmung dieser Formel mit derjenigen festgestellt wird, welche aus der anderweit erhaltenen Formel A und der abzuleitenden Formel B durch Zusammenfügen mittels „$\to$" entsteht.

Die Feststellung einer Identität ist keineswegs immer eine identische (tautologische) Feststellung. Die im vorliegenden Falle zu konstatierende Übereinstimmung kann nicht direkt aus dem Inhalt der formalen Schlußregeln und
A27 aus der Struktur der Ausgangsformeln ab|gelesen werden, sondern ist ablesbar erst aus derjenigen Struktur, welche durch die Anwendung der Schlußregeln, d. h. durch die Ausführung der Schlüsse gewonnen wird. Es liegt also hier tatsächlich ein kombinatorisches Element vor.[2]

Wenn wir uns in dieser Weise die Rolle des Mathematischen in der Logik klarmachen, so wird uns die Möglichkeit einer Einordnung der Arithmetik in das System der theoretischen Logik nicht erstaunlich erscheinen. Aber diese Einordnung verliert auch für unseren gewonnenen Standpunkt ihre erkenntnistheoretische Bedeutsamkeit. Denn wir wissen im voraus, daß durch die Einfügung der Arithmetik in die logische Systematik das formale Element
336 nicht | beseitigt wird. In Hinsicht auf das Formale stellt aber, wie wir fanden, die mathematische Betrachtung gegenüber der begrifflich logischen den Standpunkt der höheren Abstraktion dar. Wir können also für die mathematischen Erkenntnisse durch ihre Einordnung in die Logik gar keine höhere Allgemeinheit gewinnen, sondern vielmehr umgekehrt nur eine *Spezialisie-*

[2]Die Behauptung, daß das logische Schließen „synthetische Elemente" enthält, hat P. Hertz in seiner Schrift *Über das Denken* (*vide* [**?**]) vertreten. Seine Begründung dieser Behauptung, welche in einer demnächst erscheinenden Abhandlung über das Wesen des Logischen dargelegt wird, enthält den hier erörterten Gesichtspunkt, beruht aber außerdem noch auf anderen Überlegungen.

rung durch logische Interpretation, d. h. eine Art von *logischer Einkleidung.*

Ein typisches Beispiel einer solchen logischen Einkleidung bildet die Methode, nach der die natürlichen Zahlen von Frege und im Anschluß an ihn, mit einer gewissen Modifikation, von Russell definiert werden.

Vergegenwärtigen wir uns kurz den Gedankengang der Fregeschen Theorie. Frege führt die Zahlen als Anzahlen (Kardinalzahlen) ein. Seine Ausgangsthesen sind folgende:

Die Anzahl kommt als Bestimmung einem *Prädikat* zu. Der Anzahlbegriff entspringt aus dem Begriff der Gleichzahligkeit. Zwei Prädikate heißen gleichzahlig, wenn die Dinge, auf welche das eine Prädikat zutrifft, denen, auf welche das andere Prädikat zutrifft, umkehrbar eindeutig zugeordnet werden können.

Werden die Prädikate in bezug auf die Gleichzahligkeit in Klassen eingeteilt, derart, daß alle Prädikate einer Klasse einander gleichzahlig und Prädikate verschiedener Klassen ungleichzahlig sind, so stellt eine jede Klasse die *Anzahl* dar, welche den zu ihr gehörenden $_{a_2}$**Prädikaten**$_{a_2}$ zukommt.

Im Sinne dieser allgemeinen Anzahldefinition werden nun die einzelnen endlichen Zahlen wie 0, 1, 2, 3 folgendermaßen definiert:

| 0 ist die Klasse der Prädikate, die auf kein Ding zutreffen$_{a_2 \dot{-} a_2}$ 1 ist die A28
Klasse der „einzahligen“ Prädikate, und ein Prädikat P heißt einzahlig, wenn es ein Ding x gibt, auf welches P zutrifft, und kein anderes (von x verschiedenes) Ding, auf welches P zutrifft. Entsprechend heißt ein Prädikat P zweizahlig, wenn es ein Ding x und ein davon verschiedenes Ding y gibt, so daß P auf x und auf y zutrifft, und wenn es kein von x und y verschiedenes Ding gibt, auf das P zutrifft. 2 ist die Klasse der zweizahligen Prädikate. In analoger Weise sind die Zahlen 3, 4, 5 und weitere als Klassen zu erklären.

Den allgemeinen Begriff der endlichen Zahl definiert Frege, nachdem er vorher den Begriff einer auf eine Zahl unmittelbar folgenden Zahl eingeführt hat, in folgender Weise: Eine Zahl n heißt endlich, wenn auf n ein jedes solche$_{a_2}\underline{\mathrm{s}}_{a_2}$ Prädikat zutrifft, das auf 0 zutrifft und das, wenn es auf eine Zahl a zutrifft, auch auf die unmittelbar folgende Zahl zutrifft.

| Auf ähnliche Art wird auch der Begriff einer zu der Zahlenreihe von 0 337
bis n gehörenden Zahl erklärt. An diese Begriffsbildungen schließt sich die Ableitung der Grundsätze der Zahlentheorie aus dem Begriff der endlichen Zahl.

Wir wollen nun insbesondere die Fregeschen Definitionen für die einzelnen endlichen Zahlen betrachten. Nehmen wir etwa die Definition der Zahl 2, die erklärt ist als die Klasse der zweizahligen Prädikate. Gegen diese Erklärung besteht $_{a_1}$**zunächst**$_{a_1}$ der Einwand, daß doch die Zugehörigkeit eines Prädikates zu der Klasse der zweizahligen Prädikate von außerlogischen Bedingungen abhängt und somit die Klasse gar kein logisches Objekt bildet.

Dieser Einwand erledigt sich jedoch, wenn wir uns in betreff der Auffassung von den Klassen (bzw. Mengen, Begriffsumfängen) dem Standpunkt der Russellschen Theorie anschließen. Hiernach bilden die Klassen (Begriffsumfänge) überhaupt keine eigentlichen Gegenstände, sondern sie fungieren nur als unselbständige Termini innerhalb eines umschriebenen Satzes. Ist z. B. K die Klasse der Dinge von der Eigenschaft E, d. h. der Umfang des Begriffes E, so haben wir nach Russell die Aussage, daß ein Ding a zu der Klasse K gehört, nur als eine Umschreibung anzusehen für die Aussage, daß das Ding a die Eigenschaft E hat.

Verbinden wir nun diese Auffassung mit den Fregeschen Anzahldefinitionen, so kommen wir dazu, die Zahl 2 statt durch die Klasse der zweizahligen Prädikate durch denjenigen Begriff zu definieren, dessen Umfang diese Klasse bildet. Die Zahl 2 wird also identifiziert mit der *Eigenschaft der Zweizah-*
A29 *ligkeit* eines Prädikates, d. h. mit der | Eigenschaft eines Prädikates, auf ein Ding x und auf ein von x verschiedenes[3] Ding y zuzutreffen, aber auf kein von x und von y verschiedenes Ding zuzutreffen.

Für die Beurteilung dieser Definition kommt es wesentlich darauf an, in welchem Sinne hier das Definieren gemeint ist und mit welchem Anspruch es geschieht. Was hier gezeigt werden soll, ist, daß diese Definition nicht als eine Wiedergabe der wahren Bedeutung des Anzahlbegriffes „zwei“ gelten kann, durch welche dieser Begriff, von allen unwesentlichen Zutaten befreit, in seiner logischen Reinheit enthüllt würde, sondern daß gerade das spezifisch logische Element an der Definition eine unwesentliche Hinzufügung ist.

Nämlich die Zweizahligkeit eines Prädikates P bedeutet ja nichts anderes, als daß es zwei Dinge gibt, auf die das Prädikat P zutrifft. Hier sondern sich drei begriffliche Momente voneinander ab: der Begriff „zwei Dinge“, das existentiale Moment und das Zutreffen des Prädikates P. Dabei steht
338 der | Begriffsinhalt „zwei Dinge“ nicht in einer sinnesmäßigen Abhängigkeit von einem der beiden anderen Begriffsinhalte. „Zwei Dinge“ bedeutet schon etwas ohne die Behauptung der Existenz von zwei Dingen, und auch ohne die Bezugnahme auf ein Prädikat, welches auf die zwei Dinge zutrifft; es bedeutet einfach: „ein Ding und noch ein Ding“.

[3]Der Einfachheit halber sollen hier die Erörterungen über den Begriff der Verschiedenheit, bzw. den dazu kontradiktorischen Begriff der Identität, übergangen werden.

An dieser simplen Definition erweist sich der Anzahlbegriff als ein elementarer *Strukturbegriff.* Der Anschein, als ob dieser Begriff aus den Elementen der Logik gewonnen würde, entsteht bei der betrachteten logischen Anzahldefinition nur dadurch, daß der Begriff mit logischen Elementen, nämlich der existentialen Form und der Subjekt-Prädikat-Beziehung verkoppelt wird, welche an sich für den Anzahlbegriff unwesentlich sind. Wir haben also hier in der Tat eine *logische Einkleidung* eines formalen Begriffes vor.

Das Fazit aus diesen Überlegungen ist, daß die Behauptung der Logisten, die Mathematik sei eine rein logische Erkenntnis, sich gerade durch die nähere Betrachtung der theoretischen Logik als unscharf und mißverständlich erweist. Jene Behauptung besteht nur dann zu Recht, wenn wir den Begriff des Mathematischen im Sinne der historischen Abgrenzung übernehmen, dagegen den Begriff des Logischen systematisch erweitern. Durch diese Begriffsbestimmung wird aber das erkenntnistheoretisch Wesentliche verdeckt, das für die Mathematik Eigentümliche wird übergangen. | A30

§ 3 Die formale Abstraktion

Als das Charakteristische an der mathematischen Erkenntnisweise haben wir die formale Abstraktion, d. h. die Einstellung auf die strukturelle Seite der Gegenstände festgestellt und damit das Feld des Mathematischen in grundsätzlicher Weise abgegrenzt. Wollen wir den Begriff des Logischen gleichfalls erkenntnistheoretisch fassen, so führt uns das dazu, aus dem Gesamtgebiet der Lehre von den Begriffen, Urteilen und Schlüssen, welches gemeinhin als Logik bezeichnet wird, ein engeres Teilgebiet, die *reflektierende oder philosophische Logik*, auszusondern, d. h. den Bereich der $_{a_1}\underline{\textit{im}}_{a_1}$ *eigentlichen Sinne analytischen* Erkenntnisse, welche aus dem reinen *Bedeutungsbewußtsein* entspringen. An diese philosophische Logik schließt sich die systematische Logik an, indem sie ihre Ausgangselemente und ihre Prinzipien aus den Ergebnissen der philosophischen Logik entnimmt und nach mathematischer Methode aus diesen eine Theorie entwickelt.

Auf diese Weise wird der Anteil der wahrhaft analytischen Erkenntnis von dem der mathematischen Erkenntnis deutlich abgesondert, und es kommt damit zur Geltung, was einerseits an *Kants Lehre von der reinen An|schauung*, 339
andererseits an der Behauptung der Logisten das Berechtigte ist. Wir können den Kantischen Grundgedanken, daß das mathematische Erkennen und überhaupt die *erfolgreiche Anwendung des logischen Schließens auf einer anschaulichen Evidenz beruhe*, ablösen von der besonderen Ausgestaltung, welche Kant diesem Gedanken in seiner Lehre von Raum und Zeit gegeben hat.

Dadurch gewinnen wir zugleich die Möglichkeit, dem ganz elementaren Charakter der mathematischen Evidenz und der Abstraktionshöhe der mathematischen Einstellung gerecht zu werden, auf deren Betonung die Behauptung von dem logischen Charakter der Mathematik abzielt.

Auch über die Rolle der Zahl in der Mathematik gibt unsere gewonnene Auffassung eine einfache Auskunft: die Mathematik haben wir erklärt als die Erkenntnis, die auf der formalen (strukturellen) Betrachtung von Gegenständen beruht. Die Zahlen aber bilden als Anzahlen die *einfachsten formalen Bestimmungen* und als Ordnungszahlen die *einfachsten formalen Objekte*.

Die Anzahlbegriffe bieten der philosophischen Erörterung eine besondere Schwierigkeit durch ihre kategoriale Sonderstellung, die sich auch in der Sprache an dem Erfordernis einer eigenen Gattung von Zahlworten geltend macht. Wir brauchen uns hier auf die Erörterung nicht des näheren einzulassen, sondern nur darauf zu achten, daß die Anzahlbestimmungen die
A31 Zusammensetzung eines Gesamtkomplexes | des Gegebenen oder des Vorgestellten aus Bestandteilen betreffen, also gerade das, was die strukturelle Seite eines Gegenstandes ausmacht. Und zwar sind es die elementarsten Struktur-Merkmale, welche durch die Anzahlen geliefert werden. So treten denn auch die Anzahlen in allen Gebieten auf, die der formalen Betrachtung zugänglich sind; insbesondere treffen wir innerhalb der theoretischen Logik die Anzahl in der mannigfachsten Weise an, z. B. als Anzahl der Subjekte eines Prädikates (oder wie man sagt: als Anzahl der Argumente einer logischen Funktion), als Anzahl der in einen logischen Satz eingehenden variablen Prädikate, als Anzahl der Anwendungen einer logischen Operation innerhalb einer Begriffsbildung oder innerhalb eines Satzes, als Anzahl der Sätze innerhalb einer Schlußfigur, als die Stufenzahl eines logischen Ausdrucks, d. h. als die Höchstzahl der darin vorkommenden Übereinanderschaltungen der Subjekt-Prädikat-Beziehungen (im Sinne des Aufstiegs von Gegenständen einer Theorie zu den Prädikaten, von den Prädikaten zu den Prädikaten-Prädikaten, von diesen wieder zu ihren Prädikaten usw.).

Die Anzahlen liefern uns aber nur formale *Bestimmungen*, noch nicht formale
340 Objekte. Z. B. in der Vorstellung der Dreizahl liegt noch nicht | die Vereinigung der drei Dinge zu einem Gegenstand. Die Verbindung mehrerer Dinge zu einem Gegenstand erfordert eine Form der Anordnung. Die einfachste Ordnungsform ist die der bloßen Aufeinanderfolge, welche zum Begriff der *Ordnungszahl* führt. Die Ordnungszahl ist an und für sich auch nicht als Gegenstand bestimmt, sie ist nur ein Stellenzeiger. Wir können sie

aber gegenständlich normieren, indem wir als *Stellenzeiger die einfachsten aus der Form der Aufeinanderfolge entspringenden Strukturen* wählen. Entsprechend der zweifachen Möglichkeit, die Zahlenreihe mit der 1 oder mit der 0 zu beginnen, kommen zwei Arten der Normierung in Betracht. Bei der einen liegt zu$_a$ $\underline{\text{G}}_a$runde eine Sorte von Dingen und eine Form der Anfügung eines Dinges; die Objekte sind Figuren, welche mit einem Ding der betreffenden Sorte beginnen und endigen, und wo auf jedes Ding, welches noch nicht das Ende der Figur bildet, ein angefügtes Ding jener Sorte folgt. Bei der anderen Art der Normierung haben wir ein Ausgangsding und einen Prozeß; die Objekte sind dann das Ausgangsding selbst und ferner die Figuren, welche man, mit dem Ausgangsding beginnend, durch einmalige oder wiederholte Anwendung jenes Prozesses erhält.

Wollen wir, im Sinne der einen oder anderen Normierung, die Ordnungszahlen als eindeutige Objekte, frei von allen unwesentlichen Zutaten haben, so müssen wir jeweils das bloße $_{a_1}$***Schema***$_{a_1}$ der betreffenden Wiederholungsfigur als Objekt nehmen, was eine sehr hohe Abstrak|tion erfordert. A32
Es steht uns aber frei, diese rein formalen Objekte durch konkrete Objekte („Zahlzeichen") zu repräsentieren; diese enthalten dann unwesentliche, willkürlich hinzugefügte Beschaffenheiten, welche aber auch als solche ohne weiteres erfaßt werden. Dieses Verfahren erfolgt jeweils auf Grund einer bestimmten Verabredung, die im Rahmen einer und derselben Betrachtung festgehalten werden muß.[4] Eine solche Verabredung, im Sinne der ersten Normierung, ist die, wonach sich die ersten Ordnungszahlen durch die Figuren $1, 11, 111, 1111$ darstellen. Gemäß einer der zweiten Normierung entsprechenden Verabredung stellen sich die ersten Ordnungszahlen dar durch die Figuren 0, $0'$, $0''$, $0'''$, $0''''$.

Indem wir so von der strukturellen Seite her einen einfachen Zugang zu den Zahlen finden, erhält unsere Auffassung über den Charakter der mathe|matischen Erkenntnis eine neue Bestätigung. Denn die beherrschende 341
Rolle der Zahl in der Mathematik wird von dieser Auffassung aus verständlich, und unsere Charakterisierung der Mathematik als Lehre von den Strukturen

[4]Der Philosoph ist geneigt, dieses Verhältnis der Repräsentation als einen Bedeutungszusammenhang anzusprechen. Man hat aber zu beachten, daß gegenüber dem gewöhnlichen Verhältnis von Wort und Bedeutung hier der wesentliche Unterschied besteht, daß der repräsentierende Gegenstand in seiner Beschaffenheit die wesentlichen Eigenschaften des repräsentierten Objektes enthält, so daß die zu untersuchenden Beziehungen der repräsentierten Objekte sich auch an den Repräsentanten vorfinden und durch die Betrachtung der Repräsentanten selbst festgestellt werden können.

erscheint als die sachgemäße Erweiterung der anfangs erwähnten Behauptung, daß die ${}_{a_1}$**Zahlen**${}_{a_1}$ das eigentliche Objekt der Mathematik bilden.

Das Befriedigende des gewonnenen Standpunktes darf uns nun nicht zu der Meinung verführen, wir hätten für das Problem der Grundlegung der Mathematik bereits alle erforderlichen grundsätzlichen Einsichten erlangt. Tatsächlich haben wir bisher erst die Vorfrage behandelt, über die wir uns zuerst klar werden wollten, nämlich worin das Spezifische der mathematischen Erkenntnis zu sehen ist. Jetzt aber müssen wir uns demjenigen Problem zuwenden, welches die hauptsächlichen Schwierigkeiten in der Grundlegung
A33 der Mathematik verursacht, dem Problem des Unendlichen. |

II. Teil: Das Problem des Unendlichen und die mathematischen Ideenbildungen

§ 1 Die Postulate der Theorie des Unendlichen. Die Unmöglichkeit ihrer Begründung durch die Anschauung. – Der finite Standpunkt

Die mathematische Theorie des Unendlichen ist die Analysis (Infinitesimalrechnung) und ihre Erweiterung durch die allgemeine Mengenlehre. Wir können uns hier auf die Betrachtung der Infinitesimalrechnung beschränken, da der Schritt von dieser zur allgemeinen Mengenlehre zwar eine Hinzunahme von Voraussetzungen, aber keine grundsätzliche Modifikation der philosophischen Auffassung erfordert.

Die Begründung der Infinitesimalrechnung durch Cantor, Dedekind und Weierstraß zeigt, daß der strenge Aufbau dieser Theorie gelingt, wenn zu den elementaren Schlußweisen der Mathematik zweierlei hinzugenommen wird:

1. ${}_{a_1}\underline{\mathrm{D}}_{a_1}$ie Anwendung der Methode des existentialen Schließens auf die ganzen Zahlen, d. h. die Zugrundelegung des *Systems* der ganzen Zahlen nach Art eines Gegenstandsbereiches einer axiomatischen Theorie – wie sie explizite in dem *Peanoschen Axiomensystem der Zahlentheorie* zum Ausdruck gebracht wird${}_{a_1}\underline{.}{}_{a_1}$

2. ${}_{a_1}\underline{\mathrm{D}}_{a_1}$ie Vorstellung des Inbegriffs aller Mengen von ganzen Zahlen als einer kombinatorisch überblickbaren Mannigfaltigkeit. Eine Menge von ganzen Zahlen ist bestimmt durch eine Verteilung der Werte 0 und 1

> 342 auf die Stellen | der Zahlenreihe. Die Zahl n gehört zu der Menge oder nicht, je nachdem an der n-ten Stelle der Verteilung 1 oder 0 steht. So wie nun für eine endliche Stellenzahl, z. B. für fünf Stellen, die Gesamtheit der möglichen Verteilung der Werte 0, 1 vollkommen übersehbar ist, so wird dieses nach Analogie auch für die gesamte Zahlenreihe angenommen.

Aus dieser Analogie ergibt sich insbesondere auch die Gültigkeit des *Zermeloschen Auswahlprinzips* für Gesamtheiten von Zahlenmengen. Die Erörterung dieses Prinzips wollen wir jedoch vorerst noch beiseite lassen; sie wird sich an einer späteren Stelle ungezwungen einfügen.

Betrachten wir nun diese Anforderungen vom Standpunkt unserer allgemeinen Charakterisierung der mathematischen Erkenntnis, so scheint es zunächst, daß für ihre Begründung durch mathematische Erkenntnis keinerlei grundsätzliche Schwierigkeit besteht. Denn sowohl bei der Zahlenreihe wie bei den aus ihr abgeleiteten Mengenbildungen handelt es sich um *Strukturen*, welche sich von den in der elementaren Mathematik behandelten Strukturen
nur dadurch unterscheiden, daß | es Strukturen von unendlichen Mannigfal- A34
tigkeiten sind. Auch scheint das existentiale Schließen in Anwendung auf die Zahlen durch den Gegenstands-Charakter der Zahlen als formaler Objekte, deren Existenz doch nicht von den Zufälligkeiten der faktischen Zahlvorstellungen abhängen kann, gerechtfertigt zu sein.

Gegen diese Argumentation ist aber zu bemerken, daß es voreilig ist, aus dem Charakter der formalen Objekte, d. h. aus der in ihnen vorliegenden Loslösung von $_{a_1}$**den**$_{a_1}$ empirischen Zufälligkeiten, zu schließen, daß die formalen Gegenstände auf einen Bereich des existierenden Formalen bezogen sein müßten. Wir könnten als Argument gegen diese Auffassung die mengentheoretischen Paradoxien anführen; doch ist es einfacher, direkt darauf hinzuweisen, daß in der primitiven mathematischen Evidenz eine Setzung eines solchen Bereiches der existierenden formalen Gegenstände nicht vorliegt, daß vielmehr die Anknüpfung an das tatsächlich Vorgestellte als Ausgangspunkt für die formale Abstraktion wesentlich ist. Es gilt in diesem Sinne der Kantische Satz, daß die reine Anschauung die Form der empirischen Anschauung ist.

Dem entspricht es auch, daß in den Disziplinen, die aus der elementaren mathematischen Evidenz hervorgehen, die Existenzaussagen nur eine uneigentliche Bedeutung haben. Insbesondere in der elementaren Zahlentheorie haben wir es nur mit solchen Existenzaussagen zu tun, die sich auf eine ganz bestimmte, vorweisbare Gesamtheit von Zahlen oder einen bestimmten, anschaulich vorführbaren Prozeß oder auf beides gemeinsam, d. h. auf eine durch einen vorführbaren Prozeß zu gewinnende Gesamtheit von Zahlen beziehen.

343 | Beispiele derartiger Existenzbehauptungen sind: „Zwischen 5 und 10 gibt es eine Primzahl"; nämlich 7 ist eine Primzahl.

„Zu jeder Zahl gibt es eine größere"; nämlich wenn n eine Zahl ist, so bilde man $n+1$; diese Zahl ist größer als n.

„Zu jeder Primzahl gibt es eine größere"; nämlich: ist eine Primzahl p gegeben, so bilde man das Produkt dieser Primzahl mit allen kleineren Primzahlen und addiere 1; sei k die so erhaltene Zahl, so ist unter den Zahlen von $p+1$ bis k jedenfalls eine Primzahl vorhanden.

In jedem dieser Fälle wird die Existenzaussage durch eine nähere Angabe präzisiert; die Existenzbehauptung hält sich an die in der anschaulichen Vorstellung vollziehbaren Bildungsprozesse und nimmt nicht Bezug auf eine Mannigfaltigkeit aller Zahlen. Diese elementare, an die Bedingungen der grundsätzlichen Vorstellbarkeit sich bindende Betrachtungsweise wollen wir nach Hilbert als den *finiten* Standpunkt bezeichnen und im gleichen Sinne von finiten Methoden, finiter Überlegung und finiten Schlüssen sprechen.

A35 | Es ist nun leicht festzustellen, daß das existentiale Schließen den finiten Standpunkt überschreitet. Eine solche Überschreitung findet bereits bei jedem Existenzsatze statt, der ohne nähere Präzisierung der Existenzbehauptung aufgestellt wird, wie z. B. bei dem Satz, daß jede unbegrenzte arithmetische Reihe

$$a \cdot n + b \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

worin a, b teilerfremde Zahlen sind, mindestens eine Primzahl enthält.

Ein besonders häufiger und wichtiger Fall des Hinausgehens über den finiten Standpunkt ist der Schluß von dem Nichtbestehen der Allgemeingültigkeit eines Satzes (für alle Zahlen) auf die Existenz eines Gegenbeispiels, oder mit mit anderen Worten das Prinzip, wonach für jedes Zahlen-Prädikat $P(n)$ die Alternative besteht: entweder gilt der allgemeine Satz, daß $P(n)$ auf alle Zahlen n zutrifft, oder es gibt eine Zahl n, auf welche $P(n)$ nicht zutrifft. Dieses Prinzip ergibt sich vom Standpunkt des existentialen Schließens als eine unmittelbare Anwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, d. h. aus dem Sinn der Negation. Daß für den finiten Standpunkt diese logische Konsequenz nicht besteht, liegt daran, daß hier die Behauptung des Zutreffens von $P(n)$ für alle Zahlen den rein hypothetischen Sinn des Zutreffens für jede vorgelegte Zahl hat, so daß die Negation dieser Behauptung nicht den positiven Sinn einer Existenzaussage ergibt. –

Hiermit ist aber die Erörterung der Möglichkeiten einer einsichtigen mathematischen Begründung der Voraussetzungen der Analysis noch nicht abgeschlossen: zugegeben, daß die Zugrundelegung eines Gesamtbereiches der formalen Objekte nicht dem Standpunkt der primitiven mathematischen Evi-
denz entspricht, so | könnten doch die Anforderungen der Infinitesimalrech- 344
nung dadurch motiviert werden, daß es sich bei den Gesamtheiten von Zahlen und Zahlenmengen um *Strukturen von unendlichen Mengen* handelt. Insbesondere würde hiernach die Anwendung des existentialen Schließens auf die Zahlen nicht zu entnehmen sein aus der Vorstellung des Inbegriffs der $_{d_2}$**formalen**$_{d_2}$ Zahlen im Reiche der $_{a_2}$**formalen**$_{a_2}$ Objekte, sondern aus der Betrachtung der Struktur der Zahlenreihe, in welcher die einzelnen Zahlen als Reihenglieder auftreten. In der Tat sind wir auf jenes schon genannte Argument, daß doch die mathematische Erkenntnis auch Strukturen von unendlichen Mannigfaltigkeiten betreffen könnte, noch nicht eingegangen.

Wir kommen hiermit zu der Frage des *Aktual-Unendlichen.* Denn das Unendliche, um das es sich bei den unendlichen Mannigfaltigkeiten handelt, ist das eigentliche Aktual-Unendliche im Unterschiede von dem „Potentiell-Unendlichen“, womit nicht ein unendlicher Gegenstand gemeint ist, sondern
bloß die Unbegrenztheit im Fortschreiten von End|lichem zu immer neuem A36
Endlichen, wie sie z. B. auch vom finiten Standpunkt für die Zahlen besteht, insofern man zu jeder Zahl noch eine größere bilden kann.

Die Frage, die wir hier zunächst in betreff des Aktual-Unendlichen zu stellen haben, bezieht sich darauf, ob das Aktual-Unendliche uns als Gegenstand anschaulicher mathematischer Erkenntnis gegeben ist.

Man könnte im Einklang mit unsern bisherigen Feststellungen der Meinung sein, daß wir tatsächlich einer anschaulichen Erkenntnis des Aktual-Unendlichen fähig sind. Denn wenngleich es sicher ist, daß wir eine konkrete Vorstellung nur von endlichen Objekten haben, so könnte doch eine Leistung der formalen Abstraktion gerade darin bestehen, daß sie sich von der Beschränkung auf das Endliche loslöst und daß sie an gewissen, beliebig weit fortsetzbaren Prozessen gleichsam den Grenzübergang vollzieht. Insbesondere wird man versucht sein, auf die geometrische Anschauung zu verweisen und aus dem Gebiet der geometrischen Objekte Beispiele von anschaulich gegebenen unendlichen Mannigfaltigkeiten anzuführen.

Nun sind zunächst einmal die geometrischen Beispiele nicht beweisend. Man täuscht sich hier leicht dadurch, daß man das Anschaulich-Räumliche

im Sinne einer existentialen Auffassung interpretiert. Eine Strecke z. B. ist ja anschaulich nicht als eine geordnete Mannigfaltigkeit von Punkten, sondern als ein einheitliches Ganzes gegeben, allerdings als ein ausgedehntes Ganzes, innerhalb dessen *Stellen* unterscheidbar sind. Die Vorstellung einer Stelle auf der Strecke ist eine anschauliche, aber die Gesamtheit *aller Stellen* auf der
345 Strecke ist nur ein gedanklicher Inbegriff. Anschaulich kommen wir hier nur | zum Potentiell-Unendlichen, indem jeder Stelle auf der Strecke eine Zerlegung in zwei Teilstrecken entspricht, bei der jede Teilstrecke $_{a_1}$**ihrerseits**$_{a_1}$ wieder in Teilstrecken zerlegbar ist.

Was ferner die unendlich ausgedehnten Gebilde betrifft, wie die unendliche Gerade, die unendliche Ebene, den unendlichen Raum, so sind diese als Gegenstände eines anschaulichen Vorstellens nicht aufweisbar. Insbesondere ist der Raum als Ganzes uns nicht in der Anschauung gegeben. Wir stellen zwar jedes räumliche Gebilde als im Raum befindlich vor. Aber diese Beziehung des einzelnen Räumlichen zum Raumganzen ist nur insoweit in der Anschauung gegenständlich, als mit jedem räumlichen Gegenstande zugleich auch eine räumliche Umgebung anschaulich vorgestellt wird. Darüber hinaus ist die Einordnung in den Gesamtraum – wir müssen dieses im Gegensatz zu Kant behaupten – *nur gedanklich* faßbar.

A37 Das Hauptargument, welches Kant zugunsten des anschaulichen | Charakters unserer Vorstellung vom Raum als Ganzen anführt, beweist tatsächlich nur, daß man durch bloße generalisierende Abstraktion nicht zum Begriff des einen umfassenden Raumes gelangen kann. Aber das soll auch gar nicht mit der Behauptung der bloß gedanklichen Zugänglichkeit unserer Vorstellung vom Raumganzen gesagt sein, daß wir es hier etwa mit einem bloßen Allgemeinbegriff zu tun hätten.

Gemeint ist vielmehr ein komplizierterer Sachverhalt, daß nämlich in der Vorstellung des Raumganzen zweierlei verschiedene Gedankenbildungen vorliegen, die beide sowohl über den Standpunkt der Anschauung wie auch über den der reflektierenden Logik hinausgehen. Die eine beruht auf dem Gedanken der Verknüpfung der Dinge zum Weltganzen, sie entspringt also unserm Wirklichkeitsglauben. Die andere ist eine *mathematische Ideenbildung*, welche zwar an die Anschauung anknüpft, aber doch nicht im Bereiche des anschaulich Vorstellbaren verbleibt, es ist die Vorstellung des Raumes als einer den Gesetzen der Geometrie unterworfenen Punktmannigfaltigkeit. [5]

[5] In der Naturansicht der Newtonschen Physik sind diese beiden Vorstellungen vom Raum miteinander vereinigt und heben sich noch nicht deutlich voneinander ab. Die

In diesen beiden Arten, den Raum als Ganzes vorzustellen, wird diese Totalität nicht als vorhanden erkannt, sondern nur versuchsweise *angesetzt*. Die Vorstellung von dem physikalischen Raumganzen ist grundsätzlich proble|matisch; immerhin besteht gerade vom Standpunkt der heutigen Phy- 346
sik die Möglichkeit, diesem zunächst sehr vagen Gedanken eine engere, präzisere Fassung zu geben, durch welche er der Forschung zugänglich und systematisch bedeutsam werden kann. Die geometrischen Ideenbildungen von räumlichen Mannigfaltigkeiten sind zwar von vornherein präzise, bedürfen aber eines Nachweises ihrer Widerspruchsfreiheit.

So haben wir also keinen Grund zu der Annahme, daß wir eine anschauliche Vorstellung vom Raum als Ganzem besitzen. Direkt können wir eine solche Vorstellung nicht aufweisen, und eine Notwendigkeit, jene Annahme als Erklärungsgrund einzuführen, besteht auch nicht. Leugnen wir aber die Anschaulichkeit des Raumganzen, so werden wir auch nicht behaupten, daß unendlich ausgedehnte Raumgebilde anschaulich vorstellbar seien.

| Zu beachten ist auch, daß die ursprüngliche anschauliche Auffassung der A38
elementaren Euklidischen Geometrie eine Vorstellung von unendlichen Gebilden gar nicht erfordert. Wir haben es da immer nur mit endlich ausgedehnten Figuren zu tun. Auch treten unendliche Punktmannigfaltigkeiten nirgends auf, da keine allgemeinen Existenzannahmen zu$_a$ G$_a$runde gelegt sind, sondern jede Existenzbehauptung in der Konstatierung einer möglichen geometrischen $_{a_1}$**Konstruktion**$_{a_1}$ besteht. Z. B., daß jede Strecke einen Mittelpunkt hat, besagt von diesem Standpunkt nichts anderes, als daß zu jeder Strecke ein Mittelpunkt konstruiert werden kann.[6]

Somit erweist sich der Anschein der Aufzeigbarkeit des Aktual-Unendlichen im Bereich der Gegenstände geometrischer Anschauung als trügerisch. Wir können uns aber auch in allgemeinerer Weise klarmachen, daß von einem Abstreifen der Bedingung des Endlichen durch die formale Abstraktion, wie dieses zur Anschauung des Aktual-Unendlichen erforderlich wäre, nicht die Rede sein kann. Die Bedingung der Endlichkeit ist ja keine zufällige

Euklidische Geometrie bildet hier das Gesetz für die räumliche Verknüpfung der Dinge im Weltganzen. Erst durch die seitherige Entwicklung der Geometrie und der Physik tritt die Notwendigkeit hervor, zwischen dem Raum als etwas Physikalischem und dem Raum als einer ideellen, durch geometrische Gesetze bestimmten Mannigfaltigkeit zu unterscheiden.

[6]In den Axiomen Euklids ist allerdings dieser Standpunkt insofern nicht ganz konsequent durchgeführt, als hier der Begriff der *hinreichend weiten Verlängerung* einer Strecke auftritt. Dieser Begriff läßt sich tatsächlich vermeiden; man muß nur dem Parallelen-Axiom eine andere Fassung geben.

empirische Beschränkung, sondern ein wesentliches Charakteristikum eines formalen Objekts.

Die empirische Beschränkung liegt noch innerhalb des Bereiches des Endlichen, wo die formale Abstraktion uns über die Grenzen der faktischen Vorstellungskraft hinweghelfen muß. Ein deutliches Beispiel hierfür haben wir an der unbegrenzten Teilbarkeit einer Strecke. Unser tatsächliches Vorstellungsvermögen versagt hier bereits, wenn die Teilung einen gewissen Grad der Feinheit überschreitet. Diese Grenze ist physikalisch zufällig, und wir können
347 | durch Zuhilfenahme von optischen Apparaten über sie hinauskommen. Von einem gewissen Maße der Kleinheit an versagen aber alle optischen Apparate, und schließlich werden überhaupt unsere räumlich-metrischen Vorstellungen physikalisch sinnlos. Mit der Vorstellung der unbegrenzten Teilbarkeit abstrahieren wir also bereits von den Bedingungen des faktischen Vorstellens wie auch von denjenigen der physikalischen Wirklichkeit.

Analog verhält es sich mit der Vorstellung des unbegrenzten Addierens in der Zahlentheorie. Auch hier bestehen Grenzen für die Vollziehbarkeit der Wiederholungen sowohl im Sinne der wirklichen Vorstellbarkeit wie auch im Sinne der physikalischen Realisierung. Betrachten wir beispielsweise die Zahl
A39 $10^{(10^{1000})}$. Zu dieser können | wir auf finitem Wege folgendermaßen gelangen: Wir gehen aus von der Zahl 10, die wir gemäß der einen von unsern früher angegebenen Normierungen durch die Figur

$$1111111111$$

repräsentieren. Sei nun z irgendeine Zahl, die durch eine entsprechende Figur repräsentiert wird. Ersetzen wir in der vorigen Figur jede 1 durch die Figur z, so entsteht, wie wir uns anschaulich klarmachen können, wieder eine Zahlfigur, die zur Mitteilung mit „$10 \times z$“ bezeichnet wird.[7] Wir erhalten so den Prozeß der Verzehnfachung einer Zahl. Aus diesem gewinnen wir den Prozeß des Überganges von einer Zahl a zu 10^a, indem wir der ersten 1 in a die Zahl 10 und jeweils jeder angehängten 1 den Prozeß der Verzehnfachung entsprechen lassen und hierin so weit gehen, bis wir mit der Figur a am Ende sind. Die durch den letzten Prozeß der Verzehnfachung gewonnene Zahl bezeichnen wir mit 10^a.

Dieses Verfahren bietet für die anschauliche Einstellung grundsätzlich keinerlei Schwierigkeit. Wollen wir aber den Prozeß im einzelnen uns ver-

[7]Hier handelt es sich um ein Zeichen „mit Bedeutung“.

gegenwärtigen, so versagt unsere Vorstellung schon bei ziemlich kleinen Zahlen. Wir können uns hier wieder ein Stück weit mit Apparaten behelfen oder mit Heranziehung von Gegenständen der äußeren Natur, in denen sehr große Anzahlbestimmungen auftreten. Aber auch mit alledem kommen wir bald an eine Grenze: Die Zahl 20 können wir leicht in der Vorstellung fassen, 10^{20} übersteigt bei weitem unsere wirkliche Vorstellungskraft, liegt aber durchaus in dem Bereich der physikalischen Realisierbarkeit; von der Zahl $10^{(10^{20})}$ endlich ist es höchst fraglich, ob sie in irgendeiner Weise als Größenverhältnis oder als Anzahlbestimmung in der physikalischen Wirklichkeit auftritt.

An solche Grenzen für die Möglichkeit der Verwirklichung kehrt sich aber die anschauliche Abstraktion nicht. Denn diese Grenzen sind vom Standpunkt | der formalen Betrachtung zufällig. Die formale Abstraktion findet 348
sozusagen keine frühere Stelle für eine prinzipielle Abgrenzung als bei dem Unterschied des Endlichen und Unendlichen.

Dieser Unterschied ist in der Tat ein grundsätzlicher. Wenn wir uns genauer besinnen, wie denn überhaupt eine unendliche Mannigfaltigkeit als solche charakterisiert sein kann, so finden wir, daß dieses gar nicht nach der Art einer anschaulichen Aufweisung möglich ist, sondern nur auf dem Wege der Behauptung (bzw. der Annahme oder der Feststellung) einer gesetzlichen Beziehung. Unendliche Mannigfaltigkeiten sind uns demnach nur durch das *Denken* zugänglich. Dieses Denken ist | zwar auch eine Art des A40
Vorstellens, aber es wird dadurch nicht die Mannigfaltigkeit als Gegenstand vorgestellt, sondern es werden Bedingungen vorgestellt, denen eine Mannigfaltigkeit genügt (bzw. zu genügen hat).

Die wesentliche Gebundenheit der formalen Abstraktion an das Moment der Endlichkeit macht sich insbesondere dadurch geltend, daß bei den Betrachtungen von Gesamtheiten und von Figuren die Eigenschaft der Endlichkeit für den Standpunkt der anschaulichen Evidenz gar kein besonderes beschränkendes Merkmal bildet. Die Beschränkung auf das Endliche wird von diesem Standpunkt aus ganz ohne weiteres, sozusagen *stillschweigend* vollzogen. Wir brauchen hier keine besondere Definition der Endlichkeit, denn die Endlichkeit der Objekte versteht sich für die formale Abstraktion ganz von selbst. So paßt z. B. die anschaulich-strukturelle Einführung der Zahlen nur für die *endlichen* Zahlen. „Wiederholung“ ist eben vom Standpunkt der anschaulich-formalen Betrachtung *eo ipso* endliche Wiederholung.

Diese in der formalen Einstellung implizite mitgegebene Vorstellung des Endlichen enthält den Erkenntnisgrund für das Prinzip der vollständigen Induktion und für die Zulässigkeit der rekursiven Definition, beide Verfahren in ihrer elementaren Form als „finite Induktion“ und „finite Rekursion“ verstanden.

Diese Heranziehung der Vorstellung des Endlichen gehört freilich nicht mehr zu demjenigen, was von der anschaulichen Evidenz notwendig in das logische Schließen eingeht. Sie entspricht vielmehr einem Standpunkt, bei dem man bereits auf die allgemeinen Charakterzüge der anschaulichen Objekte *reflektiert*. Auch läßt sich für die Zahlentheorie die Anwendung der anschaulichen Vorstellung des Endlichen vermeiden, wenn man darauf verzichtet, diese Theorie in elementarer Weise zu behandeln. Zwangsmäßig aber stellt sich die anschauliche Endlichkeitsvorstellung ein, sobald man einen Formalismus selbst zum Gegenstand der Betrachtung macht, insbesondere also
349 in der systema|tischen Theorie der logischen Schlüsse. Es kommt hierin zum Ausdruck, daß die Endlichkeit ein wesentliches Moment an den Gebilden eines jeden Formalismus ist. Die Grenzen des Formalismus sind aber keine anderen$_{d_2,d_2}$ als die der Vorstellbarkeit überhaupt von anschaulichen Zusammensetzungen.

So fällt also unsere Antwort auf die Frage nach der anschaulichen Erkennbarkeit des Aktual-Unendlichen verneinend aus. Es ergibt sich damit auch, daß die Methode der finiten Betrachtung für den Standpunkt der anschaulichen mathematischen Erkenntnis die angemessene ist.

A41 | Auf diesem Wege aber gelangen wir nicht dazu, die genannten Voraussetzungen für die Infinitesimalrechnung zu verifizieren.

§ 2 Der Intuitionismus. – Die Arithmetik als theoretischer Rahmen

Wie sollen wir uns nun angesichts dieses Tatbestandes verhalten? In der Stellungnahme zu dieser Frage sind die Auffassungen geteilt. Es findet hier ein ähnlicher Widerstreit der Ansichten statt, wie wir ihn bei der Frage der Charakterisierung der mathematischen Erkenntnis angetroffen haben. Die Vertreter des Standpunktes der primitiven Anschaulichkeit ziehen aus dem Umstande, daß die Analysis und die Mengenlehre durch ihre Postulate den finiten Standpunkt überschreitet, ohne weiteres die Folgerung, daß diese mathematischen Theorien in ihrer heutigen Form fallengelassen werden und von Grund auf revidiert werden müssen. Die Anhänger des Standpunktes der theoretischen Logik dagegen suchen entweder jene Postulate der Theorie des Unendlichen durch die Logik zu begründen, oder aber sie bestreiten überhaupt das Problematische an den Postulaten, indem sie dem Unterschied zwischen Endlichem und Unendlichem überhaupt keine grundsätzliche Bedeutung zumessen.

Die erstgenannte Auffassung wurde schon zur Zeit des ersten Aufkommens der Methode des existentialen Schließens von Kronecker vertreten, der wohl zuerst den methodischen Standpunkt, den wir den finiten nennen, scharf ins Auge gefaßt und nachdrücklich zur Geltung gebracht hat. Seine Ansätze zur Erfüllung dieser methodischen Anforderung im Gebiete der Analysis blieben jedoch fragmentarisch, auch fehlte es an einer genaueren philosophischen Darlegung des Standpunktes. So ist insbesondere der oft zitierte Ausspruch Kroneckers, die ganzen Zahlen habe Gott geschaffen, alles andere sei Menschenwerk, zur Motivierung der von Kronecker vertretenen Anforderungen gar nicht geeignet:[8] Wenn die ganzen Zahlen von Gott geschaffen sind, so
sollte man doch denken, | daß das existentiale Schließen in Anwendung auf 350
die Zahlen zulässig ist, während doch Kronecker gerade die existentiale Betrachtungsweise schon bei den ganzen Zahlen ausschließt.

Brouwer hat den Standpunkt Kroneckers nach zwei Richtungen weiter-
geführt: einerseits in Hinsicht auf die philosophische Motivierung, | durch die A42
Aufstellung seiner Theorie des „Intuitionismus“,[9] andererseits dadurch, daß er gezeigt hat, wie man im Gebiete der Analysis und der Mengenlehre den finiten Standpunkt zur Anwendung bringen und, durch eine Umgestaltung der Begriffsbildung$_{a_1}$**en**$_{a_1}$ und der Schlußweisen von Grund auf, diese Theorien wenigstens zu einem beträchtlichen Teil auf finitem Wege begründen kann.

Das Ergebnis dieser Untersuchung hat freilich seine negative Seite, indem sich herausstellt, daß man bei diesem Verfahren der finiten Behandlung der Analysis und der Mengenlehre nicht nur erhebliche Komplikationen, sondern auch starke Einbußen an Systematik in Kauf nehmen muß.

Die Komplikationen stellen sich bereits bei den ersten Begriffen der Infinitesimalrechnung ein, wie dem der Beschränktheit, dem der Konvergenz einer Zahlenfolge, dem Unterschiede zwischen rational und irrational. Nehmen wir z. B. den Begriff der Beschränktheit einer Folge von ganzen Zahlen. Nach der üblichen Auffassung besteht die Alternative: entweder übersteigt

[8]Der diesem Ausspruch angemessene methodische Standpunkt ist derjenige, den Weyl in seiner Schrift *Das Kontinuum* (*vide* [**?**]])eingenommen hat.

[9]Es scheint mir im Interesse der Klärung der Diskussion angezeigt, den Ausdruck „Intuitionismus“ als Bezeichnung einer philosophischen Ansicht zu gebrauchen, im Unterschied von dem Terminus „finit“, der eine bestimmte Art des Schließens und der Begriffsbildung bezeichnet.

die Folge jede Schranke, sie ist dann unbeschränkt, oder alle Zahlen der Folge liegen unterhalb einer Schranke, dann ist die Folge beschränkt. Um hier eine finite Begriffsbestimmung zu erhalten, müssen wir die Definition der Beschränktheit und der Unbeschränktheit folgendermaßen verschärfen: Eine Folge heiße beschränkt, wenn wir eine Schranke für die Zahlen der Folge entweder direkt oder durch Angabe eines Verfahrens aufzeigen können; sie heiße unbeschränkt, wenn ein Gesetz besteht, wonach notwendig jede Schranke von der Folge überschritten wird, wenn also die Annahme einer Schranke für die Folge auf eine Absurdität führt.

Durch diese Fassung der Begriffe ist nun zwar der finite Charakter der Definitionen erreicht, aber wir haben jetzt keine vollständige Dis$_{a_2}$j$_{a_2}$unktion zwischen dem Fall der Beschränktheit und dem der Unbeschränktheit. Wir können daher aus einem Beweise, welcher die Annahme der Unbeschränktheit einer Folge als unzulässig widerlegt, noch nicht die Beschränktheit der Folge entnehmen, und ebensowenig kann ein Satz, der einerseits unter der Annah-
351 me der Be|schränktheit einer gewissen Zahlenfolge, andererseits unter der Annahme ihrer Unbeschränktheit bewiesen ist, damit schon als erwiesen gelten.

A43 | Zu derartigen Komplikationen, welche die gesamte Theorie durchziehen, tritt noch als wesentlicherer Nachteil, daß die allgemeinen Theoreme, durch welche die Mathematik ihre systematische Übersichtlichkeit erhält, zum grossen Teil hinfällig werden. So gilt zum Beispiel in der Brouwerschen Analysis nicht einmal der Satz, daß jede stetige Funktion in einem endlichen, abgeschlossenen Intervall einen Maximalwert besitzt.

Es erscheint als eine unberechtigte Zumutung von Seiten der Philosophie an die Mathematik, daß sie ihre einfachere und leistungsfähigere Methode zugunsten einer beschwerlichen und an Systematik zurückstehenden Methode aufgeben solle, ohne durch eine innere Nötigung dazu veranlaßt zu sein. Durch dieses Ansinnen wird uns der Standpunkt des Intuitionismus verdächtig.

Sehen wir zu, worin die Hauptpunkte dieser von Brouwer entwickelten philosophischen Ansicht bestehen. Diese enthält zunächst eine Charakterisierung der mathematischen Evidenz. Mit dieser Charakterisierung befinden sich unsere vorangegangenen Ausführungen über die formale Abstraktion in wesentlichen Punkten im Einklang, insbesondere in der Anknüpfung an Kants Lehre von der reinen Anschauung.

Eine Abweichung besteht freilich insofern, als nach der Auffassung Brouwers das Moment des Zeitlichen wesentlich zu der mathematischen Gegenständlichkeit gehört. Wir brauchen uns aber hier auf eine Diskussion über diesen Punkt nicht einzulassen, da es auf die Stellung der Methodenfrage der Mathematik keinen Einfluß hat, wie wir uns hierüber entscheiden: was sich für Brouwer als Konsequenz aus der Zeit-Gebundenheit des Mathematischen ergibt, ist nichts anderes, als was wir aus der Gebundenheit der formalen Abstraktion an den konkret-anschaulichen Ausgangspunkt entnommen haben, nämlich eben die methodische Begrenzung des finiten Verfahrens.

Die entscheidenden Konsequenzen des Intuitionismus ergeben sich nun erst aus der weiteren Behauptung, daß jedwedes mathematische Denken, das wissenschaftliche Geltung soll beanspruchen können, sich anhand der mathematischen Evidenz vollziehen müsse, daß also die Grenzen der mathematischen Evidenz zugleich Grenzen für das mathematische Denken überhaupt seien.

Diese Forderung der Beschränkung des mathematischen Denkens auf das anschaulich Evidente erscheint zunächst als vollkommen berechtigt. Sie entspricht ja der uns vertrauten Auffassung von der mathematischen Gewiß$_{d1}$t$_{d1}$heit. Wir müssen jedoch bedenken, daß diese uns geläufige Auffassung von der
Mathe|matik ursprünglich zusammengehörte mit einer philosophischen An- 352
sicht, für welche die anschauliche Evidenz der | Grundlagen der Infinitesimal- A44
rechnung nicht in Frage stand. Von einer solchen Ansicht sind wir ja aber abgegangen, da wir fanden, daß die Postulate der Analysis sich nicht durch die Anschauung verifizieren lassen, daß nämlich die von der Analysis zu$_a$ G$_a$runde gelegte Vorstellung von unendlichen Gesamtheiten nicht in der Anschauung, sondern nur im Sinne einer *Ideenbildung* faßbar ist.

Wir können nun nicht erwarten, daß diese neue Ansicht von den Grenzen der anschaulichen Evidenz sich ohne weiteres mit der überkommenen Auffassung von dem Erkenntnischarakter der Mathematik verträgt, vielmehr liegt auf Grund unserer Feststellungen die Vermutung nahe, daß die landläufige Auffassung von der Mathematik den Sachverhalt zu simpel darstellt, und daß wir dem, was in der Mathematik vorliegt, von dem Standpunkt der Evidenz allein nicht gerecht werden können, sondern hier *dem Denken noch eine eigene Rolle zuerkennen* müssen.

Wir kommen so zu einer Unterscheidung zwischen dem elementar-mathematischen Standpunkt und einem darüber hinausgehenden systematischen Standpunkt. Diese Unterscheidung ist keineswegs künstlich und etwa bloß ad hoc getroffen, vielmehr entspricht sie der Zweiheit der Ausgangspunkte, von denen aus man zu der Arithmetik geführt wird, nämlich einerseits der kombinatorischen Beschäftigung mit Verhältnissen im Diskreten, und ande-

rerseits der theoretischen Anforderung, welche von Seiten der Geometrie und der Physik an die Mathematik gestellt wird.[10] Das System der Arithmetik entspringt ja keineswegs nur einer konstruierenden und anschaulich betrachtenden Tätigkeit, sondern zum erheblich$_{a_1}$**er**$_{a_1}$en Teil der Aufgabe, die geometrischen und physikalischen Vorstellungen von Menge, Flächeninhalt, Berührung, Geschwindigkeit usw. begrifflich genau zu fassen und theoretisch
A45 zu beherrschen. Die Methode der Arithmetisierung ist ein Mittel zu | diesem Zweck. Um aber diesem Zweck zu dienen, muß die Arithmetik ihren methodischen Standpunkt von dem ursprünglichen elementaren Standpunkt der
353 Zahlenlehre *zu einer syste|matischen Einstellung* im Sinne der besprochenen Postulate *erweitern.*

Die Arithmetik, welche den großen Rahmen bildet, in welchen die geometrischen und physikalischen Disziplinen eingeordnet werden, besteht nicht einfach in dem elementar-anschaulichen Umgehen mit den Zahlen, sondern sie hat selbst den Charakter einer *Theorie*, indem sie die Vorstellung der Zahlengesamtheit als eines Systems von Dingen sowie auch der Gesamtheit der Zahlenmengen zu$_a$ G$_a$runde legt. Diese systematische Arithmetik erfüllt ihre Aufgabe aufs allerbeste, und es liegt in ihrem Verfahren kein Grund des Anstoßes vor, sofern wir uns nur darüber klar sind, daß wir hier nicht den Standpunkt der elementaren Anschaulichkeit, sondern den einer Gedankenbildung einnehmen, d. h. denjenigen Standpunkt, welchen Hilbert als den *axiomatischen* bezeichnet.

Gegen dieses axiomatische Vorgehen besteht auch nicht etwa der Vorwurf der Willkürlichkeit zu Recht, denn wir haben es bei den Grundlagen der systematischen Arithmetik nicht mit einem beliebigen, nach Bedarf zusammengestellten Axiomensystem zu tun, sondern mit einer *naturgemäßen systematischen Extrapolation der elementaren Zahlenlehre*, und die auf dieser Grundlage sich entwickelnde Analysis und Mengenlehre bildet eine schon

[10]Bemerkenswert ist, daß bereits Jakob Friedrich Fries, der noch der mathematischen Evidenz einen weit über das Finite hinausgehenden Bereich zuschrieb – insbesondere ist nach seiner Ansicht die „stetige Reihe des Größeren und Kleineren“ in reiner Anschauung gegeben –, dennoch einen methodischen Unterschied machte zwischen der „Arithmetik als einer Theorie“, welche die anschauliche Vorstellung der Größe auf Begriffe bringt und wissenschaftlich ausbildet, und der „Kombinationslehre oder Syntaktik“, welche einzig auf dem Postulat der willkürlichen Anordnung gegebener Elemente und ihrer willkürlichen Wiederholung beruht und die keiner Axiome bedarf, da ihre Operationen „für sich unmittelbar verständlich“ sind. (Vgl.$_{d_1}$ J. F.$_{d_1}$ Fries: *Mathematische Naturphilosophie*, *vide* [**?**], S. ■ .)

rein gedanklich ausgezeichnete Theorie, welche geeignet ist, als die Theorie $\kappa\alpha\tau$' ■ '$\varepsilon\xi o\chi\grave{\eta}\nu$ genommen zu werden, in welche wir die Lehrgebäude und die theoretischen Ansätze der Geometrie und der Physik einordnen.

Wir können somit das Veto, das der Intuitionismus gegen das Verfahren der Analysis richtet, nicht anerkennen. Die Feststellung, mit der wir dem Intuitionismus zustimmen, daß das Unendliche uns nicht anschaulich gegeben ist, nötigt uns wohl zu einer Modifikation unserer philosophischen Auffassung von der Mathematik, nicht aber zu einer Umgestaltung der Mathematik selbst.

Allerdings kehrt nun das Problem des Unendlichen wieder. Denn indem wir eine Gedankenbildung als Ausgangspunkt der Arithmetik nehmen, haben wir etwas Problematisches eingeführt. Ein gedanklicher Ansatz, mag er noch so plausibel und vom systematischen Gesichtspunkt aus naturgemäß sein, enthält an sich noch nicht die Gewähr seiner widerspruchsfreien Durchführbarkeit. Indem wir die Idee der unendlichen Gesamtheit der Zahlen und der Zahlenmengen fassen, ist damit noch nicht ausgeschlossen, daß diese Idee etwa in ihren Konsequenzen auf einen Widerspruch führte. Es bleibt also
die Frage | der $|_A$ Widerspruchsfreiheit, der „Konsistenz“[11] des Systems der 354
Arithmetik zu untersuchen. A46

Der Intuitionismus will uns diese Aufgabe$_{d_1}\mathbf{n}_{d_1}$ ersparen, indem er die Mathematik auf den Bereich der finiten Betrachtung einschränkt; diese Ausschaltung der Problematik geschieht aber um einen zu hohen Preis: Das Problem fällt weg, aber es geht auch die systematische Einfachheit und Übersichtlichkeit der Analysis verloren.

§ 3 Die Problematik der logistischen Theorie. – Wert der logistischen Einordnung der Arithmetik

In ganz anderer Weise glauben die Vertreter des logistischen Standpunktes sich mit diesem Problem abfinden zu können. Mit der Erörterung dieses Standpunktes knüpfen wir an unsere früheren Betrachtungen über die Logistik an. Dort kam es darauf an, zu erkennen, daß in die deduktive Logik bereits auschauliche Evidenz eingeht, und daß die logischen Anzahl-Definitionen nicht etwa die Anzahlbegriffe als solche von spezifisch logischer

[11] Es mag hier angeregt sein, diesen von Cantor speziell in Bezug auf Mengenbildungen gebrauchten Ausdruck allgemein mit Bezug auf irgendwelche theoretischen Ansätze zu verwenden.

Natur (als reine Reflexionsbegriffe) erweisen, sondern vielmehr nur logische Normierungen elementarer Strukturbegriffe sind.

Diese Überlegungen betreffen die Abgrenzung des Logischen im engeren Sinne von dem Formalen. Aber mit der Anerkennung des formalen Elementes in der Logik ist die Methodenfrage der Logistik noch keineswegs abgeschlossen. Die Logistik begnügt sich ja nicht mit der theoretischen Entwicklung der Lehre von den Schlüssen, sondern, wie schon erwähnt ist, macht sie sich überdies zur Aufgabe, die gesamte Arithmetik in den logischen Formalismus einzuordnen. Diese Einordnung findet in der Weise statt, daß man zunächst in der früher beschriebenen Weise die Anzahlen als Eigenschaften von Prädikaten einführt und ferner – wie hier nicht genauer ausgeführt werden soll – die Bildungsweise der Zahlenmengen mit den Mitteln des logischen Formalismus zum Ausdruck bringt, wobei man eine jede Menge durch ein sie definierendes Prädikat ersetzt. An die Stelle der Gesamtheit aller Zahlen-Mengen $_{d_2}\underline{\ \ }_{d_2}$ tritt so die Gesamtheit der Zahlen-Prädikate.

Es gelingt auf diese Weise in der Tat, jedem arithmetischen Satz einen
A47 Satz aus dem Bereiche der theoretischen Logik zuzuordnen, in welchem | ausser den Variablen nur „logische Konstanten“, d. h. logische Grundoperationen wie die Konjunktion, die Negation, die Form der Allheit usw. auftreten.
355 | Nun ist klar, daß allein durch diese Übersetzung der Arithmetik in den logischen Formalismus das Problem des Unendlichen noch nicht gelöst werden kann. Wenn die theoretische Logik das System der Arithmetik deduktiv gewinnt, so müssen in ihrem Verfahren entweder ausgesprochenermaßen oder verdeckt Voraussetzungen enthalten sein, durch welche die Einführung des Aktual-Unendlichen zustande kommt.

Die Rechenschafts-Ablegung über diese Voraussetzungen und die Stellungnahme zu ihnen bildete von Anbeginn den schwachen Punkt der Logistik. So waren Frege und Dedekind, deren Beweisführungen und Überlegungen sonst überall durch äußerste Präzision und Strenge ausgezeichnet sind, ganz unbedenklich in dem, was sie als vermeintlich selbstverständliche Voraussetzung dem Standpunkt der allgemeinen Logik zu$_a\underline{\ \mathrm{G}}_a$runde legten, nämlich in der Vorstellung von einer abgeschlossenen Gesamtheit aller überhaupt denkbaren logischen Objekte.

Diese Vorstellung würde freilich, wenn sie sich halten ließe, systematisch noch befriedigender sein als die spezielleren Postulate der Arithmetik. Bekanntermaßen mußte sie auf Grund der Widersprüche, zu denen man durch sie geführt wurde, fallengelassen werden. Die Logistik verzichtet seither darauf, die Existenz einer unendlichen Gesamtheit zu beweisen und stellt vielmehr ausdrücklich ein *Unendlichkeitsaxiom* auf.

Dieses Unendlichkeitsaxiom reicht aber als Voraussetzung zur Gewinnung der logisch gefaßten Arithmetik noch nicht aus. Wir würden damit nur dasjenige erhalten, was sich aus der Anwendung unseres ersten Postulates, der Zulässigkeit des existentialen Schließens in bezug auf die ganzen Zahlen ergibt. Um auch unserem zweiten Postulat zu entsprechen, wird noch etwas Weiteres erfordert, nämlich die Anwendung des existentialen Schließens *in* ${}_a\underline{B}_a$*ezug auf Prädikate*. Die Berechtigung dieses Verfahrens kann zunächst als logisch selbstverständlich erscheinen, und für die Auffassung, die Frege und Dedekind zu${}_a\underline{\ \mathrm{G}}_a$runde legten, steht sie in der Tat ganz außer Frage. Mit der Preisgabe der Vorstellung von der Gesamtheit aller logischen Gegenstände wird aber auch die Vorstellung von der Gesamtheit aller Prädikate problematisch, und bei näherem Zusehen zeigt sich hierin eine besondere grundsätzliche Schwierigkeit.

Nämlich dem eigentlich logischen Standpunkt entspricht es, daß wir die Gesamtheit der Prädikate als eine solche auffassen, welche zum wesentlichen Teil erst im Rahmen des Systems der Logik zustande | kommt, in der A48
Weise, daß auf gewisse vorlogische, etwa aus der Anschauung entnommene Ausgangs-Prädikate die logischen Bildungsprozesse angewandt werden. Es
werden nun | durch die Bezugnahme auf die Gesamtheit der Prädikate wie- 356
derum Prädikate gewonnen. Ein Beispiel hierfür bildet die früher erwähnte Fregesche Definition der endlichen Zahl: „Eine Zahl n heißt endlich, wenn auf n jedes Prädikat zutrifft, welches auf die Zahl 0 zutrifft, und welches, wenn es auf eine Zahl a zutrifft, auch auf die nächstfolgende Zahl zutrifft.“ Hier wird das Prädikat der Endlichkeit definiert mit Bezugnahme auf die Gesamtheit aller Prädikate.

Derartige Definitionen – man nennt sie ${}_a\underline{\textit{imprädikativ}}_a$[12] – treten allenthalben in der Grundlegung der Arithmetik, und zwar gerade an entscheidenden Stellen auf.

[12]Der Terminus rührt von Poincaré her, der im Unterschiede von den andern Kritikern der Mengenlehre, welche fast alle nur das Auswahlaxiom im Auge hatten, den Gesichtspunkt der imprädikativen Definition in die Diskussion brachte, und auf diesen das Gewicht legte. Seine Kritik war jedoch insofern anfechtbar, als er den Gebrauch der imprädikativen Definitionen als eine von der Mengenlehre eingeführte Neuerung hinstellte. Zermelo konnte ihm entgegenhalten, daß bereits in den üblichen, von Poincaré durchaus anerkannten Schlußweisen der Analysis die imprädikativen Definitionen wesentlich auftreten.

Seitdem haben insbesondere Russell und Weyl die Rolle der imprädikativen Definition in der Analysis eingehend erörtert und zur vollen Deutlichkeit gebracht.

Nun ist an sich gar nichts dagegen einzuwenden, daß man ein Ding aus einer Gesamtheit durch eine Eigenschaft bestimmt, welche sich auf diese Gesamtheit bezieht. So ist z. B. in der Gesamtheit der Zahlen eine bestimmte Zahl durch die Eigenschaft definiert, daß sie die größte unter allen den Primzahlen ist, deren 1000$_{a}$-$_{a}$faches größer ist als das 1001$_{a}$-$_{a}$fache der vorangehenden Primzahl.[13]

Aber Voraussetzung ist dabei, daß die betreffende Gesamtheit $_{a_2}$***unabhängig***$_{a_2}$ von den auf sie Bezug nehmenden Definitionen bestimmt ist; sonst geraten wir in einen fehlerhaften Zirkel.

Diese Vorbedingung kann jedoch gerade beim Fall der Gesamtheit der Prädikate und der auf sie bezogenen imprädikativen Definitionen nicht ohne weiteres als erfüllt gelten, denn der Umkreis der Prädikate bestimmt sich ja –
A49 gemäß der hier erörterten Auffassung – durch die | logischen Bildungsgesetze, und zu diesen gehören auch die imprädikativen Definitionen.

Zur Vermeidung des fehlerhaften Zirkels würde es allerdings genügen, wenn sich zeigen ließe, daß jedes durch eine imprädikative Definition eingeführte Prädikat auch anderweitig „prädikativ" definiert werden kann. Ja, man würde sogar mit einem schwächeren Satz auskommen$_{a_2}$. D$_{a_2}$a nämlich
357 bei der | logischen Grundlegung der Arithmetik ein Prädikat immer nur seinem Umfange nach betrachtet wird, d. h. in Hinsicht auf die Menge der Dinge, auf die es zutrifft, so brauchten wir nur zu wissen, daß ein jedes durch eine imprädikative Definition eingeführte Prädikat *umfangsgleich* ist mit einem prädikativ definierten Prädikat.

Dieses Postulat wurde von Russell, welcher die in den imprädikativen Definitionen vorliegende Schwierigkeit mit aller Deutlichkeit erkannte, als $_{d}$*Axiom der Reduzibilität*$_{d}$ neben das Unendlichkeitsaxiom gestellt.

Wie aber haben wir dieses Axiom der Reduzibilität aufzufassen? Aus seiner Formulierung geht nicht hervor, ob damit ein logisches Gesetz oder eine außerlogische Annahme ausgesprochen sein soll.

Im ersten Fall, wenn das Reduzibilitäts-Axiom der Ausdruck eines logischen Gesetzes wäre, müßte seine Geltung unabhängig davon sein, was für ein Bereich von vorlogischen Ausgangsprädikaten zu$_{a}$ G$_{a}$runde gelegt wird, – vorausgesetzt wenigstens, daß dieser Bereich dem Unendlichkeitsaxiom genügt. Das würde aber besagen, daß eine axiomatische Theorie, in welcher

[13] Das Beispiel ist so gewählt, daß die Bezugnahme auf die Gesamtheit der Zahlen nicht ohne weiteres eliminiert werden kann, wie dieses bei den meisten einfacheren Beispielen der Fall ist.

die Formen des allgemeinen und des existentialen Urteils (das existentiale Schließen) nur auf die Gegenstände, nicht aber auf die Prädikate angewendet $_{a_2}$<u>werden</u>$_{a_2}$, keiner Erweiterung ihres Prädikatenbereiches durch Einführung von imprädikativen Definitionen fähig ist, sofern nur das Axiomensystem so beschaffen ist, daß es zu seiner Erfüllung ein unendliches System von Gegenständen erfordert.

Von der Gültigkeit eines solchen Satzes ist aber keine Rede. Man kann sich leicht Beispiele konstruieren, welche diese Behauptung widerlegen.

Ein solches Beispiel liefert insbesondere die $_{a_1}$***Dedekindsche Einführung des Zahlenbegriffs***$_{a_1}$. Dedekind geht aus von einem System, worin ein Ding 0 ausgezeichnet ist und welches eine umkehrbar eindeutige Abbildung auf eine Teilmenge gestattet, zu der jenes Ding 0 nicht gehört. Stellen wir nun diese Abbildung durch ein Prädikat mit 2 Subjekten dar und formulieren wir die verlangten Eigenschaften dieses Prädikates als Axiome, so erhalten wir damit ein elementares Axiomensystem, welches in seinen Axiomen keine Bezug|nahme auf die Gesamtheit der Prädikate enthält und das ferner nur durch ein A50 unendliches System von Gegenständen erfüllt werden kann. Betrachten wir nun den Dedekindschen Begriff der Zahl; seine Definition läßt sich, indem wir sie aus der Sprache der Mengentheorie in die der Prädikatentheorie übersetzen, ganz analog zu Freges Definition der endlichen Zahl formulieren: „ein Ding n unseres Systems ist eine Zahl, wenn auf n jedes Prädikat zutrifft, das auf 0 zutrifft und das, wenn es auf ein Ding a unseres Systems zutrifft, auch auf dasjenige Ding zutrifft, welches dem Ding a bei der umkehrbar eindeutigen Abbildung zugeordnet ist.“ Diese Definition ist imprädikativ; und man kann sich überlegen, daß es nicht möglich ist, zu dem hierdurch definierten Begriff „Zahl-Sein“ ein umfangsgleiches Prädikat durch eine prädikative Definition aus den Grundelementen der Theorie zu gewinnen.[14] | 358

Wir finden somit, daß für das Reduzibilitäts-Axiom nur die zweite Deutung in Betracht kommt, wonach es eine *Anforderung an den Ausgangsbereich der vorlogischen Prädikate* zum Ausdruck bringt.

Mit der Einführung einer solchen Voraussetzung verzichtet man aber auf die Auffassung, daß der Bereich der Prädikate durch die logischen Prozesse erzeugt wird. Die Absicht einer eigentlich logischen Prädikaten-Theorie wird damit aufgegeben.

Entschließt man sich einmal hierzu, so erscheint es natürlicher und angemessener, zu derjenigen Vorstellung von der *logischen Funktion* zurückzu-

[14]Ein anderes Beispiel hat Waismann (in einer Note über „Die Natur des Reduzibilitäts-Axioms“ (*vide* [**?**])) angegeben. Dieses bedarf jedoch einer Modifikation.

kehren, die dem Standpunkt von Schröder entspricht: man denkt sich eine logische Funktion als eine Verteilung der Werte „wahr“ und „falsch“ auf die Dinge des Individuumbereiches. Ein jedes Prädikat definiert eine solche Verteilung; aber die Gesamtheit der Wertverteilungen wird als eine *unabhängig von den begrifflichen Definitionen bestehende kombinatorische Mannigfaltigkeit*, nach Analogie zum Endlichen, gedacht.

Durch diese Auffassung wird das Zirkelhafte bei den imprädikativen Definitionen der theoretischen Logik beseitigt; wir brauchen nur eine jede Aussage über die Gesamtheit der Prädikate zu ersetzen durch die entsprechende Aussage über die Gesamtheit der logischen Funktionen. Das Axiom der Reduzibilität wird somit entbehrlich.

Diesen Schritt hat nun tatsächlich die logistische Schule auf Anregung von Wittgenstein und Ramsey vollzogen, von denen insbesondere geltend gemacht wird, daß man zur Vermeidung der Widersprüche, welche mit dem Be-
A51 griff der Menge aller mathematischen | Gegenstände zusammenhängen, nicht nötig hat, eine Unterscheidung der Prädikate nach der Art ihrer Definition vorzunehmen, wie es Whitehead und Russell in den *Principia Mathematica* getan haben, sondern daß es genügt, die Definitionsbereiche der Prädikate deutlich abzugrenzen, so daß man unterscheidet zwischen den Prädikaten von Individuen, den Prädikaten der Prädikate, den Prädikaten der Prädikate von Prädikaten usw.

So ist man von der Stufentheorie der *Principia Mathematica* zu den einfacheren Auffassungen von Cantor und Schröder zurückgekehrt.

Man darf sich nun aber nicht darüber täuschen, daß man sich hiermit von dem Standpunkt der logischen Selbstverständlichkeit weit entfernt hat. Die Voraussetzungen, welche so der theoretischen Logik zu$_a$ $\underline{\text{G}}_a$runde gelegt
359 werden, sind | prinzipiell von ganz derselben Art wie die Grundpostulate der Analysis und diesen auch inhaltlich vollkommen analog: der Vorstellung der Zahlenreihe als unendlicher Gesamtheit entspricht in der logischen Theorie das Unendlichkeitsaxiom, und anstatt des Inbegriffs aller Zahlenmengen wird hier der Inbegriff aller (auf den „Individuenbereich“ oder auf einen bestimmten Prädikatenbereich bezogenen) logischen Funktionen postuliert.

Es wird also bei der Einordnung der Arithmetik in das System der theoretischen Logik an Voraussetzungen nichts gespart. Diese Einordnung hat gar nicht, wie man zunächst meinen sollte, die Bedeutung einer Zurückführung der Postulate der Arithmetik auf geringere Voraussetzungen; ihr Wert liegt vielmehr darin, daß die mathematische Theorie durch ihre Vereinigung mit dem logischen Formalismus auf eine breitere Basis gestellt wird.

Die Theorie gewinnt hierdurch zunächst einen höheren Grad von methodischer Auszeichnung, indem sich zeigt, daß ihre Voraussetzungen nicht nur aus der anschaulichen Zahlenlehre durch eine naturgemäße Extrapolation erhalten werden, sondern sich gleichermaßen auch ergeben, indem wir die *Umfangslogik* im Sinne einer Ausdehnung auf unendliche Gesamtheiten *extrapolieren*.

Außerdem aber bekommen wir durch den Anschluß der Arithmetik an die theoretische Logik einen Einblick in den Zusammenhang der Prozesse der Mengenbildung mit den logischen Grundoperationen, und die logische Struktur der Begriffsbildung und der Schlüsse tritt deutlicher hervor.

So wird insbesondere der Sinn des $_{a_1}$***Auswahlprinzips***$_{a_1}$ erst an Hand des logischen Formalismus vollkommen verständlich. Wir können das Prinzip in folgender Form aussprechen: Wenn $B(x, y)$ ein (in einem bestimmten Bereiche definiertes) Prädikat mit zwei Subjekten ist und | wenn es zu jedem A52
Ding x des Definitionsbereiches mindestens ein Ding y dieses Bereiches gibt, für welches $B(x, y)$ zutrifft, so gibt es (mindestens) eine Funktion $y = f(x)$ von der Beschaffenheit, daß für jedes Ding x des Definitionsbereiches von $B(x, y)$ der Wert $f(x)$ wieder ein Ding dieses Bereiches ist, und zwar ein solches, für das $B(x, f(x))$ zutrifft.

Überlegt man sich, was diese Behauptung für den speziellen Fall eines zweizahligen Subjektbereiches besagt, dessen Dinge wir durch die Zahlen $0, 1$ repräsentieren können und bei dem überhaupt nur vier verschiedene Wertverläufe von Funktionen $y = f(x)$ in Betracht kommen, so findet man, daß die Behauptung sich als eine einfache Anwendung des einen von den *distributiven Gesetzen* ergibt, welche für die Beziehung zwischen Konjunktion und Disjunktion gelten, nämlich des folgenden elementar-logischen Satzes: „Wenn A | besteht und wenn außerdem B oder C besteht, so besteht entweder A 360
und B, oder es besteht A und C.“[15]

Auch im Falle irgendeiner bestimmten endlichen Anzahl von Dingen des Subjektbereiches folgt die Behauptung des Auswahlprinzips aus diesem distributiven Gesetz. Die allgemeine Behauptung des Auswahlprinzips ist also nichts anderes als die Ausdehnung eines elementa$_{a_1}$**r-l**$_{a_1}$ogischen Gesetzes für die Konjunktion und Disjunktion auf unendliche Gesamtheiten, und das Auswahlprinzip bildet somit eine Ergänzung zu den logischen Regeln, welche das allgemeine und das existentiale Urteil betreffen, d. h. der Regeln des existen-

[15]Das „oder“ ist hier beidemal nicht im Sinne des ausschließenden „oder“, sondern des lateinischen „vel“ gemeint. Der Satz gilt allerdings auch für das ausschließende „oder“.

tialen Schließens, deren Anwendung auf unendliche Gesamtheiten ja ebenfalls die Bedeutung hat, daß gewisse elementare Gesetze für die Konjunktion und Disjunktion auf das Unendliche übertragen werden.

Gegenüber diesen Regeln des existentialen Schließens kommt dem Auswahlprinzip nur insofern eine Sonderstellung zu, als es zu seiner Formulierung den *Funktions-Begriff* erfordert, der seinerseits auch durch das Auswahlprinzip erst seine hinlängliche implizite Charakterisierung erhält.

Dieser Funktionsbegriff entspricht dem Begriff der logischen Funktion, nur mit dem Unterschiede, daß als Funktionswerte nicht „wahr" und „falsch", sondern die Dinge des Subjektbereiches genommen werden. Die Gesamtheit der Funktionen, um die es sich hier handelt, ist also die Gesamtheit aller möglichen „Selbstbelegungen" des Subjektbereiches.

A53 | Im Sinne dieses Funktionsbegriffes bedeutet die Existenz einer Funktion von der Eigenschaft E noch keineswegs, daß eine Begriffsbildung existiert, durch welche eine bestimmte Funktion von der Eigenschaft E eindeutig festgelegt wird. Mit der Beachtung dieses Umstandes werden die üblichen Einwendungen gegen das Auswahlprinzip hinfällig, die zumeist darauf beruhen, daß man durch den Namen „Auswahlprinzip" zu der Meinung verführt wird, als ob mit diesem Prinzip die Möglichkeit einer Auswahl behauptet sei.

Zugleich erkennen wir, daß die Voraussetzung, die in dem Auswahlprinzip ihren Ausdruck findet, grundsätzlich nicht hinausgeht über die Auffassung, die wir auch sonst schon dem Verfahren der theoretischen Logik zu$_a$ G$_a$runde legen müssen, um es ohne die Einführung eines Reduzibilitäts-Axioms zirkelfrei deuten zu können.

Dieser Feststellung können wir freilich auch die entgegengesetzte Betonung geben: Die Strittigkeit des Auswahlprinzips, dessen Aufstellung im Sinne der konsequenten Ausgestaltung des Standpunktes der theoretischen
361 Logik liegt, | bringt uns das Problematische dieses Standpunktes besonders nachdrücklich zum Bewußtsein.

Das ist ja auch das Ergebnis, zu dem uns die Betrachtung der logistischen Grundlegung der Arithmetik geführt hat, daß dieses Verfahren der Einordnung der Arithmetik in die theoretische Logik zwar wohl eine breitere Grundlage für die arithmetische Theorie schafft und zur inhaltlichen Motivierung ihrer Voraussetzungen beiträgt, daß es aber nicht hinausführt über den methodischen Standpunkt des ideellen Ansatzes, d. h. über den Standpunkt der Axiomatik.

Das Problem des Unendlichen wird auf diese Weise zwar formuliert, aber nicht gelöst. Denn es bleibt eben dahingestellt, ob die als Voraussetzung für den Aufbau der Analysis und Mengenlehre postulierten Analogien zwischen dem Endlichen und dem Unendlichen einen zulässigen, d. h. widerspruchsfrei durchführbaren Gedankenansatz bilden.

Diese Frage, welche der Intuitionismus durch die Ausschaltung der problematischen Voraussetzungen vermeiden will, und deren Berechtigung die Logisten zumeist bestreiten, indem sie einen grundsätzlichen Unterschied zwischen dem Endlichen und dem Unendlichen überhaupt nicht anerkennen, wird durch die *Hilbertsche Beweistheorie* positiv in Angriff genommen.

§ 4 Die Hilbertsche Beweistheorie

Um die Leitgedanken der Beweistheorie besser aufzufassen, wollen wir uns zunächst noch einmal vergegenwärtigen, welcher Art die hier | zu lösende A54
Aufgabe ist. Es handelt sich darum, die mathematische Ideenbildung, auf welcher das Lehrgebäude der Arithmetik beruht, als widerspruchsfrei zu erweisen.

Man hat von philosophischer Seite mehrfach die Frage aufgeworfen, ob es denn zur Rechtfertigung dieser Ideenbildung mit dem Nachweise der Widerspruchs$_{a_2}$<u>freiheit</u>$_{a_2}$ allein getan sei. Diese Fragestellung ist aber irreführend; sie trägt nicht der Tatsache Rechnung, daß die wissenschaftliche Motivierung des theoretischen Ansatzes der Arithmetik zum wesentlichen Teil bereits durch die Wissenschaft geleistet ist, und daß der Nachweis der Widerspruchsfreiheit gerade eben dasjenige Desiderat ist, dessen Erfüllung allein noch aussteht.

Das Gebäude der Arithmetik ist auf der Grundlage von Gedanken errichtet, welche für die wissenschaftliche Systematik überhaupt von maßgebender Bedeutung sind, nämlich dem Prinzip der *Erhaltung („Permanenz") der Gesetzlichkeiten*, welches hier als das Postulat der unbeschränkten Anwendbarkeit der üblichen logischen Formen des Urteilens und Schließens auftritt, und der Forderung einer rein *objektiven* Fassung der Theorie, durch welche diese losgelöst wird von jeder Bezugnahme auf unser *Erkennen*.

| In der grundsätzlichen methodischen Bedeutung dieser Anforderungen 362
liegt die *innere* Motivierung und Auszeichnung des Ansatzes der arithmetischen Theorie.

Zu dieser inneren Motivierung tritt die glänzende Bewährung des Gedankensystems der Arithmetik im Sinne seiner deduktiven Fruchtbarkeit, seines systematischen Erfolges und der Einhelligkeit seiner Konsequenzen. Die Eignung dieses Gedankensystems zur Beherrschung der Anzahl- und der Größenverhältnisse ist eklatant. Die Systematik des großartigen Lehrgebäudes, welches durch die Vereinigung der Funktionentheorie mit der Zahlentheorie und der Algebra zustande kommt, hat nicht ihresgleichen. Und als umfassender Begriffsapparat für die naturwissenschaftlichen Theorien-Bildungen erweist sich die Arithmetik nicht nur als geeignet zur Formulierung und Entwicklung der Gesetze, sondern sie wird auch mit großem Erfolge, in einem früher ungeahnten Ausmaße, zum Aufsuchen der Gesetze herangezogen.

Was ferner die Einhelligkeit der Konsequenzen betrifft, so ist diese durch die intensive theoretische Durcharbeitung und die vielfache numerische Anwendung der Analysis aufs beste erprobt.

Woran es hier noch fehlt, das ist nur, daß an Stelle des bloß empirischen, durch mannigfaches Ausprobieren gewonnenen Vertrauens auf die Konsistenz der arithmetischen Theorie, d. h. auf die durchgängige Einstimmigkeit ihrer
A55 Ergebnisse, eine wirkliche Einsicht in diese | Konsistenz erlangt werde, und dieses zu bewirken ist die Aufgabe des Nachweises der Widerspruchsfreiheit.

Die Situation ist also nicht etwa derart, daß durch den Nachweis der Widerspruchsfreiheit das Gedankensystem der Arithmetik überhaupt erst etabliert werden müßte, sondern die Aufgabe dieses Nachweises besteht ausschließlich darin, uns in betreff dieses schon durch innere Gründe der Systematik motivierten und in seiner Handhabung als geistiges Rüstzeug aufs beste bewährten Gedankensystems die volle, einsichtige Gewißheit zu verschaffen, daß es nicht durch eine Unstimmigkeit seiner Konsequenzen zu Falle kommen kann.

Wenn dieses gelingt, so wissen wir, daß die Idee des abgeschlossenen Unendlichen sich in konsequenter Weise durchführen läßt. Und wir können uns dann auf die Ergebnisse der Anwendung der arithmetischen Grundpostulate gerade so verlassen, wie wenn wir in der Lage wären, diese anschaulich zu verifizieren. Denn indem wir die Widerspruchsfreiheit der Anwendung dieser Postulate erkennen, ergibt sich zugleich, daß ein aus ihnen gefolgerter, anschaulich, d. h. im finiten Sinne deutbarer Satz niemals einer anschaulich erkennbaren Tatsache widersprechen kann. Bei einem finiten Satz ist aber die
363 | Feststellung seiner Unwiderleglichkeit gleichbedeutend mit der Feststellung seiner Wahrheit.

Aus dieser Betrachtung über das Erfordernis und den Zweck des Nachweises der Widerspruchsfreiheit geht nun insbesondere hervor, daß es bei diesem Nachweis auf nichts anderes ankommt, als im buchstäblichen Sinne des Wortes die Widerspruchsfreiheit der arithmetischen Theorie, d. h. die

Unmöglichkeit ihrer immanenten Widerlegung einzusehen.

Es war das Neue an Hilberts Vorgehen, daß er sich auf diese Problemstellung beschränkte, während man vordem einen Beweis für die Widerspruchsfreiheit einer axiomatischen Theorie immer in dem Sinne geführt hatte, daß man damit zugleich positiv die Erfüllung der Axiome durch gewisse Objekte aufzeigte. Für diese Methode der Aufweisung bietet sich beim Fall der Arithmetik keine Handhabe, insbesondere führt der Fregesche Gedanke, die aufzuweisenden Objekte aus dem Gebiete der Logik zu entnehmen, deshalb nicht zum Ziel, weil, wie wir uns klargemacht haben, die Anwendung der üblichen Logik auf das Unendliche ebenso problematisch ist wie die als widerspruchsfrei zu erweisende Arithmetik. Die Grundpostulate der arithmetischen Theorie betreffen ja gerade die erweiterte Anwendung der üblichen Formen des Urteilens und Schließens.

Indem wir uns diesen Umstand vergegenwärtigen, werden wir | gerade- A56
wegs auf das *erste Leitprinzip der Hilbertschen Beweistheorie* geführt: Dieses besagt, daß wir beim Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik die Gesetze der Logik, so wie sie in der Arithmetik angewandt werden, in den Bereich des als widerspruchsfrei zu Erweisenden einzubeziehen haben, ${}_{a_1}\underline{\text{so}}_{a_1}$ daß sich der Nachweis der Widerspruchsfreiheit *gemeinsam auf Logik und Arithmetik* erstreckt.

Zur Durchführung dieses Gedankens ist nun bereits durch die Einordnung der Arithmetik in das System der theoretischen Logik der erste wesentliche Schritt getan. Auf Grund dieser Einordnung kommt die Aufgabe des Nachweises der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik darauf hinaus, die theoretische Logik als widerspruchsfrei zu erkennen, oder mit anderen Worten, die Widerspruchsfreiheit des Unendlichkeitsaxioms, der imprädikativen Definition und des Auswahlprinzips festzustellen.

Es empfiehlt sich hierbei, an die Stelle des Russellschen Unendlichkeitsaxioms die Dedekindsche Charakterisierung des Unendlichen zu setzen.

Das Russellsche Unendlichkeitsaxiom fordert für jede endliche Zahl n (im Sinne der Fregeschen Definition der endlichen Anzahl) die Existenz eines n-zahligen Prädikates, womit implizite auch die Unendlichkeit des Individuenbereiches (des Ausgangsbereiches der Dinge) gefordert ist. Nun ist es eine unnötige und auch vom grundsätzlichen Standpunkte zu beanstandende Komplikation, daß hier drei Unendlichkeiten in verschiedenen Schichten
neben|einanderlaufen: die der unendlich vielen Dinge des Individuenbereiches, ferner die 364
der unendlich vielen Prädikate und dann die daraus sich ergebende der unendlich vielen Anzahlen, welche ja als Prädikate von Prädikaten definiert werden.

Diese Vielfältigkeit können wir vermeiden, indem wir die Unendlichkeit des Individuenbereiches, anstatt durch eine unendliche Reihe von Prädikaten mit einem Subjekt, durch ein einziges Prädikat mit zwei Subjekten festlegen, nämlich ein solches, das eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Individuenbereiches auf einen echten (d. h. mindestens ein Ding ausschließenden) Teilbereich liefert. Die Einführung dieser Dedekindschen Charakterisierung des Unendlichen gestaltet sich am einfachsten und elementarsten, wenn wir die umkehrbar eindeutige Abbildung nicht durch ein Existenzaxiom postulieren, sondern gleich explizite einführen, indem wir ein Ausgangsding und einen Grundprozeß als Grundelemente der Theorie nehmen.

Auf diese Weise wird erreicht, daß die Zahlen nicht erst als Prädikate von Prädikaten, sondern schon als Dinge des Individuenbereiches auftreten.

Doch diese Erwägung bezieht sich bereits auf die besondere Art der Ausführung des systematischen Aufbaues, in betreff dessen mehrere Wege
A57 offenstehen. Wir müssen uns aber noch ganz allgemein darüber | orientieren, wie denn überhaupt ein Nachweis der Widerspruchsfreiheit in dem gewünschten Sinne geführt werden kann. Diese Möglichkeit ist nicht ohne weiteres ersichtlich. Denn wie sollen alle möglichen Schlußfolgerungen überblickt werden, die sich aus den Voraussetzungen der Arithmetik bzw. der theoretischen Logik ergeben?

Hier kommt nun die Untersuchung der mathematischen Beweise mit Hilfe des logischen Kalküls entscheidend zur Geltung. Dieser hat gezeigt, daß die Begriffsbildungen und Schlußweisen, die in den Theorien der Analysis und der Mengenlehre angewandt werden, auf eine begrenzte Anzahl von Prozessen und Regeln zurückführbar sind, so daß es gelingt, diese Theorien im Rahmen einer genau abgegrenzten Symbolik restlos zu formalisieren.

Aus der Möglichkeit dieser Formalisierung, die ursprünglich nur zum Zweck der genaueren logischen Analyse der Beweise betrieben wurde, hat nun Hilbert die Folgerung gezogen – dieses ist der *zweite Leitgedanke seiner Beweistheorie* –, daß die Aufgabe des Nachweises der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik ein *finites Problem* ist.

Ein Widerspruch in der inhaltlichen Theorie muß sich nämlich an Hand der Formalisierung in der Weise geltend machen, daß gemäß den Regeln des Formalismus zwei Formeln ableitbar sind, von denen die eine aus der andern durch denjenigen Prozeß hervorgeht, welcher das formale Abbild der Negation bildet. Die Behauptung der Widerspruchsfreiheit ist daher gleichbedeutend mit der Behauptung, daß zwei Formeln, die in der genannten Beziehung stehen, nicht beide nach den Regeln des Formalismus abgeleitet
365 werden können. Diese | Aussage hat aber grundsätzlich denselben Charakter wie irgendein allgemeiner Satz der finiten Zahlenlehre, z. B. der Satz, daß es unmöglich ist, drei ganze (von 0 verschiedene) Zahlen a, b, c anzugeben, zwischen denen die Beziehung $a^3 + b^3 = c^3$ besteht.

Der Nachweis der Widerspruchsfreiheit für die Arithmetik kommt somit in der Tat auf ein finites Problem der Schlußlehre hinaus. Die finite Untersuchung, welche die formalisierten Theorien der Mathematik zum Gegenstand hat, wird von Hilbert als *Metamathematik* bezeichnet. Die Aufgabe, welche der Metamathematik gegenüber dem System der Mathematik zufällt, ist analog der, welche Kant der Vernunftkritik gegenüber dem System der Philosophie zugewiesen hat.

Im Sinne dieses methodischen Programms ist die Beweistheorie bereits
ein beträchtliches Stück weit durchgeführt,[16] doch sind noch | erhebliche ma- A58
thematische Schwierigkeiten zu überwinden. Durch die von Ackermann und
v. Neumann geführten Beweise ist die Widerspruchsfreiheit für das erste Po-
stulat der Arithmetik, d. h. die Anwendbarkeit des existentialen Schließens
auf die ganzen Zahlen sichergestellt. Für das weitere Problem der Wider-
spruchsfreiheit des Allgemeinbegriffs der Zahlenmenge (bzw. der Zahlenfunk-
tion) einschließlich des zugehörigen Auswahlprinzips liegt ein weitgeführter
Ansatz von Ackermann vor.

Mit der Lösung dieses Problems würde schon fast der ganze Bereich der bestehenden mathematischen Theorien als widerspruchsfrei erwiesen sein.[17] Insbesondere würde dieser Nachweis ausreichen, um die geometrischen und physikalischen Theorien als widerspruchsfrei zu erkennen.

Man kann nun in der Problemstellung noch weiter gehen und für umfas-
sendere Systeme, etwa für die axiomatische Mengenlehre, die Widerspruchs-
freiheit untersuchen. Die axiomatische Mengenlehre, wie sie zuerst von Zer-
melo aufgestellt und durch Fraenkel und v. Neumann ergänzt und | erweitert 366
ist, reicht mit ihren Bildungsprozessen schon weit hinaus über all das, was
faktisch in der Mathematik gebraucht wird, und mit der Feststellung ihrer
Widerspruchsfreiheit würde auch das System der theoretischen Logik als wi-

[16] Einen ersten Entwurf einer Beweistheorie gab Hilbert schon 1904 in seinem Heidelberger Vortrag „Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik“ (*vide* [**?**]). Hier ist bereits der erste Leitgedanke der gemeinsamen Behandlung von Logik und Arithmetik ausdrücklich formuliert; das methodische Prinzip des finiten Standpunktes ist gleichfalls intendiert, aber noch nicht explizite ausgesprochen. – Zwischen diesen Vortrag und Hilberts neuere Publikationen über die Beweistheorie fällt die Untersuchung von Julius Koenig *Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre* (*vide* [**?**]), welche dem Standpunkt Hilberts sehr nahekommt und in der bereits ein Beweis für Widerspruchsfreiheit ganz im Sinne der Beweistheorie geführt ist. Dieser betrifft $_{a_1}$**freilich**$_{a_1}$ nur einen ganz engen Bereich des formalen Operierens, so daß seine Bedeutung nur eine methodische ist.

[17] Auch die Cantorsche Theorie der Zahlen der zweiten Zahlklasse ist hier inbegriffen.

derspruchsfrei erwiesen sein.

Ein absoluter Abschluß der Begriffsbildung wird aber auch hiermit nicht erreicht. Denn die formalisierte Mengenlehre gibt wieder Anlaß zu einer metamathematischen Betrachtung, welche die formalen Bildungen der Mengenlehre zum Gegenstand hat und dadurch auch über diese Bildungen hinausgeht.[18]

A59 | Ungeachtet dieser Möglichkeit der Erweiterung der Begriffsbildung kann dennoch eine formalisierte Theorie den Charakter der Abgeschlossenheit haben, wenn nämlich mit Hilfe der Erweiterung der Begriffsbildung keine neuen Ergebnisse im Bereiche der durch die Begriffe der Theorie formulierbaren Gesetze zustande kommen.

Diese Bedingung ist jedenfalls dann erfüllt, wenn die Theorie überhaupt *deduktiv abgeschlossen* ist, d. h. wenn es unmöglich ist, zu ihr ein neues, nicht schon ableitbares, in den Begriffen der Theorie ausdrückbares Axiom hinzuzufügen, ohne daß dadurch ein Widerspruch entsteht$_{a_2}$ $\underline{-,}$$_{a_2}$ oder was auf dasselbe hinauskommt: wenn jeder im Rahmen der Theorie formulierbare Satz entweder beweisbar oder widerlegbar ist.[19]

Von der Zahlentheorie, wie sie durch die Peanoschen Axiome, mit Hinzunahme der rekursiven Definition, abgegrenzt wird, glauben wir, daß sie in diesem Sinne deduktiv abgeschlossen ist; die Aufgabe eines wirklichen Nachweises hierfür ist aber noch völlig ungelöst. Noch schwieriger wird die Frage, wenn wir, über den Bereich der Zahlentheorie hinaus, zu der Analysis und den weiteren mengentheoretischen Begriffsbildungen aufsteigen.

Im Gebiete dieser und verwandter Fragen liegt noch ein beträchtliches Feld der Problematik offen. Diese Problematik ist aber nicht von der Art, daß sie eine Einwendung gegen den von uns eingenommenen Standpunkt dar-

[18] Die näheren Erörterungen dieses Sachverhaltes knüpfen an das *Richardsche Paradoxon* an, welches in neuerer Zeit durch Skolem eine schärfere Fassung erhalten hat. Diese Überlegungen besitzen insofern keinen abschließenden Charakter, als sie sich im Rahmen einer nicht-finiten Metamathematik vollziehen. Eine endgültige Klärung der hier diskutierten Frage würde erst bewirkt sein, wenn es etwa gelänge, in finiter Weise eine Zahlenmenge anzugeben, von der sich zeigen ließe, daß sie in der axiomatischen Mengenlehre nicht vorkommt.

[19] Man beachte, daß diese Forderung der deduktiven Abgeschlossenheit noch nicht so weit geht wie die Forderung der *Entscheidbarkeit* einer jeden Frage der Theorie, welche besagt, daß es ein Verfahren geben soll, um von jedem beliebig vorgelegten Paar zweier der Theorie angehöriger, einander kontradiktorisch entgegengesetzter Behauptungen zu entscheiden, welche von beiden beweisbar („richtig“) ist.

stellt. | Wir müssen uns nur gegenwärtig halten, daß der Formalismus der 367
Sätze und Beweise, mit denen wir unsere Ideenbildung zur Darstellung bringen, nicht zusammenfällt mit dem Formalismus derjenigen Struktur, die wir in der Gedankenbildung intendieren. Der Formalismus reicht aus, um unsere Ideen von unendlichen Mannigfaltigkeiten zu formulieren und aus diesen die logischen Konsequenzen zu ziehen, aber er vermag im allgemeinen nicht, die Mannigfaltigkeit gleichsam aus sich kombinatorisch zu erzeugen.

| Die Ansicht, zu der wir in betreff der Theorie des Unendlichen gelangt A60
sind, kann als eine Art der Philosophie des „als ob“ angesehen werden. Sie unterscheidet sich jedoch von der so benannten Philosophie Vaihingers grundsätzlich dadurch, daß sie auf die Widerspruchsfreiheit und die Beständigkeit der Ideenbildung das Gewicht legt, während Vaihinger die Forderung der Widerspruchsfreiheit für ein Vorurteil hält und geradezu erklärt, die Widersprüche in der Infinitesimalrechnung seien „nicht bloß nicht wegzuleugnen, sondern … selbst gerade das Mittel, durch welches der Fortschritt erreicht worden ist.“[20]

Vaihingers Betrachtung ist ausschließlich auf die wissenschaftliche *Heuristik* eingestellt. Er kennt nur „Fiktionen“, die als bloß vorübergehende Hilfsmittel des Denkens auftreten, bei deren Einführung das Denken sich Gewalt antut und deren widerspruchsvoller Charakter (wenn es sich um „echte Fiktionen“ handelt) nur durch geschickte Kompensation der Widersprüche unschädlich gemacht wird.

Die Ideenbildungen in unserem Sinne sind bleibendes Eigentum des Geistes. Sie sind ausgezeichnete Formen der systematischen Extrapolation und der idealisierenden Annäherung an das Tatsächliche. Sie sind auch keineswegs etwas Willkürliches noch auch dem Denken Aufgezwungenes; im Gegenteil: sie bilden eine Welt, in der sich unser Denken heimisch fühlt und aus welcher der Menschengeist, der sich in sie versenkt, Befriedigung und Freude schöpft.

Nachtrag

Auf$_a$ $\underline{\text{G}}_a$rund verschiedener Einsichten, die sich seit dem Erscheinen der vorstehenden Abhandlung ergeben haben, ist einiges darin Geäußerte zu korrigieren.

[20] Vaihinger, *Die Philosophie des Als*$_a$$\underline{\textit{-O}}_a$*b*, 2. Auflage, Kapitel XII (*vide* [?], S. ■).

Zunächst, was den Intuitionismus betrifft, so meinte man anfangs, daß die Methodik des intuitionistischen Beweisens mit derjenigen des Hilbertschen „finiten Standpunktes“ übereinstimme. Jedoch hat sich gezeigt, daß die Methoden des Intuitionismus über die von Hilbert intendierten finiten Beweisverfahren hinausgehen. Insbesondere verwendet Brouwer den Allgemeinbegriff des inhaltlichen Beweises, mit dem auch der Begriff der „Absurdität“ zusammenhängt, von dem aber beim finiten Schließen kein Gebrauch gemacht wird.

Was sodann die Hilbertsche Beweistheorie betrifft, so ist die Meinung,
A61 daß der Nachweis der Widerspruchsfreiheit für die Arithmetik | auf ein finites Problem hinauskomme, nur in dem Sinne begründet, daß die Behauptung der Widerspruchsfreiheit sich im finiten Sinne formulieren läßt. Daraus aber ergibt sich noch keineswegs, daß das Problem mit finiten Methoden lösbar ist. Auf$_a$ G$_a$rund eines Theorems von Gödel wurde die Möglichkeit einer finiten Lösung sogar schon für die Zahlentheorie, wenn nicht direkt ausgeschlossen, so doch höchst unplausibel gemacht, und es zeigte sich überdies, daß die erwähnten damals vorliegenden Widerspruchsfreiheitsbeweise nicht für den Gesamtformalismus der Zahlentheorie ausreichten. Man hat daraufhin den methodischen Standpunkt der Beweistheorie erweitert, und es sind verschiedene Widerspruchsfreiheitsbeweise, zunächst für die formalisierte Zahlentheorie und dann auch für formale Systeme der Analysis geführt worden, deren Beweismethode sich zwar nicht auf die finite, d. h. elementar kombinatorische Betrachtung beschränkt, die aber doch nicht die üblichen Methoden des existentialen Schließens und andererseits auch nicht den Allgemeinbegriff eines inhaltlichen Beweises erfordern.

Im Zusammenhang mit dem erwähnten Gödelschen Theorem hat sich überdies ergeben, daß die Annahme, daß die axiomatisch abgegrenzte und formalisierte Zahlentheorie deduktiv abgeschlossen sei, unzutreffend ist. Allgemeiner noch wurde von Gödel gezeigt, daß formalisierte Theorien, welche gewissen sehr allgemeinen Bedingungen der Ausdrucksfähigkeit sowie der Schärfe der Formalisierung genügen, sofern sie widerspruchsfrei sind, nicht deduktiv abgeschlossen sein können.

Im Ganzen ist die Situation nun so, daß die Hilbertsche Beweistheorie, in Verbindung mit der Aufdeckung der Möglichkeiten der Formalisierung mathematischer Theorien, ein reiches Feld der Forschung geschaffen hat, daß jedoch die erkenntnistheoretischen Gesichtspunkte, von denen ihre Aufstellung ausging, problematisch geworden sind.

Dieses gibt Anlaß, die erkenntnistheoretischen Ausführungen der vorstehenden Abhandlung zu revidieren. Freilich, die positiven Ausführungen, insbesondere die Aufweisung des mathematischen Elements in der Logik und die Herausstellung der elementaren arithmetischen Evidenz, bedürfen wohl kaum der Revision. Jedoch, die scharfe Unterscheidung des Anschaulichen und des Nicht-Anschaulichen, wie sie bei der Behandlung des Problems des Unendlichen angewandt wird, ist anscheinend nicht so strikt durchführbar, und die Betrachtung der mathematischen Ideenbildungen bedarf wohl in dieser Hinsicht noch der näheren Ausarbeitung. Für eine solche sind in den folgenden Abhandlungen[a] verschiedene Überlegungen enthalten.

Bernays Project: Text No. 10

Die Grundgedanken der Fries'schen Philosophie in ihrem Verhältnis zum heutigen Stand der Wissenschaft[†] (1930)

The Basic Ideas of Friesean Philosophy in Relation to Contemporary Science

(*Abhandlungen der Fries'schen Schule*, NF, 5 (1929–1933), no. 2 (1930), S. 97–113)

| Werte Schulgenossen! Wenn ich hier im Rahmen einer Zusammenkunft, 99
die dem Andenken an Loenard Nelson gewidmet ist, die Ehre habe, vor Ihnen zu sprechen, so möchte ich zunächst kurz die Absicht meiner Ausführungen darlegen.

Nelson war nicht nur durch seine Gedankenschärfe, sondern durch seine Gesamtpersönlichkeit das berufene Haupt seiner Schule. Eine solche Persönlichkeit verbindet unter ihrer Anhängerschaft Menschen, die in ihren Ansichten zum Teil sehr weit auseinandergehen, von denen jeder sich aus

[†]The original title continued: „Von Paul Bernays. Rede, gehalten vor Freunden der Fries'schen Schule am 10. August 1928 in Göttingen.“

---

[a]Dieser Verweis bezieht sich auf die anderen Aufsätze in [?].

dem Ganzen der philosophischen Lehre dasjenige entnimmt, was für ihn das Wesentliche dieser Lehre ist. Dieser Umstand macht sich beim Hingang eines solchen geistigen Führers sehr fühlbar. Es entsteht für die Angehörigen der Schule, und zwar für jeden Einzelnen, die Frage, in welcher Weise er die überkommenen Gedanken für sich bewahren und ausgestalten$_{d,d}$ sowie auch nach außen hin weiter zur Geltung bringen soll. Diese Frage erhebt sich in unserem Fall um so mehr, als ja das Gedankenwerk Nelsons der Wiedererweckung und dem weiteren Ausbau einer Philosophie gewidmet ist, über die man schon mehr oder minder glaubte$_{a,a}$ zur Tagesordnung übergehen zu können, – und um so mehr, als in dieser Philosophie bereits das Werk eines Philosophen durch einen in vieler Hinsicht anders gearteten Denker – wie es Fries gegenüber Kant gewesen ist – seine Fortbildung erhalten hat.

100 | Beantworten kann sich diese Frage jeder nur selbst. Es sei mir aber gestattet, in dieser Hinsicht gewisse Anregungen zu geben, bei denen ich auf eine vollständige Behandlung des Themas keinerlei Anspruch mache, schon darum, weil ich hier nur von den erkenntniskritischen Fragen spreche. Ich möchte einen bestimmten, einheitlichen Komplex von Gedanken der Kant-Fries'schen Schule hervorheben, von dem es mir scheint, daß er auf jeden Fall seine bedeutsame Rolle in der Philosophie behält.

Wie Sie wissen, stehen verschiedene Behauptungen der Kant-Fries'schen Philosophie in Diskrepanz zu den heutigen wissenschaftlichen Theorien. Diese Diskrepanz ist sehr deutlich und grob. Aber nicht so hervorstechend ist, daß manches in der heutigen Wissenschaft sich entwickelt, was, in der richtigen Weise hervorgehoben, geeignet ist, die Gedanken der Kant-Fries'schen Philosophie wieder zu erhöhter Geltung zu bringen, – sofern man nur bereit ist, an dieser bestimmte Modifikationen vorzunehmen.

Ich meine hier vor allem diejenigen Gedanken, die den transzendentalen Idealismus und den Unterschied zwischen der anschaulichen und der nur denkend bewußten Erkenntnis ausmachen.

Wenn wir die verschiedenen neueren philosophischen Lehrmeinungen betrachten, so finden wir, daß die meisten dem transzendentalen Idealismus grundsätzlich entgegengerichtet sind. Insbesondere ist es die unter den exakten Forschern verbreitete, ja fast unumschränkt herrschende Immanenz-Philosophie des Phänomenalismus der Machschen Schule, die glaubt, überhaupt den Existenzbegriff eliminieren und mit dem Begriff des Phänomens auskommen zu können. Nach dieser Philosophie gibt es grundsätzlich keine andere Erkenntnisart als das Wahrnehmen, das Erinnern, das Verfolgen des Ablaufs der Vorstellungen und die Vergleichung der Vorstellungsinhalte.

| Die Schwierigkeiten, die diese Ansicht hat, sind Ihnen ja bekannt. Ich brauche darauf hier nicht näher einzugehen. Nur möchte ich darauf hinweisen, daß W. Freytag in seinem Buch: *Der Realismus und das Transzendenzproblem* (*vide* [?]) die Schwächen des Immanenzstandpunktes sehr gut auseinandersetzt. An dieses Buch schließt sich in gewissen Teilen auch M. Schlick in seiner *Allgemeinen Erkenntnislehre* (*vide* [?]) an; er verfällt aber in anderer Weise wieder in den Immanenzstandpunkt dadurch, daß er von vornherein das Erkennen als ein Wiedererkennen charakterisiert, – womit wiederum das Erkennen auf die bloße Vergleichung des Gegebenen beschränkt wird. 101

Der Phänomenalismus hat gewisse Verfeinerungen erfahren. Eine solche findet man heute in der Russellschen Schule der mathematischen Logik. Hier wird der Bereich des anschaulich Gegebenen erweitert durch gewisse logische Bildungen. Dabei ist charakteristisch, daß es sich hier im wesentlichen nur um Klassenbildungen handelt, also nur um eine abstrakte Art der Vergleichung. Das, was zu Klassen vereinigt wird, sind entweder Vorstellungsinhalte oder bereits gebildete Klassen. Prinzipiell geht man damit gar nicht über den Phänomenalismus hinaus; denn auch Mach und seine Schule haben schon die Begriffsbildung als wesentlich neben der direkten anschaulichen Vorstellung in Betracht gezogen.

Aber nicht nur in denjenigen Richtungen, die an die exakten Wissenschaften anknüpfen, sondern ebenso in der als geisteswissenschaftlich bezeichneten Philosophie ist die Tendenz zu einer Beschränkung auf das Immanente sehr verbreitet. Eine besonders bemerkenswerte und gewinnende Form des Immanenzstandpunktes ist diejenige, die er innerhalb der phänomenologischen Schule Husserls angenommen hat. Hier wird als methodischer Leitsatz | das 102
Prinzip aufgestellt von der *Ausweisbarkeit eines jeden Phänomens*, d. h. die Forderung, jeden eingeführten Begriff oder Terminus zu legitimieren durch Aufweisung eines durch ihn fixierten *Phänomens*. Wenn man dieses Prinzip in genügend weitem Sinne versteht, so läßt sich dagegen nichts einwenden. Aber es liegt die Deutung sehr nahe und sie wird auch von vielen Anhängern der Schule angewendet, daß unser Denken im Bereich der *Phänomene*, d. h. des inhaltlich Vorstellbaren bleiben müsse, daß also überhaupt nichts sinnvoll denkbar sei, was jenseits des Gegebenen liege. Merkwürdig ist übrigens, daß neuerdings Oskar Becker in seinem Buch: *Mathematische Existenz* (*vide* [?]) diesen Standpunkt als transzendentalen Idealismus bezeichnet hat.

Unter den heute bekannten philosophischen Richtungen gibt es wohl keine einzige, die den genannten Auffassungen so grundsätzlich entgegensteht wie die Lehre von Fries. Fries legt Gewicht gerade auf *das*, was alle diese Philosophen bemüht sind wegzuargumentieren, nämlich auf die grundsätzliche Überschreitung des inhaltlichen Standpunktes durch die Formen des Denkens. Die kategoriale Formung des Urteils ist nur zu verstehen als der Ausdruck einer „Erkenntnisanforderung", als Ausdruck eines Suchens, das geleitet ist von einem Glauben, der bereits in jeder Wahrnehmung und überhaupt in jedem Zustand des Bewußtseins dunkel enthalten ist, der sich deutlicher aber erst vermittels des Denkens expliziert. Dieser Glaube gibt uns die Überzeugung, daß die im Erleben vorgefundenen Inhalte auf eine *Wirklichkeit*, auf eine Einheit von *Existierendem* zu beziehen sind, das in sich real und in realen Zusammenhängen verknüpft ist.

Weshalb man sich zur Anerkennung dieser Lehre so schwer entschließt, ist erklärlich. Erstens möchte man einen Standpunkt möglichst großer Vor-
103 aussetzungslosigkeit haben, und durch die | Annahme des Vernunftglaubens scheint zu viel von vornherein postuliert zu sein. Dieser Einwand bezieht sich aber genau besehen nicht auf die Fries'sche Lehre von der Vernunfterkenntnis schlechthin, sondern auf die Ansicht, daß sich der Inhalt dieser Vernunfterkenntnis in ganz bestimmten, endgültig formulierten Grundsätzen wiedergeben lasse. Ich möchte hier jedenfalls darauf hinweisen, daß der Grundgedanke der Fries'schen Lehre durchaus damit vereinbar ist, daß die Art, wie wir in der Naturforschung die Inhalte des Erlebens denkend auf Existierendes beziehen, nicht in der Erkenntnis bestimmt ist, sondern selbst mit zu der Aufgabe der Forschung gehört, die uns durch die Vernunft gestellt ist.

Es ist aber noch ein anderer Grund des Widerstrebens gegen die Friessche Lehre vorhanden. Ich sehe hier ab von den bekannten Schwierigkeiten, die sich an die Frage der richtigen Charakterisierung der Daseinsweise der Vernunft und ihrer Äußerungen knüpfen. Es ist, insbesondere in unserer Schule, viel darüber diskutiert worden, ob man die Vernunfterkenntnis psychologisch als eine Anlage oder als eine dauernde Tätigkeit anzusehen habe. Das sind Schwierigkeiten und Probleme, aber nicht eigentlich Einwendungen; Einwendungen sind es nur für den, der wiederum auf dem Gebiet der Psychologie den Standpunkt der restlosen Beschränkung auf die Inhalte durchführen will. Fries hat hier mehr vital gedacht; er wollte sich nicht mit einer Theorie der psychologischen Phänomene begnügen, sondern ging aus auf eine Theorie der Lebenseinheit; und ich meine, wir haben Grund, ihm darin beizupflichten. Was aber einen erheblicheren Grund des Widerstrebens gegen die Fries'schen Behauptungen bildet, ist, daß man bei näherem Zusehen gewahr wird, daß man hiermit auch schon notwendig auf den *transzendentalen Idealismus* gedrängt wird. Denn in der Tatsache, daß die Vernunfterkenntnis in der Form

| einer kategorialen Anforderung im Sinne einer nur existentialen, aber nicht 104
näher bestimmten Beziehung auf eine Welt des *Daseienden* sich geltend macht, liegt schon die Spaltung der Wahrheit. Zur eigentlichen Erkenntnis gehört sowohl das Inhaltliche wie die kategoriale Form. In der Meinung des naiven Realismus glauben wir dieses beides vereinigt vorzufinden und in der gewöhnlichen Wahrnehmung eine volle Erkenntnis vor uns zu haben. Die nähere Betrachtung nötigt uns in bekannter Weise, diesen Standpunkt aufzugeben; es zeigt sich uns, daß die erlebnismäßige einheitliche Wahrnehmung in Hinsicht auf die Erkenntnis betrachtet aus zweierlei Getrenntem besteht: dem Vorgelegtsein eines inhaltlichen Materials und dem existentialen Hinweis auf die Einheit des Wirklichen, in die jenes in einer zunächst nicht bekannten Weise einzuordnen ist.

Hierauf beruht die grundsätzliche Unvollkommenheit unseres Erkennens. Wir wissen von den Inhalten unseres Erlebens, können von ihnen erzählen; aber wie diese als eigentliche Wahrheit zu deuten sind, das ist nur ganz fragmentarisch bekannt, in einem Umfang allerdings, der gerade für die Zwecke unserer praktischen Lebenshaltung ausreicht, innerhalb deren wir uns mit der allgemeinen glaubensmäßigen Einstellung da behelfen, wo unsere wissenschaftliche Erkenntnis nicht mehr ausreicht.

Wenn wir so den transzendentalen Idealismus unabhängig von der Antinomienlehre einführen, können wir dabei durchaus mit Fries im Einklang bleiben. Denn die Lehre von der Spaltung der Wahrheit, die Fries nachträglich zur Auflösung und Erklärung der Antinomien vorbringt, bedarf zu ihrer Begründung gar nicht der Antinomien. Und das ist ein methodischer Vorteil; denn die Antinomienlehre enthält sehr viele problematische Argumentationen. Vor allem besteht die Gefahr, daß man zu viel beweist, | indem man 105
in der Antithesis Sätze aufstellt, die für das wissenschaftliche Denken gar nicht grundsätzlich unaufhebbar sind, und damit der Wissenschaft Grenzen zuschreibt, die sie tatsächlich nicht hat. Der transzendentale Idealismus darf nicht so gefaßt werden, daß er eine sachlich-strukturelle Diskrepanz zwischen dem in der Wirklichkeit Vorhandenen und dem in der wissenschaftlichen Weltansicht Behaupteten ergibt. Wenn die Wisssenschaft einen Sinn haben soll, so müssen wir den Standpunkt vertreten, daß dasjenige, was in der Wissenschaft als tatsächlich konstatiert wird – sofern es sich nicht um einen gewöhnlichen Irrtum im Sinne der Wissenschaft selbst handelt – , auch eine Tatsächlichkeit der Wirklichkeit zum Ausdruck bringt und jedenfalls nicht in einer solchen Weise von der Wirklichkeit abweicht, die im Rahmen der Wissenschaft selbst ausdrückbar ist. Die Begrenztheit der wissenschaftli-

chen Erkenntnis muß somit im eigentlichen Sinne auf den Bedingungen der Möglichkeit wissenschaftlicher Naturforschung überhaupt beruhen.

Eine solche Bedingung ist zuerst die Anknüpfung an die Wahrnehmung. Die Überlegungen, die uns nötigen, den naiven Realismus aufzugeben und überhaupt die wahrnehmbaren Qualitäten in der physikalischen Betrachtung auszuschalten, müssen den Antinomien zugerechnet werden. Eine weitere wesentliche Bedingung ist der diskursive Charakter der Wissenschaft, der davon herrührt, daß die Vernunfterkenntnis uns durch das Denken vermittelt wird. In der Tat ergibt sich hier auch etwas, das jedenfalls der Wirklichkeit inadäquat ist, nämlich die hypothetische Form der Naturgesetze. Es entspricht nicht der Idee eines realen Zusammenhanges, daß dieser in einem Gesetz besteht, wonach unter bestimmten Umständen etwas erfolgt. Ein solches Gesetz kann nur ein Erkenntnisgrund und kein Realgrund sein. Während
106 sich also die | vorher genannte Antinomie darauf bezieht, daß wir das *Daseiende* nicht wesenhaft kennen lernen, sondern nur als etwas, das in gewissen Relationen steht, betrifft diese zweite Antinomie das Wesenlose des *Zusammenhanges*. Das Bestehen von noch weiteren Antinomien, insbesondere in der Art der von Kant aufgestellten, soll keineswegs grundsätzlich bestritten werden. Nur bedarf es hier einer weitergehenden Revision des Vorliegenden, als sie bisher schon in unserer Schule ausgeübt worden ist.

Sehen wir uns nun einmal die faktische Naturwissenschaft daraufhin an, wie sie sich zu dem Programm der reinen Immanenz verhält, so finden wir, daß man sich trotz der bewußten Hervorkehrung der Machschen Gedanken, die insbesondere auch durch Einstein proklamiert wurden, von der Befolgung eines phänomenalistischen Programms mehr denn je entfernt hat. Wir haben da ganz abstrakte Existenzbehauptungen, die nur in ihren Konsequenzen auf die Wahrnehmung bezogen sind. Insbesondere gilt dies von der heutigen Quantentheorie. Nach dieser Theorie ist der physikalische Zustand nur durch *Wahrscheinlichkeits*aussagen auf die Wahrnehmung bezogen, d. h. die physikalischen Zustände, deren zeitlicher Zusammenhang ein wellentheoretisch-kausaler ist, machen sich für die Wahrnehmung nur dadurch geltend, daß sie gewisse diskrete Prozesse in einer aus den Zustandsgrößen berechenbaren statistischen Häufigkeit mit sich bringen, und diese Häufigkeiten sowie auch noch andere quantitative Bestimmungen jener Prozesse stellen sich für das Experiment durch anschauliche Größen, z. B. Farbe und Intensität von Spektrallinien, dar.

Auch die Einsteinsche allgemeine Relativitätstheorie entspricht keineswegs den Tendenzen eines reinen Phänomenalismus.

| Die Maßgesetzlichkeit der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit wird hier rein be- 107
grifflich eingeführt durch die Annahme eines metrischen Feldes, das ein physikalisches Objekt analog dem elektromagnetischen Felde bildet. Der größenmäßige Verlauf dieses Feldes wird durch zeitlich-räumliche Messungen in entsprechender Weise bestimmt, wie – auf Grund unserer gewohnten Raumvorstellung – die Gestalt des Erdkörpers durch Längenmessungen ermittelt wird. Während aber der Erdkörper nur durch seine Größe unsere Vorstellungskraft übersteigt, ist das metrische Feld, wegen der in ihm bestehenden Vereinigung des Räumlichen mit dem Zeitlichen, grundsätzlich außer dem Bereich des anschaulich Vorstellbaren.

Die Aufstellung solcher von der Beobachtung sehr weit abgehenden Theorien spricht stark zu Gunsten der Fries'schen Lehre von der nur denkend bewußten Erkenntnis. Freilich lassen sich diese Theorien nicht vereinigen mit der Kant-Fries'schen Lehre von der *reinen Anschauung*. Aber auch diese Lehre brauchen wir, um mit den heutigen wissenschaftlichen Theorien im Einklang zu bleiben, keineswegs im Ganzen aufzugeben, sondern nur in ihrer besonderen Ausgestaltung.

So wird allerdings mit Recht die Kantische Behauptung angefochten, daß die Geometrie und die Physik an den Rahmen unserer anschaulichen Vorstellungen von Raum und Zeit, als an eine Bedingung der Möglichkeit wissenschaftlicher Erkenntnis, gebunden seien. In der Tat geht die Geometrie in ihren Abstraktionen weit über den Rahmen der anschaulichen Raumvorstellung hinaus, indem sie sich zu einer allgemeinen Theorie der geordneten, mit Umgebungs-Beziehungen behafteten Mannigfaltigkeiten entwickelt hat, innerhalb deren die Gesetzlichkeit der Euklidischen Geometrie nur eine besondere, durch systematische Vorzüge ausgezeichnete Strukturgesetzlichkeit darstellt.

| Was ferner die theoretische Physik betrifft, so hat deren neuere Entwick- 108
lung mit aller Deutlichkeit gezeigt, daß die Möglichkeit theoretischer Naturerkenntnis von der Anerkennung einer bestimmten Struktur-Gesetzlichkeit des Raumes und der Zeit ganz unabhängig ist.

In anderer Hinsicht ist aber gerade in heutiger Zeit die Kantische Lehre von der reinen Anschauung zu erneuter Anerkennung gelangt. Es war vordem lange die Meinung herrschend, daß die Mathematik rein aus der Logik entwickelt werden könne. Der Versuch, diesen Gedanken zur Durchführung zu bringen, wie er zunächst von Frege, dann von Whitehead und Russell unternommen wurde, ist aber, ungeachtet der systematischen Geschlossenheit des

Werkes der *Principia Mathematica*, nicht gelungen. Die Untersuchung der Grundlagen der Mathematik hat vielmehr zweierlei gezeigt. Erstens, daß eine gewisse Art rein-anschaulicher Erkenntnis als Ausgangspunkt für die Mathematik genommen werden muß, ja, daß man schon die Logik als Theorie der Urteile und Schlüsse gar nicht ohne eine gewisse Heranziehung einer solchen anschaulichen Erkenntnis entwickeln kann. Es handelt sich dabei um die anschauliche Vorstellung des Diskreten, aus der wir die primitivsten kombinatorischen Vorstellungen, insbesondere die der Sukzession, entnehmen. An Hand dieser elementaren anschaulichen Erkenntnis entwickelt sich die konstruktive Arithmetik. Es zeigt sich zweitens, daß wir mit der konstruktiven Arithmetik für die Größenlehre nicht auskommen, daß vielmehr hierfür noch bestimmte Auffassungen hinzugenommen werden müssen, die sich auf die Totalität von Inbegriffen mathematischer Objekte beziehen, z. B. die Totalität der Gesamtheit der Zahlen, sowie der Gesamtheit der Zahlenmengen.

109 | Es ist nun bemerkenswert, daß Fries bereits – in seiner *Mathematischen Naturphilosophie* (*vide* [?]) – jene elementare Art mathematischer Erkenntnis unter dem Namen „Syntaktik" von der Arithmetik im Sinne der Größenlehre abgesondert hat. Von der Syntaktik sagt er:

> Sie „enthält die allgemeinste Abstraktion, welche sich überhaupt für die mathematische Erkenntnis machen läßt. Sie beruht einzig auf den Postulaten der *willkürlichen Anordnung gegebener Elemente* und ihrer *willkürlichen Wiederholung ohne Ende fort*. Da sie keine Axiome kennt, so hat sie auch keine eigene Theorie; ihre Operationen sind für sich unmittelbar verständlich ... ." (S$_d$eite$_d$. 70$_{d\text{-}d}$)

Allerdings hat Fries in seinen Ausführungen über die Syntaktik nur an die Permutations- und Kombinationslehre gedacht, während er die Zahlenlehre nur im Hinblick auf die Analysis betrachtete. So erklärt er:

> „Der Zweck des Zahlensystems ist überhaupt, die Erkenntnis der Größe auf Begriffe zu bringen, das heißt Größenverhältnisse nicht nur anschaulich, sondern durch Denken zu erkennen." (S$_d$eite$_d$. 121$_{d\text{-}d}$)

> „Die eigentümliche reine Anschauung der Arithmetik ist die stetige Reihe des Größern und Kleinern. Durch die wissenschaftliche Ausbildung dieser reinen Anschauung sollen wir Vorstellungen der Größe *denken* oder auf Begriffe bringen." (S$_d$eite$_d$. 77$_{d\text{-}d}$)

Um von diesen Fries'schen Ansichten zu einer dem heutigen Stande der Forschung entsprechenden Auffassung zu gelangen, bedarf es keiner sehr erheblichen Modifikationen. Allerdings müssen wir die elementare Zahlenlehre zu dem Bereich der Syntaktik rechnen. Ferner kann es nicht als ausgemacht gelten, daß die wissenschaftliche Ausbildung des Größenbegriffs nur ein Deutlichmachen einer rein-anschaulichen Erkenntnis ist. Wir müssen vielmehr die Möglichkeit in Betracht ziehen, daß es sich hier um eine | begriffliche 110
Verschärfung, eine „Idealisierung" – wie es Felix Klein nannte – der anschaulichen Vorstellung des Größeren und Kleineren handelt. Auch hiermit würde das rationale Element noch nicht aus der arithmetischen Größenlehre (der Analysis) ausgeschaltet sein. Denn jene begriffliche Verschärfung erfolgt ja, wie schon gesagt, mit Hinzunahme gewisser Totalitäts-Vorstellungen, und hierin würden wir etwas zu erblicken haben, was die Vernunft zu der anschaulichen Vorstellung hinzubringt. Dafür spricht insbesondere noch der Umstand, daß die in der Analysis angewandten Totalitäts-Vorstellungen sich für die mathematische Systematik dadurch geltend machen, daß sie im Bereich der reellen Zahlen und Funktionen die unbeschränkte Anwendung der logischen *Formen des allgemeinen und partikulären Urteils* ermöglichen. Und nach Fries sind ja die logischen Urteilsformen gerade dasjenige, wodurch wir uns im Denken der Vernunfterkenntnis bewußt werden.

Im Sinne einer solchen Auffassung würde die Analysis bereits einen Bestandteil der nur gedanklich bewußten Vernunfterkenntnis enthalten. Sie würde also denjenigen Erkenntnischarakter haben, den Fries der reinen Naturwissenschaft zuschreibt. In der Tat hat auch beim heutigen Stand der Wissenschaft die Mathematik durchaus die Rolle der reinen Naturwissenschaft, der „Rüstkammer der Hypothesen", nach dem Ausdruck von Fries.

Kennzeichnend ist auch, daß gegen das rationale Element in der Analysis sich – gleich vom Beginn der Präzisierung der infinitesimalen Methoden an – eine Art von phänomenalistischer Opposition erhoben hat. Zuerst von Kronecker und gegenwärtig von Brouwer und seiner Schule wird ein Standpunkt der Beschränkung auf das anschaulich Vorstellbare vertreten, zufolge dessen jene genannten Totalitäts-Voraussetzungen der Analysis grundsätzlich abgelehnt werden. Auf die Analogie dieses „In|tuitionismus" zu dem Stand- 111
punkt Machs hat kürzlich Weyl hingewiesen.

In ganz anderer Weise als von seiten dieser Opposition wird von Hilbert die erkenntnismäßig ausgezeichnete Stellung der elementar-anschaulichen (syntaktischen) oder, wie Hilbert sie nennt, der „finiten" Mathematik gegenüber der auf Ideenbildungen beruhenden systematischen Mathematik, insbesondere der Analysis und Mengenlehre, in seiner neuen *Beweistheorie* zur Geltung gebracht. Hilbert unterwirft hier die systematische Mathematik einer Art von Beweiskritik, durch die nach elementaren, finiten Methoden die Ideenbildungen der systematischen Mathematik auf ihre deduktive Auswirkung hin untersucht werden, wobei das Ziel ist, zu zeigen, daß die Anwendung und Verfolgung dieser Ideenbildungen niemals zu Unstimmigkeiten in den Konsequenzen und insbesondere daher auch nicht zu Widersprüchen gegen elementar$_{a\text{-}a}$anschaulich erkennbare Tatsachen führen kann.

Zur *philosophischen Ergänzung* dieser Beweistheorie ist *eine methodische Erörterung* erforderlich, durch die jene in der Beweistheorie systematisierten Prinzipien eine Art von Deduktion erhalten im Sinne einer Klärung ihrer erkenntnis-methodischen Bedeutung. Diese Erörterung müßte zugleich die Methoden der mathematischen Idealisierung klarstellen und damit eine befriedigende Antwort geben auf die Frage Nelsons, worin denn die Norm für eine Idealisierung bestehen könne, wenn sie nicht in der reinen Anschauung liege. –

Zum Schluß möchte ich noch andeuten, wie durch die Lehre des transzendentalen Idealismus die besondere Stellung des Ästhetischen verständlich wird. In unserer Schulsprache wurde der Ausdruck „ästhetisch“ für alle diejenigen objektiven Wertungen gebraucht, deren Maßstab sich nicht begriff-
112 lich fassen läßt. Es er|scheint sachgemäß – einerseits mit Rücksicht auf den sonst üblichen Sprachgebrauch und auch zur Hervorhebung wesentlicher Unterschiede – , die Anwendung des Wortes „ästhetisch“ auf diejenige Art der Wertung einzuschränken, bei der ein Gegenstand wertgeschätzt wird als *symbolische Darstellung* für etwas unserer endlichen Naturerkenntnis nicht direkt Zugängliches. Der Wert eines ästhetischen Gegenstandes als solchen haftet hiernach nicht dem Ding als wirklich Existierendem an, so wie es bei dem Wert eines edlen Charakters der Fall ist, dessen Dasein für sich Wert hat, sondern jener Wert ist grundsätzlich bezogen auf das vorstellende Subjekt, d. h. der Gegenstand ist nur als vorgestellter wertvoll. Das Objektive des ästhetischen Wertes besteht in der objektiven Bestimmtheit der *Eignung* eines Objektes, als symbolischer Ausdruck zu dienen. Das Interesse an einem solchen symbolischen Ausdruck beruht wesentlich auf der Unvollkommenheit unserer Naturansicht, d. h. der Spaltung der Wahrheit. Wir schätzen den symbolischen Ausdruck ethischer Werte in der Schönheit von Gestalten der Natur und der Kunst, da wir den ethischen Wert direkt nicht anschaulich an einem Wesen vorstellen, sondern nur denkend ihm zuschreiben können. Ebenso schätzen wir die begriffliche Einheit wissenschaftlicher Gedanken-

systeme als einen Ersatz für ein unmittelbares anschauliches Erfassen der Einheit im Zusammenhang des Wirklichen.

Nach dieser Ansicht kommt der theoretischen Wissenschaft, sofern wir sie, abgesehen von ihrer vitalen Bedeutung für unsere Orientierung und unser Handeln, rein unter dem systematischen Gesichtspunkt betrachten, eine *ästhetische Bedeutung* zu. Diese Auffassung bleibt in der Tat als die einzige Möglichkeit, wenn wir die Rolle der exakten Wissenschaft nicht entweder zu derjenigen einer vollendeten Weltanschauung übersteigern, oder zu | der- 113
jenigen eines bloßen Werkzeugs herabmindern wollen. Die wissenschaftliche Systematisierung hat danach nicht nur den Sinn einer Arbeitsersparung, sondern einer ästhetischen Aufgabe, die uns durch die Vernunft gestellt wird. Die Lehre von dem Vernunftglauben macht erst das Suchen nach systematischer Einheit und den Erfolg eines solchen Suchens verständlich, – vom Standpunkt Machs ist dieser Erfolg ein reines Wunder. Andererseits entnehmen wir aus der Lehre des transzendentalen Idealismus die Anweisung, uns in der Erwartung systematischer Vollständigkeit in der Naturerkenntnis zu bescheiden. –

Hiermit habe ich in kurzen Zügen dargelegt, in welchem Sinne ich mir eine lebendige Erhaltung und Weiterführung der Grundgedanken der Fries'schen Lehre denke. Sie wissen, daß es Nelsons besondere Sorge war, zu verhindern, daß die Gedanken der Fries'schen Philosophie wiederum der Vergessenheit anheimfallen könnten. Ich glaube, daß auch eine andere Gefahr verhütet werden muß, nämlich, daß diese Gedanken zwar in der Tradition erhalten, aber nur unter historischen Gesichtspunkten betrachtet werden, und nicht in lebendige Wechselwirkung mit dem philosophischen Geistesleben treten. Der Sinn meiner Ausführungen sollte sein, zu zeigen, daß die Fries'sche Lehre jedenfalls zu einer solchen lebendigen Wechselwirkung mit der Philosophie der Gegenwart fähig ist, und daß wir nicht besorgt zu sein brauchen, durch Modifikationen, die der Entwicklung der Wissenschaft Rechnung tragen, der Grundideen dieser Lehre verlustig zu gehen. Bedenken wir auch, daß es ja Nelsons eigene Absicht war, nach Abschluß seines Systems der Ethik das Gebiet der spekulativen Philosophie und damit insbesondere die philosophische Methodenlehre der Naturwissenschaften im Sinne einer Revision und Neubearbeitung der Fries'schen Gedanken in Angriff zu nehmen.

Kapitel 8

Bernays Project: Text No. 11

Methoden des Nachweises von Widerspruchsfreiheit und ihre Grenzen[†] (1932)

Methods for demonstrating consistency and their limitations

(*Internationaler Mathematiker-Kongreß Zürich, II. Band: Sektionsvorträge*, S. 201–202)

---

201 | Die Methoden, mit denen vom finiten Standpunkt Beweise der Widerspruchsfreiheit für formalisierte Theorien geführt worden sind, lassen sich nach folgender Einteilung überblicken.

202 | 1. *Methode der Wertung.* Ihre wesentliche Ausbildung hat diese durch das Hilbertsche Verfahren des Ausprobierens der Wertung erhalten. Nach diesem Verfahren haben Ackermann und v. Neumann den Nachweis für die Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie – allerdings unter der einschränkenden Bedingung erbracht, daß die Anwendung des Schlusses von n auf $(n+1)$ bloß auf Formeln mit nur freien Variablen zugelassen wird.

2. *Methode des Ausintegrierens.* Diese ist nur auf solche Gebiete anwendbar, die man mathematisch vollkommen beherrscht. Für diese gestat-

[†]The original title had a second line, reading „Von P. Bernays, Göttingen.“

tet sie, nicht nur die Frage der Widerspruchsfreiheit, sondern auch die der Vollständigkeit und Entscheidbarkeit in einem völlig positiven Sinne zu beantworten. Solche Gebiete sind insbesondere

a) der einstellige Funktionenkalkul, welcher von Löwenheim, Skolem und Behmann abschließend behandelt worden ist.

b) Teilformalismen der Zahlentheorie. Auf solche haben Herbrand und Presburger die Methode angewendet. Es zeigt sich dabei, daß die Peanoschen Axiome bei Zugrundelegung des Funktionenkalkuls der „ersten Stufe" (und der Gleichheitsaxiome) noch nicht zur Entwicklung der Zahlentheorie genügen. Erst durch die Hinzunahme der Rekursionsgleichungen für die Addition und die Multiplikation kommt die volle Zahlentheorie zustande[1]).

3. *Methode der Elimination.* Diese findet sich der Idee nach schon bei Russell und Whitehead, insbesondere in Anwendung auf den Begriff „derjenige, welcher". Die wirkliche Durchführung des Gedankens ist allerdings mühsam. Eine wesentliche Vereinfachung wird durch einen Ansatz von Hilbert bewirkt, der an die Einführung des „ε-Symbols" anknüpft.

Dieser liefert erstens – was Ackermann ausgeführt hat – noch einmal auf einem einfacheren Wege das Ergebnis der Wertungsmethode. Außerdem aber gelangt man von hier aus zu einem neuen Beweise eines zuerst von Herbrand gefundenen und bewiesenen Satzes, welcher eine Umkehrung bildet von dem berühmten Löwenheimschen Satz über die Erfüllbarkeit im Abzählbaren, und der ein allgemeines Verfahren zur Behandlung von Fragen der Widerspruchsfreiheit liefert.

Die trotz der mannigfachen gewonnenen Einsichten vorliegende Begrenztheit der Ergebnisse stellt sich auf Grund des neuen Gödelschen Satzes über die Grenzen der Entscheidbarkeit in formalen Systemen, in Verbindung mit der daran geknüpften Vermutung v. Neumanns, als eine grundsätzliche dar.

[1] Anders steht es, wenn man, wie Dedekind, von vornherein den Standpunkt der Klassenlogik zu Grunde legt; dieser enthält jedoch stärkere Voraussetzungen, als für die Zahlentheorie nötig sind.

Kapitel 9

Bernays Project: Text No. 12

Die Grundlagen der Mathematik, Bd. 1, §§ 1–2 (1934)

The Foundations of Mathematics

(Berlin: Springer 1934, rev. ^{2}1968, S. 1–44)

Translation by: *Ian Müller*
Revised by: *Volker Peckhaus, Mark Ravaglia; Michael Hallet, Dirk Schlimm*
Final revision by: *Bernd Buldt, Peter Winslow*

---

§ 1 Das Problem der Widerspruchsfreiheit in der Axiomatik als logisches Entscheidungsproblem

1 | Der Stand der Forschungen im Gebiete der Grundlagen der Mathematik, an den unsere Ausführungen anknüpfen, wird durch die Ergebnisse von dreierlei Untersuchungen gekennzeichnet:

1. der Ausbildung der axiomatischen Methode, insbesondere an Hand der Grundlagen der Geometrie,

2. der Begründung der Analysis nach der heutigen strengen Methode durch die Zurückführung der Größenlehre auf die Lehre von Zahlen und Zahlenmengen,

3. der Untersuchungen zur Grundlegung der Zahlen- und Mengenlehre.

An den hierdurch erreichten Standpunkt knüpft sich auf Grund einer verschärften methodischen Anforderung eine weitergehende Aufgabe$_a$**n**$_a$stellung, bei der es sich um eine neue Art der Auseinandersetzung mit dem Problem des Unendlichen handelt. Wir wollen auf diese Problemstellung von der Betrachtung der Axiomatik aus hinführen.

Der Terminus „axiomatisch" wird teils in weiterem, teils in engerem Sinne gebraucht. In der weitesten Bedeutung des Wortes nennen wir die Entwicklung einer Theorie axiomatisch, wenn die Grundbegriffe und Grundvoraussetzungen als solche an die Spitze gestellt werden und aus ihnen der weitere Inhalt der Theorie mit Hilfe von Definitionen und Beweisen logisch abgeleitet wird. In diesem Sinne ist die Geometrie von Euklid, die Mechanik von Newton, die Thermodynamik von Clausius axiomatisch begründet worden.

Eine Verschärfung, welche der axiomatische Standpunkt in Hilberts *Grundlagen der Geometrie* erhalten hat, besteht darin, daß man von dem sachlichen Vorstellungsmaterial, aus dem die Grundbegriffe einer Theorie gebildet sind, in dem axiomatischen Aufbau der Theorie nur dasjenige beibehält, was als Extrakt in den Axiomen formuliert ist, von allem sonstigen Inhalt aber abstrahiert. Bei der Axiomatik in der engsten Bedeutung kommt noch als weiteres Moment die *existentiale Form* hinzu. Durch diese unterscheidet sich *die axiomatische Methode* von der *konstruktiven* oder *genetischen* Methode der Begründung einer Theorie[1]. Während bei der konstruktiven Methode die | Gegenstände der Theorie bloß als eine *Gattung* von Dingen[2] eingeführt 2
werden, hat man es in einer axiomatischen Theorie mit einem festen System von Dingen (bzw. mehreren solchen Systemen) zu tun, welches einen von vornherein *abgegrenzten Bereich von Subjekten* für alle Prädikate bildet, aus denen sich die Aussagen der Theorie zusammensetzen.

In der Voraussetzung einer solchen Totalität des „Individuen-Bereiches" liegt – abgesehen von den trivialen Fällen, in denen eine Theorie es ohnehin nur mit einer endlichen, festbegrenzten Gesamtheit von Dingen zu tun hat – eine idealisierende Annahme, die zu den durch die Axiome formulierten

1[1] Vgl. zu dieser Gegenüberstellung den Anhang VI von Hilberts *Grundlagen der Geometrie*: „Über den Zahl$_d$en$_d$begriff" (*vide* [**?**], S. 180 f.).

2[1] Von Brouwer und seiner Schule wird in diesem Sinne das Wort „species" gebraucht.

Annahmen hinzutritt.

Charakteristisch ist für die verschärfte Form der Axiomatik, wie sie sich durch die Abstraktion vom Sachgehalt und durch die existentiale Fassung ergibt – wir wollen sie kurz die „formale Axiomatik“ nennen –, daß sie einen *Nachweis der Widerspruchsfreiheit* erforderlich macht, während die inhaltliche Axiomatik ihre Grundbegriffe durch den Hinweis auf bekannte Erlebnisse einführt und ihre Grundsätze entweder als evidente Tatsachen hinstellt, die man sich klarmachen kann, oder sie als Extrakt von Erfahrungskomplexen formuliert und damit dem Glauben Ausdruck gibt, daß man Gesetzen der Natur auf die Spur gekommen ist, zugleich in der Absicht, diesen Glauben durch den Erfolg der Theorie zu stützen.

Auch die formale Axiomatik bedarf sowohl zur Verfolgung der Deduktionen wie für den Nachweis der Widerspruchsfreiheit jedenfalls gewisser Evidenzen, aber mit dem wesentlichen Unterschied, daß diese Art von Evidenz nicht auf einer besonderen Erkenntnisbeziehung zu dem jeweiligen Sachgebiet beruht, vielmehr für jedwede Axiomatik ein und dieselbe ist, nämlich diejenige primitive Erkenntnisweise, welche die Vorbedingung für jede exakte theoretische Forschung überhaupt bildet. Wir werden diese Art der Evidenz noch näher zu betrachten haben.

Für die richtige Würdigung des Verhältnisses von inhaltlicher und formaler Axiomatik in ihrer Bedeutung für die Erkenntnis sind vor allem folgende Gesichtspunkte zu beachten:

Die formale Axiomatik bedarf der inhaltlichen notwendig als ihrer Ergänzung, weil durch diese überhaupt erst die Anleitung zur Auswahl der Formalismen und ferner für eine vorhandene formale Theorie auch erst die Anweisung zu ihrer Anwendung auf ein Gebiet der Tatsächlichkeit gegeben wird.

Andrerseits können wir bei der inhaltlichen Axiomatik deshalb nicht stehenbleiben, weil wir es in der Wissenschaft, wenn nicht durchweg, so doch vorwiegend mit solchen Theorien zu tun haben, die gar nicht vollkommen
3 den wirklichen Sachverhalt wiedergeben, sondern eine | *vereinfachende Idealisierung* des Sachverhaltes darstellen und darin ihre Bedeutung haben. Eine derartige Theorie kann gar nicht durch Berufung auf die evidente Wahrheit ihrer Axiome oder auf Erfahrung ihre Begründung erhalten, vielmehr kann diese Begründung nur in dem Sinne geschehen, daß die in der Theorie vollzogene Idealisierung, d. h. die Extrapolation, durch welche die Begriffsbildungen und Grundsätze der Theorie die Reichweite entweder der anschaulichen Evidenz oder der Erfahrungsdaten überschreitet, als eine widerspruchsfreie

eingesehen wird. Für diese Erkenntnis der Widerspruchsfreiheit nützt uns auch die Berufung auf die approximative Gültigkeit der Grundsätze nichts, denn ein Widerspruch kann ja gerade dadurch zustande kommen, daß eine Beziehung als strikte gültig angenommen wird, die nur in eingeschränktem Sinne besteht.

Wir sind also genötigt, die Widerspruchsfreiheit von theoretischen Systemen losgelöst von der Betrachtung der Tatsächlichkeiten zu untersuchen, und damit befinden wir uns bereits auf dem Standpunkt der formalen Axiomatik.

Was nun die bisherige Behandlung dieses Problems betrifft, so geschieht diese sowohl bei der Geometrie wie bei den physikalischen Disziplinen durch die *Methode der Arithmetisierung:* Man repräsentiert die Gegenstände der Theorie durch Zahlen oder Zahlensysteme und die Grundbeziehungen durch Gleichungen und Ungleichungen derart, daß auf Grund dieser Übersetzung die Axiome der Theorie entweder in arithmetische Identitäten bzw. beweisbare Sätze übergehen, wie es bei der Geometrie der Fall ist, oder aber, wie bei der Physik, in ein System von Bedingungen, deren gemeinsame Erfüllbarkeit sich auf Grund arithmetischer Existenzsätze erweisen läßt. Bei diesem Verfahren wird die Arithmetik, d. h. die Theorie der reellen Zahlen (die Analysis) als gültig vorausgesetzt, und wir kommen so zu der Frage, welcher Art diese Geltung ist.

Ehe wir uns aber mit dieser Frage beschäftigen, wollen wir zusehen, ob es nicht eine direkte Art gibt, das Problem der Widerspruchsfreiheit in Angriff zu nehmen. Wir wollen uns überhaupt einmal die Struktur dieses Problems deutlich vor Augen führen. Zugleich wollen wir uns bei dieser Gelegenheit schon mit der *logischen Symbolik* etwas vertraut machen, die sich für den vorliegenden Zweck als sehr nützlich erweist und die wir im folgenden eingehender zu betrachten haben werden.

Als Beispiel einer Axiomatik nehmen wir die *Geometrie der Ebene*, und zwar mögen der Einfachheit halber nur die Axiome für die Geometrie der Lage (welche in Hilberts *Grundlagen der Geometrie* als „Axiome der Verknüpfung“ und „Axiome der Anordnung“ aufgeführt werden) nebst dem Parallelen-Axiom in Betracht gezogen werden. Dabei empfiehlt es sich für unseren Zweck, von dem Hilbertschen Axiomensystem darin abzuweichen, daß wir nicht die Punkte und die Geraden | als zwei Systeme von Dingen zu 4
${}_a\underline{\mathrm{G}}_a$runde legen, sondern *nur die Punkte als Individuen nehmen.* An die Stelle der Beziehung „die Punkte x und y bestimmen die Gerade g“ tritt dann eine Beziehung zwischen *drei* Punkten: „x, y, z liegen auf einer Geraden“, für die wir die Bezeichnung $Gr(x, y, z)$ anwenden. Zu dieser Beziehung kommt

als zweite Grundbeziehung die des Zwischenliegens: „x liegt zwischen y und z“, die wir mit $Zw(x, y, z)$ bezeichnen[3]. Ferner tritt in den Axiomen, als ein zur Logik gehöriger Begriff die Identität von x mit y auf, für die wir das übliche Gleichheitszeichen $x = y$ anwenden.

Zur symbolischen Darstellung der Axiome brauchen wir nun noch die logischen Zeichen, und zwar erstens die Zeichen für Allgemeinheit und Existenz: Ist $P(x)$ ein auf das Ding x bezügliches Prädikat, so bedeutet $(x)P(x)$: „Alle x haben die Eigenschaft $P(x)$“, und $(Ex)P(x)$: „Es gibt ein x von der Eigenschaft $P(x)$“. (x) heißt das „Allzeichen“, (Ex) das „Seinszeichen“. Das Allzeichen und das Seinszeichen kann ebenso wie auf x auch auf irgendeine andere Variable y, z, u bezogen sein. Die zu einem solchen Zeichen gehörige Variable wird durch dieses Zeichen „gebunden“, entsprechend wie die Integrationsvariable durch das Integrationszeichen, so daß die Gesamtaussage nicht von einem Werte der Variablen abhängt.

Als weitere logische Zeichen kommen hinzu die Zeichen für die Negation und für die Satzverbindungen. Die Negation einer Aussage bezeichnen wir durch Überstreichen. Dabei soll im Falle eines in der Aussage voranstehenden Allzeichens oder Seinszeichens der Negationsstrich nur über dieses Zeichen gesetzt werden, und anstatt $\overline{x = y}$ werde kürzer „$x \neq y$“ geschrieben. Das Zeichen & („und“) zwischen zwei Aussagen bedeutet, daß beide Aussagen zutreffen („Konjunktion“). Das Zeichen $\vee$ („oder“ im Sinne von „vel“) zwischen zwei Aussagen bedeutet, daß mindestens eine der beiden Aussagen zutrifft („Disjunktion“).

Das Zeichen $\rightarrow$ zwischen zwei Aussagen bedeutet, daß das Zutreffen der ersten das Zutreffen der zweiten nach sich zieht, oder mit anderen Worten, daß die erste Aussage nicht zutrifft, ohne daß auch die zweite zutrifft („Implikation“). Eine Implikation $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ zwischen zwei Aussagen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ ist demnach nur dann falsch, wenn $\mathfrak{A}$ wahr und $\mathfrak{B}$ falsch ist; sonst ist sie wahr.

Die Verbindung des Zeichens der Implikation mit dem Allzeichen ergibt die Darstellung der allgemeinen hypothetischen Sätze. Z$_a$um$_a$ B$_a$eispiel$_a$ stellt eine Formel

$$(x)(y)\,(\mathfrak{A}(x, y) \rightarrow \mathfrak{B}(x, y))\,,$$

5 | worin $\mathfrak{A}(x, y)$, $\mathfrak{B}(x, y)$ die Darstellungen gewisser Beziehungen zwischen

3[1] Das Verfahren, die Punkte allein als Individuen zu nehmen, ist insbesondere in der Axiomatik von Oswald Veblen$_{a}$:$_{a}$ „A system of axioms for geometry“ (*vide* [?])$_{a}$,$_{a}$ zur Durchführung gebracht. Hier werden überdies alle geometrischen Beziehungen mit Hilfe der „Zwischen“-Beziehung definiert.

x und y sind, den Satz dar: „Wenn $\mathfrak{A}(x,y)$ besteht, so besteht $\mathfrak{B}(x,y)$“, oder auch: „für jedes Paar von Individuen x, y, für welches $\mathfrak{A}(x,y)$ besteht, besteht auch $\mathfrak{B}(x,y)$“[4].

Zur Zusammenfassung von Formelbestandteilen wenden wir in üblicher Weise Klammern an. Dabei soll zur Ersparung von Klammern festgesetzt werden, daß für die Trennung von symbolischen Ausdrücken $\rightarrow$ den Vorrang hat vor & und $\vee$, & vor $\vee$, und daß $\rightarrow$, &, $\vee$ alle den Vorrang haben vor den Allzeichen und den Seinszeichen. Wo keine Mehrdeutigkeit in Betracht kommt, lassen wir die Klammern weg, z. B. schreiben wir an Stelle des Ausdruckes

$$(x)\,((Ey)R(x,y))\,,$$

worin $R(x,y)$ irgendeine Beziehung zwischen x und y bezeichnet, einfach $(x)(Ey)R(x,y)$, da hier nur die eine Lesart in Betracht kommt: „zu jedem x gibt es ein y, für welches die Beziehung $R(x,y)$ besteht.“ –

Nunmehr sind wir in der Lage, das betrachtete Axiomsystem in Formeln aufzuschreiben. Zur Erleichterung soll bei den ersten Axiomen die sprachliche Fassung hinzugefügt werden.

Die Abgrenzung der Axiome entspricht nicht völlig derjenigen in Hilberts *Grundlagen der* $G_a\underline{eo}_a$*metrie*. Es soll deshalb bei jeder Axiomgruppe die Beziehung der hier in Formeln aufgestellten Axiome zu den Hilbertschen Axiomen angegeben werden[5].

I. Axiome der Verknüpfung.

1) $(x)(y)Gr(x,x,y)$.
   „x,x,y liegen stets auf einer Geraden.“

2) $(x)(y)(z)(Gr(x,y,z) \rightarrow Gr(y,x,z)$ & $Gr(x,z,y))$.
   „Wenn x,y,z auf einer Geraden liegen, so liegen stets auch y,x,z sowie auch x,z,y auf einer Geraden.“

3) $(x)(y)(z)(u)(Gr(x,y,z)$ & $Gr(x,y,u)$ & $x \neq y \rightarrow Gr(x,z,u))$.
   „Wenn x,y verschiedene Punkte sind und wenn x,y,z sowie x,y,u auf

[4][1] Von dem Verhältnis der hier definierten Disjunktion und Implikation zu den im üblichen Sinne disjunktiven und hypothetischen Aussagen-Verknüpfungen wird im §3 noch die Rede sein.

[5][2] Diese Angaben sind speziell für die Kenner von Hilberts *Grundlagen der Geometrie* bestimmt und beziehen sich auf die 7. Auflage (*vide* [**?**]).

einer Geraden liegen, so liegen stets auch x, z, u auf einer Geraden.“

4) $(Ex)(Ey)(Ez)\overline{Gr(x, y, z)}$.
„Es gibt Punkte x, y, z, die nicht auf einer Geraden liegen.“

Von diesen Axiomen treten 1) und 2) – auf Grund des geänderten Geraden-Begriffes – an die Stelle des Axioms I 1, 3) entspricht dem Axiom I 2, und
6 4) dem zweiten Teil des Axioms I 3. |

II. Axiome der Anordnung.

1) $(x)(y)(z)(Zw(x, y, z) \rightarrow Gr(x, y, z))_{a \dot{-} a}$

2) $(x)(y)\overline{Zw(x, y, y)}$.

3) $(x)(y)(z)(Zw(x, y, z) \rightarrow Zw(x, z, y) \;\&\; \overline{Zw(y, x, z)})$.

4) $(x)(y)(x \neq y \rightarrow (Ez)Zw(x, y, z))$.
„Wenn x und y verschiedene Punkte sind, so gibt es stets einen Punkt z derart, daß x zwischen y und z liegt.“

5) $$(x)(y)(z)(u)(v)\Big(\overline{Gr(x, y, z)} \;\&\; Zw(u, x, y) \;\&\; \overline{Gr(v, x, y)} \;\&\; \overline{Gr(z, u, v)} \;\rightarrow\; (Ew)\{Gr(u, v, w) \;\&\; \blacksquare\, Zw(w, x, z) \vee Zw(w, y, z) \blacksquare\, \}\Big).$$

1) und 2) bilden zusammen den ersten Teil des Hilbertschen Axioms II 1; 3) vereinigt den letzten Teil des Hilbertschen Axioms II 1 mit II 3; 4) ist das Axiom II 2, und 5) das Axiom der ebenen Anordnung II 4.

III. Parallelen-Axiom.

Da wir die Kongruenz-Axiome beiseite lassen, so müssen wir hier dem Parallelen-Axiom die erweiterte Fassung geben: „Zu jeder Geraden gibt es durch einen ausserhalb gelegenen Punkt stets eine und nur eine sie nicht schneidende Gerade[6]“.

Zur Erleichterung der symbolischen Formulierung werde das Symbol

$$Par(x, y; u, v)$$

[6][1] Vgl. in Hilberts *Grundlagen der Geometrie*, [**?**], S. 83.

als Abkürzung angewendet für den Ausdruck:

$$\overline{(Ew)}(Gr(x,y,w) \ \& \ Gr(u,v,w))$$

„Es gibt keinen Punkt w, der sowohl mit x und y wie mit u und v auf einer Geraden liegt".

Das Axiom lautet dann:

$$\begin{aligned}(x)(y)(z)\Big(\overline{Gr(x,y,z)} \ \rightarrow \\ (Eu)\{Par(x,y;z,u) \ \ \& \ \ (v)(Par(x,y;z,v) \rightarrow Gr(z,u,v))\}\Big).\end{aligned}$$

Denken wir uns die aufgezählten Axiome der Reihe nach durch & verbunden, so erhalten wir eine einzige logische Formel, welche eine Aussage über die Prädikate *Gr*, *Zw* darstellt und die wir mit

$$\mathfrak{A}(Gr, Zw)$$

bezeichnen wollen.

In entsprechender Weise können wir einen Lehrsatz der ebenen Geometrie, welcher nur die Lagen- und Anordnungsbeziehungen betrifft, durch eine Formel

$$\mathfrak{S}(Gr, Zw)$$

darstellen.

Diese Darstellung entspricht aber noch der inhaltlichen Axiomatik, bei
welcher die Grundbeziehungen als etwas in der Erfahrung oder in | anschau- 7
licher Vorstellung Aufweisbares und somit inhaltlich Bestimmtes angesehen
werden, worüber die Sätze der Theorie Behauptungen enthalten.

In der formalen Axiomatik dagegen werden die Grundbeziehungen nicht als von vornherein inhaltlich bestimmt angenommen, vielmehr erhalten sie erst *implizite* ihre Bestimmung durch die Axiome; und es wird auch in allen Überlegungen einer axiomatischen Theorie nur dasjenige von den Grundbeziehungen benutzt, was in den Axiomen ausdrücklich formuliert ist.

Wenn somit in der axiomatischen Geometrie die der anschaulichen Geometrie entsprechenden Beziehungsnamen wie „liegen auf", „zwischen" für die Grundbeziehungen gebraucht werden, so geschieht das nur als eine Konzession an das Gewohnte und um die Anknüpfung der Theorie an die anschaulichen Tatsachen zu erleichtern. In Wahrheit aber haben für die formale Axiomatik die Grundbeziehungen die Rolle von *variablen* Prädikaten.

Dabei verstehen wir „Prädikat“ hier sowie im folgenden stets in dem weiteren Sinne, daß auch Prädikate mit zwei oder mehreren Subjekten inbegriffen sind. Je nach der Anzahl der Subjekte sprechen wir von „einstelligen“, „zweistelligen“ ... Prädikaten.

In dem von uns betrachteten Teil der axiomatischen Geometrie handelt es sich um zwei variable dreistellige Prädikate

$$R(x, y, z), \quad S(x, y, z).$$

Das Axiomensystem besteht in einer Anforderung an zwei solche Prädikate, welche sich ausdrückt durch die logische Formel $\mathfrak{A}(R, S)$, die wir aus $\mathfrak{A}(Gr, Zw)$ erhalten, indem wir $Gr(x, y, z)$ durch $R(x, y, z)$, $Zw(x, y, z)$ durch $S(x, y, z)$ ersetzen. In dieser Formel tritt neben den variablen Prädikaten noch die inhaltlich zu deutende Identitätsbeziehung $x = y$ auf. Daß wir diese in inhaltlicher Bestimmtheit zulassen, ist nicht etwa ein Verstoß gegen unseren methodischen Standpunkt. Denn die Inhaltsbestimmung der Identität – die im eigentlichen Sinne überhaupt gar keine Beziehung ist – wird ja nicht dem besonderen Vorstellungskreis des axiomatisch zu untersuchenden Sachgebietes entnommen, sondern betrifft lediglich die Sonderung der Individuen, die mit der Zugrundelegung eines Individuenbereiches jedenfalls als gegeben angenommen werden muß.

Einem Satz von der Form $\mathfrak{S}(Gr, Zw)$ entspricht im Sinne dieser Auffassung die Feststellung logischen Inhalts, daß für *irgendwelche* Prädikate $R(x, y, z), S(x, y, z)$, die der Anforderung $\mathfrak{A}(R, S)$ genügen, auch die Beziehung $\mathfrak{S}(R, S)$ besteht, daß also für irgend zwei Prädikate $R(x, y, z), S(x, y, z)$ die Formel

$$\mathfrak{A}(R, S) \ \rightarrow \ \mathfrak{S}(R, S)$$

eine wahre Aussage darstellt. Ein geometrischer Satz wird auf diese Weise transformiert in einen Satz der reinen Prädikaten-Logik.

8 | Ganz entsprechend stellt sich von diesem Standpunkt auch die Frage der Widerspruchsfreiheit als ein Problem der reinen Prädikaten-Logik dar. Nämlich es handelt sich darum, ob zwei dreistellige Prädikate $R(x, y, z)$, $S(x, y, z)$ den in der Formel $\mathfrak{A}(R, S)$ zusammengefaßten Bedingungen genügen können[7] oder ob im Gegenteil die Annahme, daß die Formel $\mathfrak{A}(R, S)$ für ein gewisses Prädikatenpaar erfüllt ist, zu einem Widerspruch führt, so daß also allgemein für jedes Prädikatenpaar R, S die Formel $\overline{\mathfrak{A}(R, S)}$ eine richtige Aussage darstellt.

7[1] Diese hier noch unscharfe Form der Fragestellung wird später verschärft werden.

Eine solche Frage wie die hier vorliegende fällt unter das „*Entscheidungsproblem*“. Hierunter versteht man in der neueren Logik das Problem der Auffindung allgemeiner Methoden zur Entscheidung über die „Allgemeingültigkeit“ bzw. über die „Erfüllbarkeit“ logischer Formeln[8].

Dabei sind die zu untersuchenden Formeln solche, die aus Prädikaten-Variablen und Gleichungen – nebst den an den Subjektstellen stehenden Variablen, welche wir als „Individuen-Variablen“ bezeichnen – mit Hilfe der logischen Zeichen zusammengesetzt sind, wobei jede der Individuen-Variablen durch ein Allzeichen oder ein Seinszeichen gebunden ist.

Eine Formel dieser Art heißt allgemeingültig, wenn sie für *jede* Bestimmung der variablen Prädikate eine wahre Aussage darstellt, sie heißt erfüllbar, wenn sie bei *geeigneter* Bestimmung der variablen Prädikate eine wahre Aussage darstellt.

Einfache Beispiele von allgemeingültigen Formeln sind folgende:

$$(x)F(x) \mathbin{\&} (x)G(x) \;\rightarrow\; (x)(F(x) \mathbin{\&} G(x))$$
$$(x)P(x,x) \;\rightarrow\; (x)(Ey)P(x,y)$$
$$(x)(y)(z)(P(x,y) \mathbin{\&} y = z \;\rightarrow\; P(x,z)).$$

Beispiele erfüllbarer Formeln sind:

$$(Ex)F(x) \mathbin{\&} (Ex)\overline{F(x)}$$
$$(x)(y)(P(x,y) \mathbin{\&} P(y,x) \;\rightarrow\; x = y)$$
$$(x)(Ey)P(x,y) \mathbin{\&} (Ey)(x)\overline{P(x,y)}.$$

Diese ergeben z. B. für den Individuenbereich der Zahlen 1, 2 wahre Aussagen, wenn in der ersten Formel für $F(x)$ das Prädikat „x ist geradzahlig“, in der zweiten Formel für $P(x,y)$ das Prädikat $x \leqq y$, in der dritten Formel für $P(x,y)$ das Prädikat $x \leqq y \mathbin{\&} y \neq 1$ gesetzt wird.

Zu beachten ist, daß man zugleich mit der Bestimmung der Prädikate
auch den *Individuenbereich* festzulegen hat, auf den sich die Varia|blen $x, y,$ 9
$\ldots$ beziehen sollen. Dieser geht gewissermaßen als *versteckte Variable* in die logische Formel ein. Allerdings verhält sich die logische Formel in bezug auf ihre Erfüllbarkeit invariant gegenüber einer umkehrbar eindeutigen

8[2] Diese Erklärung trifft allerdings nur für das Entscheidungsproblem in engerer Bedeutung zu. Auf die weitere Fassung des Entscheidungsproblems brauchen wir in diesem Zusammenhang nicht einzugehen.

Abbildung des Individuenbereiches auf einen anderen, da ja die Individuen nur als variable Subjekte in den Formeln auftreten, und somit ist die einzige wesentliche Bestimmung des Individuenbereiches die *Anzahl der Individuen.*

Wir haben demnach betreffs der Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit folgende Fragen zu unterscheiden:

1. Die Frage nach der Allgemeingültigkeit für *jeden* Individuenbereich bzw. der Erfüllbarkeit für *irgendeinen* Individuenbereich.

2. Die Frage nach der Allgemeingültigkeit bzw. Erfüllbarkeit bei gegebener Anzahl der Individuen.

3. Die Frage, für welche Anzahlen von Individuen Allgemeingültigkeit bzw. Erfüllbarkeit besteht.

Bemerkt sei, daß man gut tut, die Individuenzahl 0 grundsätzlich auszuschließen, da die 0-zahligen Individuenbereiche formal eine Sonderstellung einnehmen und da andererseits ihre Betrachtung trivial und für die Anwendungen wertlos ist[9].

Des weiteren hat man zu beachten, daß es bei der Bestimmung eines Prädikates nur auf seinen „Wertverlauf“ ankommt, das heißt darauf, für welche Werte der (an den Subjektstellen auftretenden) Variablen das Prädikat zutrifft bzw. nicht zutrifft („wahr“ bzw. „falsch“ ist).

Dieser Umstand hat zur Folge, daß für eine *gegebene endliche* Individuenzahl die Allgemeingültigkeit bzw. die Erfüllbarkeit einer vorgelegten logischen Formel einen rein *kombinatorischen Sachverhalt* darstellt, den man durch elementares Durchprobieren aller Fälle feststellen kann.

Ist nämlich n die Anzahl der Individuen und k die Anzahl der Subjekte („Stellen“) eines Prädikates, so ist n^k die Anzahl der verschiedenen Wertsysteme der Variablen; und da für jedes dieser Wertsysteme das Prädikat entweder wahr oder falsch ist, so gibt es

$$2^{(n^k)}$$

[9][1] Die Festsetzung, daß jeder Individuenbereich mindestens ein Ding enthalten soll, so daß also ein wahres allgemeines Urteil für mindestens ein Ding zutreffen muß, darf nicht verwechselt werden mit der in der Aristotelischen Logik herrschenden Konvention, wonach ein Urteil von der Form „alle S sind P“ nur als wahr gilt, wenn überhaupt Dinge von der Eigenschaft S vorhanden sind. Diese Konvention wird in der neueren Logik fallen gelassen. Ein Urteil von jener Art stellt sich symbolisch dar in der Form $(x)(S(x) \to P(x))$ und gilt als wahr, wenn ein Ding x, sofern es die Eigenschaft $S(x)$ besitzt, auch stets die Eigenschaft $P(x)$ besitzt – unabhängig davon, ob es überhaupt Dinge von der Eigenschaft $S(x)$ gibt. Wir werden hierauf beim deduktiven Aufbau der Prädikatenlogik nochmals zu sprechen kommen. (*vide* [**?**], § 4, S. 105–106)

verschiedene mögliche Wertverläufe für ein k-stelliges Prädikat.

| Sind also 10

$$R_1, \ldots, R_t$$

die in einer vorgelegten Formel vorkommenden verschiedenen Prädikaten-Variablen,

$$k_1, \ldots, k_t$$

ihre Stellenzahlen, so ist

$$2^{(n^{k_1}+n^{k_2}+\,\cdots\,+n^{k_t})}$$

die Anzahl der in Betracht kommenden Systeme von Wertverläufen, oder, wie wir kurz sagen wollen, die Anzahl der verschiedenen möglichen Prädikatensysteme.

Hiernach bedeutet die Allgemeingültigkeit der Formel, daß für alle diese

$$2^{(n^{k_1}+\,\cdots\,+n^{k_t})}$$

explizite aufzählbaren Prädikatensysteme die Formel eine wahre Aussage darstellt, und ihre Erfüllbarkeit bedeutet, daß für eines unter diesen Prädikatensystemen die Formel eine wahre Aussage darstellt; dabei ist für ein festes Prädikatensystem die Wahrheit oder Falschheit der durch die Formel dargestellten Aussage wiederum durch ein endliches Ausprobieren entscheidbar, da ja für die mit Allzeichen oder Seinszeichen verbundenen Variablen nur n Werte in Betracht kommen, so daß das „alle“ gleichbedeutend ist mit einer n-gliedrigen Konjunktion, das „es gibt“ gleichbedeutend mit einer n-gliedrigen Disjunktion.

Nehmen wir als Beispiel die beiden vorher genannten Formeln

$$(x)P(x,x) \;\rightarrow\; (x)(Ey)P(x,y)$$
$$(x)(y)(P(x,y) \;\&\; P(y,x) \;\rightarrow\; x=y),$$

von denen die erste als allgemeingültige, die zweite als erfüllbare Formel angeführt wurde, und beziehen wir diese Formeln auf einen zweizahligen Individuenbereich.

Die beiden Individuen können wir durch die Ziffern 1, 2 bezeichnen. Wir haben hier $t = 1$, $n = 2$, $k_1 = 2$, also ist die Anzahl der verschiedenen Prädikatensysteme

$$2^{(2^2)} = 2^4 = 16.$$

An Stelle von $(x)P(x,x)$ können wir setzen

$$P(1,1) \;\&\; P(2,2),$$

an Stelle von $(x)(Ey)P(x,y)$

$$P(1,1) \vee P(1,2) \;\&\; P(2,1) \vee P(2,2),$$

so daß die erste der beiden Formeln übergeht in

$$P(1,1) \;\&\; P(2,2) \;\rightarrow\; P(1,1) \vee P(1,2) \;\&\; P(2,1) \vee P(2,2).$$

11 | Diese Implikation ist nun für diejenigen Prädikate P wahr, für welche

$$P(1,1) \;\&\; P(2,2)$$

falsch, sowie auch für diejenigen, bei welchen

$$P(1,1) \vee P(1,2) \;\&\; P(2,1) \vee P(2,2)$$

wahr ist. Man kann nun verifizieren, daß bei jedem der 16 Wertverläufe, die man erhält, indem man jedem der 4 Wertepaare

$$(1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (2,2)$$

je einen der Wahrheitswerte „wahr“, „falsch“ zuordnet, eine von jenen beiden Bedingungen erfüllt ist, so daß jedesmal die ganze Aussage den Wert „wahr“ erhält. ${}_a\underline{(}_a$Die Verifikation vereinfacht sich bei diesem Beispiel dadurch, daß zur Feststellung der Richtigkeit der Aussage bereits die Bestimmung der Werte von $P(1,1)$ und $P(2,2)$ genügt.${}_a\overline{)}_a$ Auf diese Weise läßt sich die Allgemeingültigkeit unserer ersten Formel für zweizahlige Individuenbereiche durch direktes Ausprobieren feststellen.

Die zweite der genannten Formeln ist für zweizahlige Individuenbereiche gleichbedeutend mit der Konjunktion

$$\begin{aligned} &(P(1,1) \;\&\; P(1,1) \rightarrow 1=1) \quad \& \quad (P(2,2) \;\&\; P(2,2) \rightarrow 2=2) \\ \& \;&(P(1,2) \;\&\; P(2,1) \rightarrow 1=2) \quad \& \quad (P(2,1) \;\&\; P(1,2) \rightarrow 2=1). \end{aligned}$$

Da $1=1$ und $2=2$ wahr ist, so sind die beiden ersten Konjunktionsglieder stets wahre Aussagen; die beiden letzten Glieder sind dann und nur dann wahr, wenn

$$P(1,2) \;\&\; P(2,1)$$

falsch ist.

Zur Erfüllung der betrachteten Formel hat man also nur diejenigen Wertbestimmungen von P auszuschließen, bei welchen die Paare $(1,2)$ und $(2,1)$ beide mit dem Werte „wahr“ versehen sind. Jede andere Wertbestimmung liefert eine wahre Aussage. Die Formel ist also für einen zweizahligen Individuenbereich erfüllbar.

Diese Beispiele sollen uns den rein kombinatorischen Charakter verdeutlichen, den das Entscheidungsproblem im Falle einer gegebenen endlichen Anzahl von Individuen besitzt. Aus diesem kombinatorischen Charakter ergibt sich insbesondere, daß für eine vorgeschriebene endliche Anzahl von Individuen die Allgemeingültigkeit einer Formel $\mathfrak{F}$ gleichbedeutend ist mit der Unerfüllbarkeit der Formel $\overline{\mathfrak{F}}$ und die Erfüllbarkeit der Formel $\mathfrak{F}$ gleichbedeutend damit, daß die Formel $\overline{\mathfrak{F}}$ nicht allgemeingültig ist. In der Tat stellt ja $\mathfrak{F}$ für diejenigen Prädikatensysteme eine richtige Aussage dar, für welche $\overline{\mathfrak{F}}$ eine falsche Aussage darstellt und umgekehrt.

Wenden wir uns nun zu unserer Frage der Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems zurück$_{a_2}$[10]$_{a_2}$. Denken wir uns das Axiomensystem, | wie 12
in dem betrachteten Beispiel, symbolisch aufgeschrieben und in eine Formel zusammengefaßt.

Die Frage der Erfüllbarkeit dieser Formel läßt sich dann für eine vorgeschriebene endliche Anzahl von Individuen, wenigstens grundsätzlich, durch Ausprobieren zur Entscheidung bringen. Angenommen nun, es sei für eine bestimmte endliche Anzahl von Individuen die Erfüllbarkeit der Formel festgestellt; dann erhalten wir dadurch einen Nachweis für die Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems, und zwar nach der *Methode der Aufweisung*, indem der endliche Individuenbereich zusammen mit den (zur Erfüllung der Formel) gewählten Wertverläufen der Prädikate ein Modell bildet, an dem wir das Erfülltsein der Axiome konkret aufzeigen können.

Es sei ein Beispiel einer solchen Aufweisung aus der geometrischen Axiomatik vorgebracht. Wir gehen aus von dem anfangs aufgestellten Axiomensystem. Hierin ersetzen wir das Axiom I 4), welches die Existenz dreier nicht auf einer Geraden liegenden Punkte fordert, durch das schwächere Axiom

I 4′) $(Ex)(Ey)(x \neq y)$.

„Es gibt zwei verschiedene Punkte.“

[10][1] Vgl. S. 139 f.

Ferner lassen wir das Axiom der ebenen Anordnung II 5) weg, nehmen aber dafür zwei Sätze, die mit Hilfe von II 5) beweisbar sind, unter die Axiome auf[11] indem wir erstens II 4) erweitern zu

$$\text{II } 4') \quad (x)(y)\{x \neq y \rightarrow (Ez)Zw(z,x,y) \ \&\ (Ez)Zw(x,y,z)\},$$

und zweitens hinzufügen

$$\text{II } 5') \quad (x)(y)(z)\{x \neq y \ \&\ x \neq z \ \&\ y \neq z \\ \rightarrow \ Zw(x,y,z) \vee Zw(y,z,x) \vee Zw(z,x,y)\}.$$

Das Parallelen-Axiom behalten wir bei. Das so entstehende Axiomensystem, dem an Stelle der früheren Formel $\mathfrak{A}(R,S)$ jetzt eine Formel $\mathfrak{A}'(R,S)$ entspricht, läßt sich, wie O. Veblen bemerkt hat[12], mit einem Individuenbereich von 5 Dingen erfüllen. Die Wahl der Wertverläufe für die Prädikate R, S – wir können hier ohne Gefahr eines Mißverständnisses wieder die Bezeichnungen „*Gr*“, „*Zw*“ gebrauchen – geschieht so, daß zunächst das Prädikat *Gr* so bestimmt wird, daß es für jedes Werte-Tripel x, y, z wahr ist. Dann sind, wie man sofort sieht, alle Axiome I, ferner II 1) und III erfüllt. Damit die Axiome II 2), 3), 5′), 4′) erfüllt werden, ist es notwendig und auch hinreichend, an das Prädikat *Zw* folgende drei Forderungen zu stellen:

13 | 1. Für ein Tripel x, y, z mit zwei übereinstimmenden Elementen ist *Zw* stets falsch.

2. Haben wir eine Kombination von drei verschiedenen unserer 5 Individuen, so sind unter den 6 möglichen Anordnungen der Elemente 2 Anordnungen mit gemeinsamem ersten Element, für welche *Zw* wahr ist, während für die übrigen 4 Anordnungen *Zw* falsch ist.

3. Jedes Paar von verschiedenen Elementen kommt sowohl als vorderes wie auch als hinteres Paar in je einem derjenigen Tripel vor, für welche *Zw* wahr ist.

Die erste Forderung läßt sich direkt durch Festsetzung erfüllen. Die gemeinsame Erfüllung der beiden anderen Forderungen geschieht in folgender Weise: Wir bezeichnen die 5 Elemente durch die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5. Die Zahl der Werte-Tripel aus drei verschiedenen Elementen, für die wir *Zw* noch

[11][1] Diese beiden Sätze wurden in den früheren Auflagen von Hilberts *Grundlagen der Geometrie* als Axiome aufgeführt. Es erwies sich, daß sie mittels des Axioms der ebenen Anordnung beweisbar sind. Vgl. hierzu [**?**], S. 5–6.

[12][2] In der bereits erwähnten Untersuchung „A system of axioms for geometry“, [**?**], S. 350.

zu definieren haben, ist gleich $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Je sechs davon gehören zu einer Kombination; für zwei von diesen soll *Zw* wahr, für die übrigen falsch sein. Wir müssen also die 20 Tripel unter den 60 angeben, für die *Zw* als wahr definiert wird. Das sind diejenigen, die man aus den vier Tripeln

$$(1\ 2\ 5),\ (1\ 5\ 2),\ (1\ 3\ 4),\ (1\ 4\ 3)$$

durch Anwendung der zyklischen Permutation (1 2 3 4 5) erhält.

Man verifiziert leicht, daß hierdurch allen Forderungen genügt wird. Auf diese Weise wird das Axiomensystem durch die Methode der Aufweisung als widerspruchsfrei erkannt[13].

Die an diesem Beispiel vorgeführte Methode der Aufweisung findet in neueren axiomatischen Untersuchungen sehr mannigfache Anwendungen. Sie dient hier vor allem zur Ausführung von *Unabhängigkeitsbeweisen*. Die Behauptung der Unabhängigkeit eines Satzes $\mathfrak{S}$ von einem Axiomensystem $\mathfrak{A}$ ist gleichbedeutend mit der Behauptung der Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems

$$\mathfrak{A}\ \&\ \overline{\mathfrak{S}},$$

welches wir erhalten, indem wir die Negation des Satzes $\mathfrak{S}$ als Axiom zu $\mathfrak{A}$ hinzunehmen. Ist dieses Axiomensystem für einen endlichen Individuenbereich erfüllbar, so kann seine Widerspruchsfreiheit nach der Methode der Aufweisung festgestellt werden[14]. Somit liefert diese Me|thode für viele 14
grundsätzliche Untersuchungen die ausreichende Ergänzung zur Methode des progressiven Schließens, indem durch das Schließen die Beweisbarkeit, durch die Aufweisungen die Unbeweisbarkeit von Sätzen aus gewissen Axiomen dargetan wird.

Ist nun die Methode der Aufweisung in ihrer Anwendung auf die endlichen Individuenbereiche beschränkt? Aus unserer bisherigen Überlegung können wir das noch nicht folgern. Wir sehen allerdings sogleich, daß bei einem unendlichen Individuenbereich die möglichen Prädikatensysteme nicht

13[1] Aus der Tatsache, daß das modifizierte Axiomensystem $\mathfrak{A}'$ mit einem 5-zahligen Individuenbereich erfüllbar ist, folgt auch sofort, daß die in diesem Axiomensystem enthaltenen Axiome die lineare Anordnung nicht vollständig bestimmen.

14[2] Eine Fülle von Beispielen für dieses Verfahren findet man in den Abhandlungen über lineare und zyklische Ordnung von E. V. Huntington und seinen Mitarbeitern. Siehe insbesondere die Abhandlung$_{a:a}$ „A new set of postulates for betweenness with proof of complete independence“ (*vide* [?]), S. 257–■ . Dort sind auch die vorausgehenden Abhandlungen angegeben.

mehr eine überblickbare Mannigfaltigkeit bilden und daß von einem Durchprobieren aller Wertverläufe keine Rede sein kann. Gleichwohl könnten wir doch bei bestimmten vorgelegten Axiomen in der Lage sein, ihre Erfüllung durch bestimmte Prädikate aufzuweisen. Und das ist auch tatsächlich der Fall. Nehmen wir z. B. das System der drei Axiome

$$(x)\overline{R(x,x)},$$
$$(x)(y)(z)(R(x,y)\ \&\ R(y,z) \ \rightarrow\ R(x,z)),$$
$$(x)(Ey)R(x,y).$$

Machen wir uns klar, was diese besagen: Wir gehen aus von einem Ding a des Individuenbereiches. Gemäß dem dritten Axiom muß es ein Ding b geben, für das $R(a,b)$ wahr ist, und dieses ist auf Grund des ersten Axioms von a verschieden. Zu b muß es wieder ein Ding c geben, für das $R(b,c)$ wahr ist, und auf Grund des zweiten Axioms ist auch $R(a,c)$ wahr; gemäß dem ersten Axiom ist c von a und von b verschieden. Zu c muß es wieder ein Ding d geben, für welches $R(c,d)$ wahr ist. Für dieses ist auch $R(a,d)$ und $R(b,d)$ wahr, und d ist von a, b, c verschieden. Das Verfahren dieser Überlegung kommt nicht zum Abschluß, und wir ersehen daraus, daß wir mit einem endlichen Individuenbereich die Axiome nicht erfüllen können. Andererseits aber können wir leicht eine Erfüllung durch einen unendlichen Individuenbereich aufweisen: Wir nehmen als Individuen die ganzen Zahlen und setzen für $R(x,y)$ die Beziehung „x ist kleiner als y“; dann ergibt sich sofort, daß alle drei Axiome erfüllt werden.

Der gleiche Fall liegt vor bei den Axiomen

$$(Ex)(y)\overline{S(y,x)},$$
$$(x)(y)(u)(v)(S(x,u)\ \&\ S(y,u)\ \&\ S(v,x) \ \rightarrow\ S(v,y)),$$
$$(x)(Ey)S(x,y).$$

Für diese weist man auch leicht nach, daß sie mit einem endlichen Individuenbereich nicht erfüllt werden können. Andererseits aber sind sie im Bereich der positiven ganzen Zahlen erfüllt, wenn wir für $S(x,y)$ die Beziehung setzen: „y folgt unmittelbar auf x“.

An diesen Beispielen bemerken wir aber, daß durch die gegebene Auf-
15 weisung die Frage der Widerspruchsfreiheit für die betrachteten | Axiome gar nicht endgültig erledigt, sondern vielmehr nur auf die nach der *Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie zurückgeführt* wird. Wir hatten auch bei

dem früheren Beispiel einer endlichen Aufweisung ganze Zahlen als Individuen genommen. Das geschah aber dort nur zum Zweck der einfachen Bezeichnung der Individuen. Wir hätten statt der Zahlen auch andere Dinge, etwa Buchstaben nehmen können. Auch war dasjenige, was von den Zahlen gebraucht wurde, derart, daß es durch konkreten Nachweis festgestellt werden konnte.

Im vorliegenden Falle kommen wir aber mit einer konkreten Zahlenvorstellung nicht aus; denn wir brauchen wesentlich die Voraussetzung, daß die *ganzen Zahlen einen Individuenbereich*, also eine fertige Gesamtheit bilden.

Diese Voraussetzung ist uns allerdings sehr geläufig, da wir in der neueren Mathematik dauernd mit ihr operieren, und man ist geneigt, sie für selbstverständlich zu halten. Es war zuerst Frege, der mit allem Nachdruck und mit scharfer, witziger Kritik die Forderung zur Geltung brachte, daß die Vorstellung der Zahlenreihe als einer fertigen Gesamtheit durch einen Nachweis ihrer Widerspruchsfreiheit gesichert werden müsse[15]. Ein solcher Nachweis war nach Freges Meinung nur im Sinne einer Aufweisung, als Existenzbeweis, zu führen, und er glaubte, die Objekte für eine solche Aufweisung im Bereich der Logik zu finden. Sein Verfahren der Aufweisung kommt darauf hinaus, daß er die Gesamtheit der Zahlen definiert mit Hilfe der als existierend vorausgesetzten Gesamtheit aller überhaupt denkbaren einstelligen Prädikate. Aber die hierbei zu ${}_a\underline{\mathrm{G}}_a$runde gelegte Voraussetzung, welche ohnehin schon einer unbefangenen Betrachtung als sehr verdächtig erscheint, hat sich durch die berühmten, von Russell und Zermelo entdeckten logischen und mengentheoretischen Paradoxien als unhaltbar erwiesen. Und das Mißlingen des Fregeschen Unternehmens hat mehr noch als Freges Dialektik das Problematische an der Annahme der Totalität der Zahlenreihe zum Bewußtsein gebracht.

Wir können nun angesichts dieser Problematik versuchen, an Stelle der Zahlenreihe einen anderen unendlichen Individuenbereich für die Zwecke der Widerspruchsfreiheitsbeweise zu verwenden, der nicht wie die Zahlenreihe ein reines Gedankengebilde, sondern aus dem Gebiet der sinnlichen Wahrnehmung oder aber der realen Wirklichkeit entnommen ist. Sehen wir aber näher zu, so werden wir gewahr, daß überall, wo wir im Gebiet der Sinnesqualitäten oder in der physikalischen Wirklichkeit unendliche Mannigfaltigkeiten anzutreffen glauben, von einem eigentlichen Vorfinden einer solchen Mannig-

[15][1] Gottlob Frege${}_{a\underline{:}a}$ *Grundlagen der Arithmetik* sowie *Grundgesetze der Arithmetik* (*vide* [**?**] und [**?**]).

faltigkeit keine Rede ist, daß vielmehr die Überzeugung von dem Vorhandensein einer solchen Mannigfaltigkeit auf einer gedanklichen Extrapolation
16 beruht, deren | Berechtigung jedenfalls ebensosehr der Prüfung bedarf wie die Vorstellung von der Totalität der Zahlenreihe.

Ein typisches Beispiel hierfür bildet diejenige Unendlichkeit, welche zu der bekannten Paradoxie des Zeno Anlaß gegeben hat. Wird eine Strecke in endlicher Zeit durchlaufen, so sind in dieser Durchlaufung nacheinander unendlich viele Teilvorgänge enthalten: die Durchlaufung der ersten Hälfte, dann die des folgenden Viertels, des folgenden Achtels usw. Haben wir es mit einer wirklichen Bewegung zu tun, so müssen diese Teildurchlaufungen lauter reale Prozesse sein, welche nach einander erfolgen.

Man pflegt diese Paradoxie mit dem Argument abzuweisen, daß die Summe von unendlich vielen Zeitintervallen doch konvergieren, also eine endliche Zeitdauer ergeben kann. Dadurch wird aber ein wesentlicher Punkt der Paradoxie nicht getroffen, nämlich das Paradoxe, was darin liegt, daß eine unendliche Aufeinanderfolge, deren Vollendung wir in der Vorstellung nicht nur faktisch, sondern auch grundsätzlich nicht vollziehen können, in der Wirklichkeit abgeschlossen vorliegen soll.

Tatsächlich gibt es auch eine viel radikalere Lösung der Paradoxie. Diese besteht in der Erwägung, daß wir keineswegs genötigt sind, zu glauben, daß die mathematische raum-zeitliche Darstellung der Bewegung für beliebig kleine Raum- und Zeitgrößen noch physikalisch sinnvoll ist, vielmehr allen Grund haben zu der Annahme, daß jenes mathematische Modell die Tatsachen eines gewissen Erfahrungsbereiches, eben die Bewegungen$_{d_2}\underline{,}_{d_2}$ innerhalb der unserer Beobachtung bisher zugänglichen Größenordnungen, im Sinne einer einfachen Begriffsbildung extrapoliert, ähnlich wie die Mechanik der Kontinua eine Extrapolation vollzieht, indem sie die Vorstellung einer kontinuierlichen Erfüllung des Raumes mit Materie zu $_a\underline{\mathrm{G}}_a$runde legt: so wenig wie eine Wassermenge bei unbegrenzter räumlicher Teilung immer wieder Wassermengen ergibt, ebensowenig wird es bei einer Bewegung der Fall sein, daß durch ihre Teilung ins Unbegrenzte immer wieder etwas entsteht, das sich als Bewegung charakterisieren läßt. Geben wir dieses zu, so schwindet die Paradoxie.

Das mathematische Modell der Bewegung hat ungeachtet dessen als *idealisierende Begriffsbildung* zum Zweck der vereinfachten Darstellung seinen bleibenden Wert. Für diesen Zweck muß es außer der approximativen Übereinstimmung mit der Wirklichkeit noch die Bedingung erfüllen, daß die in ihm vollzogene Extrapolation auch in sich widerspruchsfrei ist. Unter diesem

Gesichtspunkt wird unsere mathematische Vorstellung von der Bewegung durch die Zenosche Paradoxie nicht im geringsten erschüttert; das genannte mathematische Gegenargument hat hierfür seine volle Geltung. Eine andere Frage aber ist, ob wir einen wirklichen Nachweis für die Widerspruchsfreiheit der mathematischen Theorie der Bewegung besitzen. Diese Theorie beruht
wesentlich auf | der mathematischen Theorie des Kontinuums, diese wie- 17
derum stützt sich wesentlich auf die Vorstellung von der Menge aller ganzen Zahlen als einer fertigen Gesamtheit. Wir kommen also auf Umwegen zu dem Problem zurück, das wir durch den Hinweis auf die Tatsachen der Bewegung zu umgehen versuchten.

Ähnlich verhält es sich in all den Fällen, wo man glaubt, direkt eine Unendlichkeit als durch Erfahrung oder durch Anschauung gegeben aufweisen zu können, wie etwa die Unendlichkeit der von Oktave zu Oktave ins Unendliche fortschreitenden Tonreihe oder die stetige unendliche Mannigfaltigkeit beim Übergang von einer Farbenqualität zu einer anderen. Die nähere Betrachtung zeigt jeweils, daß eine Unendlichkeit uns hier tatsächlich gar nicht gegeben ist, sondern erst durch einen gedanklichen Prozeß interpoliert oder extrapoliert wird.

Auf Grund dieser Überlegungen kommen wir zu der Einsicht, daß die Frage nach der Existenz einer unendlichen Mannigfaltigkeit durch eine Berufung auf außermathematische Objekte nicht entschieden werden kann, sondern innerhalb der Mathematik selbst gelöst werden muß. Wie soll aber eine solche Lösung angesetzt werden? Auf den ersten Blick scheint es, daß hiermit etwas Unmögliches verlangt wird: Unendlich viele Individuen vorzuführen, ist grundsätzlich unmöglich; daher kann ein unendlicher Individuenbereich als solcher nur durch seine Struktur gekennzeichnet werden, d. h. durch Beziehungen, welche zwischen seinen Elementen bestehen. Mit anderen Worten: es muß der Nachweis erbracht werden, daß für ihn gewisse formale Relationen sich erfüllen lassen. Die Existenz eines unendlichen Individuenbereiches läßt sich also *gar nicht anders darstellen als durch die Erfüllbarkeit gewisser logischer Formeln*; das sind dann aber gerade Formeln von der Art wie diejenigen, durch deren Untersuchung wir auf die Frage nach der Existenz eines unendlichen Individuenbereiches geführt worden sind und deren Erfüllbarkeit eben durch die Aufweisung eines unendlichen Individuenbereiches dargetan werden sollte. Der Versuch, die Methode der Aufweisung auf die betrachteten Formeln anzuwenden, führt uns also auf einen Circulus vitiosus.

Nun sollte uns aber die Aufweisung nur als Mittel dienen zum Nachweis der Widerspruchsfreiheit von Axiomensystemen. Auf dieses Verfahren brachte uns die Betrachtung von Individuenbereichen mit einer gegebenen endlichen Anzahl von Individuen, indem wir erkannten, daß für einen solchen Bereich die Widerspruchsfreiheit einer Formel gleichbedeutend ist mit ihrer Erfüllbarkeit.

Im Falle unendlicher Individuenbereiche ist der Sachverhalt komplizierter. Es gilt hier zwar auch noch, daß ein durch eine Formel $\mathfrak{A}$ dargestelltes Axiomensystem dann und nur dann widerspruchsvoll ist, wenn die Formel $\overline{\mathfrak{A}}$ allgemeingültig ist. Aber wir können jetzt, da wir es nicht mehr mit einem
18 überblickbaren Vorrat von Wertverläufen für die | variablen Prädikate zu tun
haben, nicht mehr folgern, daß uns, falls $\overline{\mathfrak{A}}$ nicht allgemeingültig ist, auch schon ein Modell zur Erfüllung des Axiomensystems $\mathfrak{A}$ zu Gebote steht.

Die Erfüllbarkeit eines Axiomensystems ist demnach, wenn ein unendlicher Individuenbereich in Frage kommt, zwar eine hinreichende Bedingung für seine Widerspruchsfreiheit, aber als notwendige Bedingung ist sie nicht erwiesen. Wir können daher nicht erwarten, daß sich allgemein der Nachweis der Widerspruchsfreiheit durch einen Nachweis der Erfüllbarkeit erbringen lasse. Andrerseits aber sind wir auch gar nicht genötigt, die Widerspruchsfreiheit durch die Feststellung der Erfüllbarkeit zu erweisen, vielmehr können wir bei der ursprünglichen negativen Bedeutung der Widerspruchsfreiheit stehenbleiben. Das heißt – wenn wir uns das Axiomensystem wieder durch eine Formel $\mathfrak{A}$ dargestellt denken –, wir brauchen nicht die Erfüllbarkeit der Formel $\mathfrak{A}$ zu zeigen, sondern vielmehr nur nachzuweisen, daß die Annahme der Erfüllung von $\mathfrak{A}$ durch gewisse Prädikate nicht auf einen logischen Widerspruch führen kann.

Um das Problem von dieser Seite in Angriff zu nehmen, werden wir darauf ausgehen, uns einen Überblick über die möglichen logischen Schlüsse zu verschaffen, welche aus einem Axiomensystem gezogen werden können. Als das geeignete Mittel hierfür bietet sich die Methode der *Formalisierung des logischen Schließens*, wie sie von Frege, Schröder, Peano und Russell ausgebildet worden ist.

Wir gelangen somit zu folgender Aufgabe$_a\mathbf{n}_a$stellung: 1. die Prinzipien des logischen Schließens streng zu formalisieren und dadurch zu einem völlig überblickbaren System von Regeln zu machen; 2. für ein vorgelegtes Axiomensystem $\mathfrak{A}$ (das als widerspruchsfrei erwiesen werden soll) den Nachweis zu führen, daß beim Ausgehen von diesem *System* $\mathfrak{A}$ *mittels logischer Deduktionen kein Widerspruch zustande kommen kann*, d. h. daß nicht zwei Formeln beweisbar werden, von denen die eine die Negation der andern ist.

Wir brauchen nun aber diesen Nachweis nicht für jedes Axiomensystem

einzeln auszuführen, sondern können uns die bereits am Anfang unserer Betrachtung erwähnte Methode der *Arithmetisierung*$_{a_2}$[16]$_{a_2}$ zunutze machen. Diese läßt sich von unserem jetzigen Standpunkt so charakterisieren: Wir suchen uns ein Axiomensystem $\mathfrak{A}$, welches einerseits eine so übersichtliche Struktur hat, daß wir den Nachweis seiner Widerspruchsfreiheit (im Sinne der gestellten Aufgabe 2) erbringen können, das aber andererseits auch so reichhaltig ist, daß wir aus einer *als vorhanden vorausgesetzten* Erfüllung dieses Axiomensystems durch ein System $\mathfrak{S}$ von Dingen und Beziehungen Erfüllungen für die Axiomensysteme der geometrischen und physikalischen Disziplinen ableiten können in der Weise, daß wir die Gegenstände eines solchen Axiomensystems $\mathfrak{B}$ durch Individuen aus $\mathfrak{S}$ oder Komplexe solcher
Individuen | repräsentieren und für die Grundbeziehungen solche Prädikate 19
setzen, die sich durch logische Operationen aus den Grundbeziehungen von $\mathfrak{S}$ bilden lassen.

Damit ist dann das betreffende Axiomensystem $\mathfrak{B}$ in der Tat als widerspruchsfrei erwiesen; denn ein Widerspruch, der sich als Folgerung aus diesem Axiomensystem ergäbe, würde sich ja als ein aus dem Axiomensystem $\mathfrak{A}$ ableitbarer Widerspruch darstellen, während doch das Axiomensystem $\mathfrak{A}$ als widerspruchsfrei erkannt ist.

Als ein solches Axiomensystem $\mathfrak{A}$ bietet sich die (axiomatisch aufgebaute) Arithmetik dar.

Diese „Methode der Zurückführung“ axiomatischer Theorien auf die Arithmetik erfordert nicht, daß die Arithmetik einen anschaulich vorweisbaren Tatbestand bilde, vielmehr braucht hierzu die Arithmetik nichts anderes zu sein als eine Ideenbildung, die wir als widerspruchsfrei nachweisen können und welche einen systematischen Rahmen liefert, in den die Axiomensysteme der theoretischen Wissenschaften sich einordnen lassen, so daß die in ihnen vollzogenen Idealisierungen des tatsächlich Gegebenen durch diese Einordnung ebenfalls als widerspruchsfrei erwiesen werden. –

Es seien die Ergebnisse der letzten Betrachtung kurz zusammengefaßt: Das Problem der Erfüllbarkeit eines Axiomensystems (bzw. einer logischen Formel), welches im Falle endlicher Individuenbereiche positiv durch Aufweisung gelöst werden kann, ist im Falle, wo zur Erfüllung der Axiome nur ein unendlicher Individuenbereich in Betracht kommt, nicht nach dieser Methode lösbar, weil die Existenz unendlicher Individuenbereiche nicht als ausgemacht

16[1] Vgl. S. 140.

gelten kann, vielmehr die Einführung solcher unendlichen Bereiche erst durch einen Nachweis der Widerspruchsfreiheit für ein das Unendliche charakterisierendes Axiomensystem gerechtfertigt wird.

Angesichts des Versagens der positiven Entscheidungsmethode bleibt uns nur der Weg, den Nachweis der Widerspruchsfreiheit im negativen Sinne, das heißt als *Unmöglichkeitsbeweis* zu führen, wozu eine Formalisierung des logischen Schließens erforderlich wird. –

Wenn wir nun an die Aufgabe eines solchen Unmöglichkeitsbeweises herantreten, so müssen wir uns darüber klar sein, daß dieser nicht wieder mit der Methode des axiomatisch-existentialen Schließens geführt werden kann. Wir dürfen vielmehr nur solche Schlußweisen anwenden, die von idealisierenden Existenzannahmen frei sind.

Auf Grund dieser Erwägung stellt sich aber sogleich folgender Gedanke ein: Wenn wir ohne axiomatisch-existentiale Annahmen den Unmöglichkeitsbeweis führen können, sollte es dann nicht auch möglich sein, auf solche Weise direkt die ganze Arithmetik zu begründen und damit jenen Unmöglichkeitsbeweis ganz überflüssig zu machen? Dieser Frage wollen wir uns im folgenden Paragraphen zuwenden. |

§ 2 Die elementare Zahlentheorie. – Das finite Schließen und seine Grenzen.

Die zum Schluß des vorigen Paragraphen aufgeworfene Frage, ob wir nicht durch eine von der Axiomatik unabhängige Methode direkt die Arithmetik begründen und dadurch einen besonderen Nachweis der Widerspruchsfreiheit entbehrlich machen können, gibt uns Anlaß, uns darauf zu besinnen, daß ja die Methode der verschärften Axiomatik, insbesondere das existentiale Schließen, unter Zugrundelegung eines festumgrenzten Individuenbereiches, gar nicht das ursprüngliche Verfahren der Mathematik ist.

Die Geometrie wurde zwar von vornherein axiomatisch aufgebaut. Aber die Axiomatik Euklids ist inhaltlich und anschaulich gemeint. Es wird hier nicht von der anschaulichen Bedeutung der Figuren abstrahiert. Ferner haben auch die Axiome nicht die existentiale Form. Euklid setzt nicht voraus, daß die Punkte sowie die Geraden je einen festen Individuenbereich bilden. Er stellt deshalb auch nicht Existenz-Axiome auf, sondern Konstruktions-Postulate.

Ein solches Postulat ist z. B., daß man zwei Punkte durch eine Gerade verbinden kann; ferner, daß man um einen gegebenen Punkt einen Kreis mit vorgeschriebenem Radius ziehen kann.

Dieser methodische Standpunkt ist jedoch nur dann durchführbar, wenn die Postulate als der Ausdruck einer bekannten Tatsächlichkeit oder einer unmittelbaren Evidenz angesehen werden. Die hiermit sich erhebende Frage nach dem Geltungsbereich der geometrischen Axiome ist bekanntermaßen sehr heikel und strittig, und es besteht gerade ein wesentlicher Vorzug der formalen Axiomatik darin, daß sie die Begründung der Geometrie von der Entscheidung dieser Frage unabhängig macht.

Von dieser Problematik, welche mit dem besonderen Charakter der geometrischen Erkenntnis zusammenhängt, sind wir frei im Gebiet der Arithmetik, und in der Tat ist auch hier, in den Disziplinen der elementaren Zahlenlehre und der Algebra, der Standpunkt der direkten inhaltlichen, ohne axiomatische Annahmen sich vollziehenden Überlegung am reinsten ausgebildet. $_{d_2}$**Neuer Absatz**$_{d_2}$

Das Kennzeichnende für diesen methodischen Standpunkt ist, daß die Überlegung$_{a_2}\underline{\text{en}}_{a_2}$ in der Form von *Gedankenexperimenten* an Gegenständen angestellt werden, die als *konkret vorliegend* angenommen werden. In der Zahlentheorie handelt es sich um Zahlen, die als vorliegend gedacht werden, in der Algebra um vorgelegte Buchstabenausdrücke mit gegebenen Zahl-Koeffizienten.

Wir wollen das Verfahren genauer betrachten, und die Anfangsgründe methodisch etwas verschärfen. In der Zahlentheorie haben wir ein Ausgangsobjekt und einen Prozeß des Fortschreitens. Beides müssen | wir in bestimmter Weise anschaulich festlegen. Die besondere Art der $|_1$ Festlegung ist dabei 21
unwesentlich, nur muß die einmal getroffene Wahl für die ganze Theorie beibehalten werden. Wir wählen als Ausgangsding die Ziffer 1 und als Prozeß des Fortschreitens das Anhängen von 1.

Die Dinge, die wir, ausgehend von der Ziffer 1, durch Anwendung des Fortschreitungsprozesses erhalten, wie z. B.

$$1, 11, 1111$$

sind Figuren von folgender Art: sie beginnen mit 1, sie enden mit 1; auf jede 1, die nicht schon das Ende der Figur bildet, folgt eine angehängte 1. Sie werden durch Anwendung des Fortschreitungsprozesses, also durch einen konkret zum Abschluß kommenden *Aufbau* erhalten, und dieser Aufbau läßt sich daher auch durch einen schrittweisen *Abbau* rückgängig machen.

$_{a_2}$**Wir wollen diese Figuren, mit einer leichten Abweichung vom gewohnten Sprachgebrauch, als „*Ziffern*“ bezeichnen.**$_{a_2}$[a]

Was die genaue figürliche Beschaffenheit der Ziffern betrifft, so denken wir uns, wie üblich, für diese einen gewissen Spielraum gelassen, d. h. kleine Unterschiede in der Ausführung, sowohl was die Form der 1 wie ihre Größe, wie auch den Abstand beim Ansetzen einer 1 betrifft, sollen nicht in Betracht gezogen werden. Was wir als wesentlich brauchen, ist nur, daß wir sowohl in der 1 wie in der Anfügung ein anschauliches Objekt haben, das sich in eindeutiger Weise $_{d_2}$**immer**$_{d_2}$wiedererkennen läßt, und daß wir an einer Ziffer stets die diskreten Teile, aus denen sie aufgebaut ist, überblicken können.

Neben den Ziffern führen wir noch anderweitige Zeichen ein, Zeichen „zur Mitteilung“, die von den Ziffern, welche die *Objekte* der Zahlentheorie bilden, grundsätzlich zu unterscheiden sind.

Ein Zeichen zur Mitteilung ist für sich genommen auch eine Figur, von der wir auch voraussetzen, daß sie sich eindeutig wiedererkennen läßt und bei der es auf geringe Unterschiede in der Ausführung nicht ankommt. Innerhalb der Theorie wird es aber nicht zum Gegenstand der Betrachtung gemacht, sondern bildet hier ein Hilfsmittel zur kurzen und deutlichen Formulierung von Tatsachen, Behauptungen und Annahmen.

Wir gebrauchen in der Zahlentheorie folgende Arten von Zeichen zur Mitteilung:

1. Kleine deutsche Buchstaben zur Bezeichnung für irgendeine nicht festgelegte Ziffer;

2. die üblichen Nummern zur Abkürzung für bestimmte Ziffern, z. B. 2 für 11, 3 für 111;

3. $_{a_2}$**Zeichen für gewisse Bildungsprozesse und Rechenoperationen, durch die wir aus gegebenen Ziffern andere gewinnen. Diese können sowohl auf bestimmte wie auch auf unbestimmt gelassene Ziffern angewandt werden, wie z. B. in $\mathfrak{a} + 11$;**$_{a_2}$[b]

22 | 4. das Zeichen $=$ zur Mitteilung der figürlichen Übereinstimmung, das Zeichen $\neq$ zur Mitteilung der Verschiedenheit zweier Ziffern: $_{a_2}$**die Zeichen**

[a] Erste Auflage: „Diese Figuren bilden eine Art von Ziffern; wir wollen hier das Wort „*Ziffer*“ schlechtweg zur Bezeichnung *dieser* Figuren gebrauchen.“

[b] Erste Auflage: „Zeichen f
ür gewisse Handlungen, die wir mit den Ziffern vornehmen, und gewisse Bildungsprozesse, durch die wir aus gegebenen Ziffern andere gewinnen.“

$<, >_{a_2}$ zur Bezeichnung[c] der noch zu erklärenden Größenbeziehung zwischen Ziffern.

5. Klammern als Zeichen für die Art der Aufeinanderfolge von Prozessen, wo diese nicht ohne weiteres deutlich ist.

In welcher Weise mit den eingeführten Zeichen operiert wird, und wie die inhaltlichen Überlegungen anzustellen sind, wird am besten deutlich, wenn wir die Zahlentheorie ein Stück weit in den Hauptzügen entwickeln.

Das erste, was wir an den Ziffern feststellen, ist die Größenbeziehung. Es sei eine Ziffer $\mathfrak{a}$ von einer Ziffer $\mathfrak{b}$ verschieden. Überlegen wir, wie das sein kann. Beide beginnen mit 1, und der Aufbau schreitet für $\mathfrak{a}$ wie für $\mathfrak{b}$ in ganz derselben Weise fort, sofern nicht eine der Ziffern endigt, während der Aufbau der anderen noch weiter geht. Dieser Fall muß also einmal eintreten, und somit stimmt die eine Ziffer mit einem *Teilstück* der anderen überein, oder genauer ausgedrückt: der Aufbau der einen Ziffer stimmt mit einem Anfangsstück von dem Aufbau der anderen überein.

Wir sagen in dem Falle, wo eine Ziffer $\mathfrak{a}$ mit einem Teilstück von $\mathfrak{b}$ übereinstimmt, daß $\mathfrak{a}$ kleiner ist als $\mathfrak{b}$ oder auch daß $\mathfrak{b}$ größer ist als $\mathfrak{a}$, und wenden dafür die Bezeichnung

$$\mathfrak{a} < \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{b} > \mathfrak{a}$$

an. Aus unserer Überlegung geht hervor, daß für eine Ziffer $\mathfrak{a}$ und eine Ziffer $\mathfrak{b}$ stets eine der Beziehungen

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{a} < \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{b} < \mathfrak{a}$$

stattfinden muß, und andererseits ist aus der anschaulichen Bedeutung ersichtlich, daß diese Beziehungen einander ausschließen. Desgleichen ergibt sich unmittelbar, daß, falls $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b} < \mathfrak{c}$, auch stets $\mathfrak{a} < \mathfrak{c}$ ist.

In engem Zusammenhang mit der Größenbeziehung der Ziffern steht die *Addition.* Wenn eine Ziffer $\mathfrak{b}$ mit einem Teilstück von $\mathfrak{a}$ übereinstimmt, so ist das Reststück wiederum eine Ziffer $\mathfrak{c}$; man erhält also die Ziffer $\mathfrak{a}$, indem man $\mathfrak{c}$ an $\mathfrak{b}$ ansetzt, in der Weise, daß die 1, mit welcher $\mathfrak{c}$ beginnt, an die 1, mit welcher $\mathfrak{b}$ endigt, nach der Art des Fortschreitungsprozesses angehängt wird. Diese Art der Zusammensetzung von Ziffern bezeichnen wir als *Addition* und wenden dafür das Zeichen + an.

[c]Erste Auflage: „. . . : das Zeichen $<$ zur Bezeichnung . . . ."

Aus dieser Definition der Addition entnehmen wir direkt: Wenn $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$, so gewinnt man durch Vergleichung von $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{a}$ eine Darstellung von $\mathfrak{a}$ in der Form $\mathfrak{b} + \mathfrak{c}$, wobei $\mathfrak{c}$ wieder eine Ziffer ist. Geht man andererseits von irgendwelchen Ziffern $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ aus, so liefert die Addition wiederum eine Ziffer $\mathfrak{a}$, so daß

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c},$$

und es ist dann

$$\mathfrak{b} < \mathfrak{a}.$$

23 $|_1$ $_{a_2}$**Allgemein gilt also:**

$$\mathfrak{b} < \mathfrak{b} + \mathfrak{c}.$$

$_{a_2}$ Auf Grund der eingeführten Definitionen ergibt sich die Bedeutung der numerischen Gleichungen und Ungleichungen, wie

$$2 < 3, \quad 2 + 3 = 5.$$

$2 < 3$ besagt, daß die Ziffer 11 mit einem Teilstück von 111 übereinstimmt; $2+3 = 5$ besagt, daß durch Ansetzen von 111 an 11 die Ziffer 11111 entsteht.

Wir haben hier beide Male die Darstellung einer richtigen Aussage, während z. B.

$$4 + 3 = 4$$

die Darstellung einer falschen Aussage ist.

Für die anschaulich definierte Addition haben wir nunmehr die Gültigkeit der Rechengesetze festzustellen.

Diese werden hier als Sätze über beliebig vorgelegte Ziffern aufgefaßt und als solche durch anschauliche Überlegung eingesehen.

Unmittelbar aus der Definition der Addition entnimmt man das assoziative Gesetz, wonach, wenn $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ irgendwelche Ziffern sind, stets

$$\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}.$$

Nicht so direkt ergibt sich das kommutative Gesetz, welches besagt, daß stets

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$$

ist. Wir gebrauchen hier die Beweismethode der *vollständigen Induktion*. Machen wir uns zunächst klar, wie diese Schlußweise von unserem elementaren Standpunkt aufzufassen ist: Es werde irgendeine Aussage betrachtet, die sich auf eine Ziffer bezieht und die einen elementar anschaulichen Inhalt besitzt. Die Aussage treffe für 1 zu, und man wisse auch, daß die Aussage, falls sie für eine Ziffer $\mathfrak{n}$ zutrifft, dann auch jedenfalls für die Ziffer $\mathfrak{n} + 1$ zutrifft. Hieraus folgert man, daß die Aussage für jede vorgelegte Ziffer $\mathfrak{a}$ zutrifft.

In der Tat ist ja die Ziffer $\mathfrak{a}$ aufgebaut, indem man, von 1 beginnend, den Prozeß des Anhängens von 1 anwendet. Konstatiert man nun zunächst das Zutreffen der betrachteten Aussage für 1, und bei jedem Anhängen einer 1, auf Grund der gemachten Voraussetzung, das Zutreffen der Aussage für die neu erhaltene Ziffer, so gelangt man beim fertigen Aufbau von $\mathfrak{a}$ zu der Feststellung, daß die Aussage für $\mathfrak{a}$ zutrifft.

Wir haben es also hier nicht mit einem selbständigen Prinzip zu tun, sondern mit einer Folgerung, die wir aus dem konkreten Aufbau der Ziffern entnehmen.

Mit Hilfe dieser Schlußweise können wir nun nach der üblichen Art zeigen, daß für jede Ziffer

$$\mathfrak{1} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a} + \mathfrak{1},$$

| und auf Grund hiervon weiter, daß stets

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$$ 24

ist. $|_1$

Es werde nun noch kurz die Einführung der Multiplikation, der Division und der anschließenden Begriffsbildungen angegeben.

Die *Multiplikation* kann folgendermaßen definiert werden: $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ bedeutet die Ziffer, die man aus der Ziffer $\mathfrak{b}$ erhält, indem man beim Aufbau immer die 1 durch die Ziffer $\mathfrak{a}$ ersetzt, so daß man also zunächst $\mathfrak{a}$ bildet und anstatt jedes in der Bildung von $\mathfrak{b}$ vorkommenden Anfügens von 1 das Ansetzen von $\mathfrak{a}$ ausführt.

Aus dieser Definition ergibt sich unmittelbar das assoziative Gesetz der Multiplikation, ferner das distributive Gesetz, wonach stets

$$\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}).$$

Das andere distributive Gesetz, wonach stets

$$(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{a} = (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}) + (\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a}),$$

wird auf Grund der Gesetze der Addition mit Hilfe der vorhin beschriebenen vollständigen Induktion eingesehen. Durch diese Beweismethode erhält man dann auch das kommutative Gesetz der Multiplikation.

Um zur Division zu gelangen, stellen wir zunächst eine Vorbetrachtung an. Der Aufbau einer Ziffer ist so beschaffen, daß beim Anhängen von 1 jedesmal eine neue Ziffer gewonnen wird. Die Bildung einer Ziffer $\mathfrak{a}$ geschieht also auf dem Wege der Bildung einer konkreten Reihe von Ziffern, die mit 1 beginnt, mit $\mathfrak{a}$ endigt und wo jede Ziffer aus der vorhergehenden durch Anhängen von 1 entsteht. Man sieht auch sogleich, daß diese Reihe außer $\mathfrak{a}$ selbst nur solche Ziffern enthält, die $< \mathfrak{a}$ sind, und daß eine Ziffer, welche $< \mathfrak{a}$ ist, auch in dieser Reihe vorkommen muß. Wir nennen diese Aufeinanderfolge von Ziffern kurz „die Reihe der Ziffern von 1 bis $\mathfrak{a}$“.

Sei nun $\mathfrak{b}$ eine von 1 verschiedene Ziffer, die $< \mathfrak{a}$ ist. $\mathfrak{b}$ hat dann die Form $1 + \mathfrak{c}$, und daher ist

$$\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a} = (1 \cdot \mathfrak{a}) + (\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a}) = \mathfrak{a} + (\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a}),$$

also

$$\mathfrak{a} < \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}.$$

Multiplizieren wir nun $\mathfrak{b}$ nacheinander mit den Ziffern aus der Reihe von 1 bis $\mathfrak{a}$, so ist in der entstehenden Reihe von Ziffern

$$\mathfrak{b} \cdot 1, \quad \mathfrak{b} \cdot 11, \quad \ldots, \quad \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}$$

die erste $< \mathfrak{a}$ und die letzte $> \mathfrak{a}$. Gehen wir nun in der Reihe dieser Ziffern so weit, bis wir zuerst auf eine solche treffen, die $> \mathfrak{a}$ ist; die vorherige, welche $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{q}$ sei, ist dann entweder $= \mathfrak{a}$ oder $< \mathfrak{a}$, während

$$\mathfrak{b} \cdot (\mathfrak{q} + 1) = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{q} + \mathfrak{b} \;>\; \mathfrak{a}$$

ist. Somit ist entweder

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{q},$$

oder wir haben eine Darstellung

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{q}) + \mathfrak{r},$$

25 | und dabei ist

$$(\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{q}) + \mathfrak{r} < (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{q}) + \mathfrak{b},$$

also

$$\mathfrak{r} < \mathfrak{b}.$$

Im ersten Falle ist $\mathfrak{a}$ „durch $\mathfrak{b}$ teilbar" („$\mathfrak{b}$ geht in $\mathfrak{a}$ auf"), im zweiten Fall haben wir die Division mit Rest.

Wir nennen allgemein $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$ teilbar, wenn in der Reihe

$$\mathfrak{b} \cdot 1, \quad \mathfrak{b} \cdot 11, \quad \dots, \quad \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}$$

die Ziffer $\mathfrak{a}$ vorkommt. Dies trifft zu für $\mathfrak{b} = 1$, für $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ und sonst in dem eben erhaltenen ersten Fall.

Aus der Definition der Teilbarkeit folgt unmittelbar, daß, falls $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$ teilbar ist, mit der Feststellung der Teilbarkeit auch eine Darstellung

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{q}$$

gegeben ist. Aber es gilt auch die Umkehrung, daß aus einer Gleichung

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{q}$$

stets die Teilbarkeit von $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$ (in dem definierten Sinne) folgt, da die Ziffer $\mathfrak{q}$ der Reihe der Ziffern von 1 bis $\mathfrak{a}$ angehören muß.

Ist $\mathfrak{a} \neq 1$ und kommt in der Reihe der Ziffern von 1 bis $\mathfrak{a}$ außer 1 und $\mathfrak{a}$ kein Teiler von $\mathfrak{a}$ vor, so daß jedes der Produkte $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}$, worin $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ der Reihe der Ziffern von 2 bis $\mathfrak{a}$ angehören, von $\mathfrak{a}$ verschieden ist, so nennen wir $\mathfrak{a}$ eine *Primzahl*.

Ist $\mathfrak{n}$ eine von 1 verschiedene Ziffer, so gibt es in der Reihe der Ziffern 1 bis $\mathfrak{n}$ jedenfalls eine erste, welche die Eigenschaft hat, von 1 verschieden und Teiler von $\mathfrak{n}$ zu sein. Von diesem „kleinsten von 1 verschiedenen Teiler von $\mathfrak{n}$" zeigt man leicht, daß er eine Primzahl ist.

Nun können wir auch nach dem Verfahren von Euklid den Satz beweisen, daß zu jeder Ziffer $\mathfrak{a}$ eine Primzahl $> \mathfrak{a}$ bestimmt werden kann: Man multipliziere die Zahlen der Reihe von 1 bis $\mathfrak{a}$ miteinander, addiere 1 und nehme von der so erhaltenen Ziffer den kleinsten von 1 verschiedenen Teiler $\mathfrak{t}$. Dieser ist dann eine Primzahl, und man erkennt leicht, daß $\mathfrak{t}$ nicht in der Reihe der Zahlen von 1 bis $\mathfrak{a}$ vorkommen kann, mithin $> \mathfrak{a}$ ist.

Von hier aus ist der weitere Aufbau der elementaren Zahlentheorie ersichtlich; nur noch ein Punkt bedarf hier der grundsätzlichen Erörterung, das Verfahren der *rekursiven Definition*. Vergegenwärtigen wir uns, worin dieses Verfahren besteht: Ein neues Funktionszeichen, etwa φ wird eingeführt, und die Definition der Funktion geschieht durch zwei Gleichungen, welche im einfachsten Falle die Form haben:

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= \mathfrak{a},\\ \varphi(\mathfrak{n}+1) &= \psi(\varphi(\mathfrak{n}),\mathfrak{n}).\end{aligned}$$

26 | Hierbei ist $\mathfrak{a}$ eine Ziffer und ψ eine Funktion, die aus bereits bekannten Funktionen durch Zusammensetzung gebildet ist, so daß $\psi(\mathfrak{b},\mathfrak{c})$ für gegebene Ziffern $\mathfrak{b},\mathfrak{c}$ berechnet werden kann und als Wert wieder eine Ziffer liefert.

Z$_a$$\underline{\text{um}}$$_a$ B$_a$$\underline{\text{eispiel}}$$_a$ kann die Funktion

$$\varrho(\mathfrak{n}) = 1\cdot 2\ldots\mathfrak{n}$$

definiert werden durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\varrho(1) &= 1,\\ \varrho(\mathfrak{n}+1) &= \varrho(\mathfrak{n})\cdot(\mathfrak{n}+1).\end{aligned}$$

Es ist nicht ohne weiteres klar, welcher Sinn diesem Definitionsverfahren zukommt. Zur Erklärung ist zunächst der Funktionsbegriff zu präzisieren. Unter einer *Funktion* verstehen wir hier eine anschauliche Anweisung, auf Grund deren $_{d_2}$**je**$_{d_2}$ einer vorgelegten Ziffer$_{a_2}$**, bzw. einem Paar, einem Tripel, ... von Ziffern,**$_{a_2}$ wieder eine $_{a_2}$**Ziffer**$_{a_2 d_2}$**solche**$_{d_2}$ zugeordnet wird. Ein Gleichungspaar der obigen Art – wir nennen ein solches eine „*Rekursion*“ – haben wir anzusehen als eine *abgekürzte Mitteilung* folgender Anweisung:

Es sei $\mathfrak{m}$ irgendeine Ziffer. Wenn $\mathfrak{m} = 1$ ist, so werde $\mathfrak{m}$ die Ziffer $\mathfrak{a}$ zugeordnet. Andernfalls hat $\mathfrak{m}$ die Form $\mathfrak{b}+1$. Man schreibe dann zunächst schematisch auf:

$$\psi(\varphi(\mathfrak{b}),\mathfrak{b}).$$

Ist nun $\mathfrak{b} = 1$, so ersetze man hierin $\varphi(\mathfrak{b})$ durch $\mathfrak{a}$; andernfalls hat wieder $\mathfrak{b}$ die Form $\mathfrak{c}+1$, und man ersetze dann $\varphi(\mathfrak{b})$ durch

$$\psi(\varphi(\mathfrak{c}),\mathfrak{c}).$$

Nun ist wieder entweder $\mathfrak{c} = 1$ oder $\mathfrak{c}$ von der Form $\mathfrak{d}+1$. Im ersten Fall ersetze man $\varphi(\mathfrak{c})$ durch $\mathfrak{a}$, im zweiten Fall durch

$$\psi(\varphi(\mathfrak{d}),\mathfrak{d}).$$

Die Fortsetzung dieses Verfahrens führt jedenfalls zu einem Abschluß. Denn die Ziffern

$$\mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d}, \ldots,$$

welche wir der Reihe nach erhalten, entstehen durch den *Abbau der Ziffer* $\mathfrak{m}$, und dieser muß ebenso wie der Aufbau von $\mathfrak{m}$ zum Abschluß gelangen. Wenn wir beim Abbau bis zu 1 gekommen sind, dann wird $\varphi(1)$ durch $\mathfrak{a}$ ersetzt; das Zeichen φ kommt dann in der entstehenden Figur nicht mehr vor, vielmehr tritt als Funktionszeichen nur ψ, eventuell in mehrmaliger Überlagerung, auf, und die innersten Argumente sind Ziffern. Damit sind wir zu einem berechenbaren Ausdruck gelangt; denn ψ soll ja eine bereits bekannte Funktion sein. Diese Berechnung hat man nun von innen her auszuführen, und die dadurch gewonnene Ziffer soll der Ziffer $\mathfrak{m}$ zugeordnet werden.

Aus dem Inhalt dieser Anweisung ersehen wir zunächst, daß sie sich in jedem Falle einer vorgelegten Ziffer $\mathfrak{m}$ grundsätzlich erfüllen läßt | und daß 27
das Ergebnis eindeutig festgelegt ist. Zugleich ergibt sich aber auch, daß für jede gegebene Ziffer $\mathfrak{n}$ die Gleichung

$$\varphi(\mathfrak{n}+1) = \psi(\varphi(\mathfrak{n}), \mathfrak{n})$$

erfüllt wird, wenn wir darin $\varphi(\mathfrak{n})$ und $\varphi(\mathfrak{n}+1)$ durch die den Ziffern $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}+1$ gemäß unserer Vorschrift zugeordneten Ziffern ersetzen und dann für die bekannte Funktion ψ ihre Definition substituieren.

Ganz entsprechend ist der etwas allgemeinere Fall zu behandeln, wo in der zu definierenden Funktion φ noch eine oder mehrere unbestimmte Ziffern als „*Parameter*“ auftreten. Die Rekursionsgleichungen haben im Falle eines Parameters $\mathfrak{t}$ die Form

$$\begin{aligned} \varphi(\mathfrak{t}, 1) &= \alpha(\mathfrak{t}), \\ \varphi(\mathfrak{t}, \mathfrak{n}+1) &= \psi(\varphi(\mathfrak{t}, \mathfrak{n}), \mathfrak{t}, \mathfrak{n}), \end{aligned}$$

wobei α ebenso wie ψ eine bekannte Funktion ist. $\text{Z}_a\underline{\text{um}}_a$ $\text{B}_a\underline{\text{eispiel}}_a$ wird durch die Rekursion

$$\begin{aligned} \varphi(\mathfrak{t}, 1) &= \mathfrak{t} \\ \varphi(\mathfrak{t}, \mathfrak{n}+1) &= \varphi(\mathfrak{t}, \mathfrak{n}) \cdot \mathfrak{t}. \end{aligned}$$

die Funktion $\varphi(\mathfrak{t}, \mathfrak{n}) = \mathfrak{t}^{\mathfrak{n}}$ definiert.

Es handelt sich hier bei der Definition durch Rekursion wiederum nicht um ein selbständiges Definitionsprinzip, sondern die Rekursion hat im Rahmen der elementaren Zahlentheorie lediglich die Bedeutung einer Vereinbarung über eine abgekürzte Beschreibung gewisser Bildungsprozesse, durch die man aus einer oder mehreren gegebenen Ziffern wieder eine Ziffer erhält. —

Als ein Beispiel dafür, daß wir im Rahmen der anschaulichen Zahlentheorie auch *Unmöglichkeitsbeweise* führen können, werde der Satz genommen, welcher die Irrationalität von $\sqrt{2}$ zum Ausdruck bringt: Es kann nicht zwei Ziffern $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ geben, so daß[17]

$$\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = 2 \cdot \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{n}.$$

Der Beweis wird bekanntermaßen so geführt: Man zeigt zunächst, daß jede Ziffer entweder durch 2 teilbar oder von der Form $(2 \cdot \mathfrak{k}) + 1$ ist und daß daher $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}$ nur dann durch 2 teilbar sein kann, wenn $\mathfrak{a}$ durch 2 teilbar ist.

Wäre nun ein Zahlenpaar $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ gegeben, das die obige Gleichung erfüllt, so könnten wir alle Zahlenpaare $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, wo

$$\begin{gathered} \mathfrak{a} \text{ der Reihe } 1, \ldots, \mathfrak{m}, \\ \mathfrak{b} \text{ der Reihe } 1, \ldots, \mathfrak{n} \end{gathered}$$

angehört, daraufhin ansehen, ob

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = 2 \cdot \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b}.$$

28 | ist oder nicht. Unter den Wertepaaren, welche der Gleichung genügen, wählen wir ein solches, worin $\mathfrak{b}$ den kleinstmöglichen Wert hat. Es kann nur *ein* solches geben; dieses sei $\mathfrak{m}', \mathfrak{n}'$. Aus der Gleichung

$$\mathfrak{m}' \cdot \mathfrak{m}' = 2 \cdot \mathfrak{n}' \cdot \mathfrak{n}'$$

folgt nun nach dem vorher Bemerkten, daß $\mathfrak{m}'$ durch 2 teilbar ist:

$$\mathfrak{m}' = 2 \cdot \mathfrak{k}',$$

also erhalten wir

$$\begin{aligned} 2 \cdot \mathfrak{k}' \cdot 2 \cdot \mathfrak{k}' &= 2 \cdot \mathfrak{n}' \cdot \mathfrak{n}', \\ 2 \cdot \mathfrak{k}' \cdot \mathfrak{k}' &= \mathfrak{n}' \cdot \mathfrak{n}'. \end{aligned}$$

[17][1] Wir benutzen hier die übliche, zufolge des assoziativen Gesetzes der Multiplikation statthafte Schreibweise mehrgliedriger Produkte ohne Klammern.

Hiernach wäre aber $\mathfrak{n}'$, $\mathfrak{k}'$ ein Zahlenpaar, das unserer Gleichung genügt, und zugleich wäre $\mathfrak{k}' < \mathfrak{n}'$. Dieses widerspricht aber der Bestimmung von $\mathfrak{n}'$.

Der hiermit bewiesene Satz läßt sich allerdings auch positiv aussprechen: Wenn $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ irgend zwei Ziffern sind, so ist $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}$ von $2 \cdot \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{n}$ verschieden.

Soviel mag zur Charakterisierung der elementaren Behandlung der Zahlentheorie genügen. Diese haben wir als eine Theorie der Ziffern, also einer gewissen Art besonders einfacher Figuren, entwickelt. Die Bedeutung dieser Theorie für die Erkenntnis beruht auf der Beziehung der Ziffern zu dem eigentlichen *Anzahl-Begriff.* Diese Beziehung erhalten wir auf folgende Art:

Es sei eine konkrete (also jedenfalls endliche) Gesamtheit von Dingen vorgelegt. Man nehme nacheinander die Dinge der Gesamtheit vor und lege ihnen der Reihe nach die Ziffern 1, 11, 111, ... als Nummern bei. Wenn kein Ding mehr übrig ist, so sind wir zu einer gewissen Ziffer $\mathfrak{n}$ gelangt. Diese ist damit zunächst als *Ordinalzahl* für die Gesamtheit der Dinge in der gewählten Reihenfolge bestimmt.

Nun machen wir uns aber leicht klar, daß die resultierende Ziffer $\mathfrak{n}$ gar nicht von der gewählten Reihenfolge abhängt. Denn seien

$$a_1, a_2, \ldots, a_\mathfrak{n}$$

die Dinge der Gesamtheit in der gewählten Reihenfolge und

$$b_1, b_2, \ldots, b_\mathfrak{k}$$

die Dinge in einer anderen Reihenfolge. Dann können wir von der ersten Numerierung zu der zweiten folgendermaßen durch eine Reihe von Vertauschungen der Nummern übergehen: Falls a_1 von b_1 verschieden ist, so vertauschen wir zunächst die Nummer $\mathfrak{r}$, die das Ding b_1 in der ersten Numerierung hat, mit 1, d. h. wir legen dem Ding $\mathfrak{a}_\mathfrak{r}$ die Nummer 1, dem Ding a_1 die Nummer $\mathfrak{r}$ bei. In der hierdurch entstehenden Numerierung hat das Ding b_1 die Nummer 1; auf dieses folgt, mit der Nummer 2 versehen, entweder das Ding b_2, oder dieses Ding hat hier eine andere | Nummer $\mathfrak{s}$, die jedenfalls auch von 1 29
verschieden ist; dann vertauschen wir in der Numerierung diese Nummer $\mathfrak{s}$ mit 2, so daß nun eine Numerierung entsteht, in der das Ding b_1 die Nummer 1, b_2 die Nummer 2 hat. b_3 hat hier entweder die Nummer 3 oder eine andere, jedenfalls von 1 und 2 verschiedene Nummer $\mathfrak{t}$; diese vertauschen wir dann wieder mit 3.

Mit diesem Verfahren müssen wir zu einem Abschluß gelangen; denn durch jede Vertauschung wird die Numerierung der betrachteten Gesamtheit mit der Numerierung

$$b_1, b_2, \ldots, b_{\mathfrak{k}}$$

vom Anfang aus um mindestens eine Stelle weiter zur Übereinstimmung gebracht, so daß man schließlich für b_1 die Nummer 1, für b_2 die Nummer 2, …, für $b_{\mathfrak{k}}$ die Nummer $\mathfrak{k}$ bekommt, und dann ist kein weiteres Ding mehr übrig. Andererseits bleibt aber bei jeder der vorgenommenen Vertauschungen der Vorrat der verwendeten Ziffern ganz derselbe; es wird ja nur die Nummer eines Dinges gegen die eines anderen ausgewechselt. Es geht also die Numerierung jedesmal von 1 bis $\mathfrak{n}$, folglich ist auch

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{n}.$$

Somit ist die Ziffer $\mathfrak{n}$ der betrachteten Gesamtheit unabhängig von der Reihenfolge zugeordnet, und wir können sie in diesem Sinne der Gesamtheit als ihre *Anzahl* beilegen[18]. Wir sagen, die Gesamtheit besteht aus $\mathfrak{n}$ Dingen.

Hat eine konkrete Gesamtheit mit einer anderen die Anzahl gemeinsam, so gewinnen wir, indem wir für jede eine Numerierung vornehmen, eine umkehrbar eindeutige Zuordnung der Dinge der einen Gesamtheit zu denen der anderen. Liegt andererseits eine solche Zuordnung zwischen zwei gegebenen Gesamtheiten von Dingen vor, so haben beide dieselbe Anzahl, wie ja unmittelbar aus unserer Definition der Anzahl folgt.

Von der Definition der Anzahl gelangen wir nun durch inhaltliche Überlegungen zu den Grundsätzen der *Anzahlenlehre* wie z. B. zu dem Satz, daß bei der Vereinigung zweier Gesamtheiten ohne gemeinsames Element, deren Anzahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sind, eine Gesamtheit von $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ Dingen entsteht. –

Anschließend an die Darstellung der elementaren Zahlentheorie möge noch kurz der elementare inhaltliche Standpunkt in der *Algebra* gekennzeichnet werden. Es soll sich handeln um die elementare Theorie der ganzen rationalen Funktionen einer oder mehrerer Variablen mit ganzen Zahlen als Koeffizienten.

Als Objekte der Theorie haben wir hier wieder gewisse Figuren, die „Polynome“, die aus einem bestimmten Vorrat von Buchstaben, | $x, y, z, \ldots$, die „Variablen“ heißen, und aus Ziffern mit Hilfe der Zeichen $+, -, \cdot$ und von

18[1] Diese Überlegung ist von Helmholtz in seinem Aufsatz „Zählen und Messen“ durchgeführt worden (*vide* [?], S. 80–82.)

Klammern zusammengesetzt sind. Die Zeichen $+, \cdot$ sind also hier nicht, wie in der elementaren Zahlentheorie, als Zeichen zur Mitteilung aufzufassen, sondern gehören zu den Objekten der Theorie.

Kleine deutsche Buchstaben benutzen wir wieder als Zeichen zur Mitteilung, aber nicht nur für Ziffern, sondern auch für irgendwelche Polynome.

Die Zusammensetzung der Polynome aus den genannten Zeichen geschieht nach folgenden Bildungsregeln:

Eine Variable sowie auch eine Ziffer kann für sich als Polynom genommen werden.

Aus zwei Polynomen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ können die Polynome

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}, \quad \mathfrak{a}-\mathfrak{b}, \quad \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$$

gebildet werden, aus einem Polynom $\mathfrak{a}$ kann $(-\mathfrak{a})$ gebildet werden. Dabei gelten die üblichen Regeln für das Klammernsetzen. Als Zeichen zur Mitteilung werden noch eingeführt:

die Nummern $2, 3, \ldots$, so wie in der elementaren Zahlentheorie;

das Zeichen 0 für $1-1$;

die übliche Potenzbezeichnung: z. B. bedeutet: $x^{\mathfrak{z}}$, wenn $\mathfrak{z}$ eine Ziffer ist, dasjenige Polynom, das aus $\mathfrak{z}$ entsteht, indem statt jeder 1 die Variable x gesetzt und zwischen je zwei aufeinanderfolgende x das Zeichen „$\cdot$“ gesetzt wird;

das Zeichen $=$ zur Mitteilung der gegenseitigen *Ersetzbarkeit* zweier Polynome.

Die Ersetzbarkeit wird durch folgende inhaltlichen Regeln bestimmt:

1. Die assoziativen und kommutativen Gesetze für „$+$“ und „$\cdot$“.
2. Das distributive Gesetz

$$\mathfrak{a}\cdot(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}) + (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c}).$$

3. Die Regeln für „$-$“:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}-\mathfrak{b} &= \mathfrak{a}+(-\mathfrak{b}), \\ (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})-\mathfrak{b} &= \mathfrak{a}. \end{aligned}$$

4. $1\cdot\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$.
5. Sind zwei Polynome $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ frei von Variablen und von „$-$“ und besteht *im Sinne der Deutung der elementaren Zahlentheorie* die Gleichung $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$, so ist $\mathfrak{m}$ durch $\mathfrak{n}$ ersetzbar.

Diese Regeln der Ersetzbarkeit beziehen sich auch auf solche Polynome, die als *Bestandteile* von anderen Polynomen auftreten. Aus ihnen leiten sich die weiteren Sätze über die Ersetzbarkeit ab, welche die „Identitäten“
31 und Theoreme der elementaren Algebra bilden. Als | einige der einfachsten beweisbaren Identitäten seien genannt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}+0 &= \mathfrak{a} & -(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}) &= \mathfrak{b}-\mathfrak{a}, \\ \mathfrak{a}-\mathfrak{a} &= 0 & -(-\mathfrak{a}) &= \mathfrak{a}, \\ \mathfrak{a}\cdot 0 &= 0 & (-\mathfrak{a})\cdot(-\mathfrak{b}) &= \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}. \end{aligned}$$

Unter den Theoremen, welche durch inhaltliche Überlegung eingesehen werden, seien folgende grundlegenden Sätze erwähnt:

a) Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ zwei Polynome, die durch einander ersetzbar sind und von denen mindestens eines die Variable x enthält, und gehen aus $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ die Polynome $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1$ hervor, indem die Variable x überall, wo sie vorkommt, durch ein und dasselbe Polynom $\mathfrak{c}$ ersetzt wird, so ist auch $\mathfrak{a}_1$ durch $\mathfrak{b}_1$ ersetzbar.

b) Aus einer richtigen Gleichung zwischen Polynomen erhält man durch Einsetzung von Ziffern für die Variablen richtige Zahlengleichungen im Sinne der Zahlentheorie (vorausgesetzt, daß das Rechnen mit negativen Zahlen in die Zahlentheorie einbezogen wird). – Die Bedeutung dieses Satzes b) möge an einem einfachen Beispiel erläutert werden: Die Gleichung

$$(x+y)\cdot(x+y) = x^2 + 2\cdot x\cdot y + y^2$$

besagt zunächst nichts anderes, als daß nach unseren Festsetzungen $(x+y)\cdot(x+y)$ durch $x^2+2\cdot x\cdot y+y^2$ ersetzbar ist. Auf Grund des Satzes b) können wir aber hieraus folgern, daß, wenn $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ Zahlzeichen sind, $(\mathfrak{m}+\mathfrak{n})\cdot(\mathfrak{m}+\mathfrak{n})$ im Sinne der Zahlentheorie mit $\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{m}+\mathfrak{2}\cdot\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{n}+\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{n}$ übereinstimmt.

c) Jedes Polynom ist ersetzbar entweder durch 0 oder durch eine Summe verschiedener Potenzprodukte der Variablen – (als solches gilt hier auch das Polynom 1) –, deren jedes mit einem positiven oder negativen Zahlfaktor versehen ist.

An Hand dieser Normalform gewinnen wir ein Verfahren, um von zwei vorgelegten Polynomen zu entscheiden, ob sie durch einander ersetzbar sind oder nicht. Es gilt nämlich der Satz:

d) Ein Polynom, das aus einer Summe verschiedener Potenzprodukte mit Zahlfaktoren besteht, ist nicht durch 0 ersetzbar, und zwei solche Polynome sind nur dann durch einander ersetzbar, wenn sie, abgesehen von der

Reihenfolge der Summanden sowie der Reihenfolge der Faktoren, in den Potenzprodukten und ihren Zahlfaktoren übereinstimmen.

Der zweite Teil dieses Satzes folgt aus dem ersten, und dieser kann mit Hilfe des Satzes b) durch Betrachtung geeigneter Einsetzungen von Ziffern bewiesen werden.

Als spezielle Folgerung aus d) ergibt sich der Satz:

e) Wenn eine Ziffer $\mathfrak{m}$, aufgefaßt als Polynom, durch eine Ziffer $\mathfrak{n}$ ersetzbar ist, so stimmt $\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{n}$ überein.

| Methodisch sei zu diesen Sätzen noch bemerkt: Die in den Sätzen a), 32
e) vorkommende Voraussetzung der Ersetzbarkeit von Polynomen ist so zu verstehen, daß wir annehmen, man habe die Ersetzbarkeit des einen Polynoms durch das andere gemäß den Regeln festgestellt. Bei dem Satz c) wird die Behauptung der Ersetzbarkeit näher bestimmt durch die Angabe eines Verfahrens, welches im Beweise des Satzes beschrieben wird.

Wir befinden uns also hier, ebenso wie in der elementaren Zahlentheorie, ganz im Bereich des elementaren inhaltlichen Schließens. Und das gilt auch für die weiteren Sätze und Beweise der elementaren Algebra. –

Die ausgeführte Betrachtung der Anfangsgründe von Zahlentheorie und Algebra diente dazu, uns das direkte inhaltliche, in Gedanken-Experimenten an anschaulich vorgestellten Objekten sich vollziehende und von axiomatischen Annahmen freie Schließen in seiner Anwendung und Handhabung vorzuführen. Diese Art des Schließens wollen wir, um einen kurzen Ausdruck zu haben, als das „*finite*“ Schließen und ebenso auch die diesem Schließen zu ${}_a\underline{\mathrm{G}}_a$runde liegende methodische Einstellung als die „finite“ Einstellung oder den „finiten“ Standpunkt bezeichnen. Im gleichen Sinne wollen wir von finiten Begriffsbildungen und Behauptungen sprechen, indem wir allemal mit dem Worte „finit“ zum Ausdruck bringen, daß die betreffende Überlegung, Behauptung oder Definition sich an die Grenzen der grundsätzlichen Vorstellbarkeit von Objekten sowie der grundsätzlichen Ausführbarkeit von Prozessen hält und sich somit im Rahmen konkreter Betrachtung vollzieht.

Zur Charakterisierung des finiten Standpunktes seien noch einige allgemeine Gesichtspunkte hervorgehoben, betreffend den Gebrauch der logischen Urteilsformen im finiten Denken, wobei wir zur Exemplifizierung Aussagen über *Ziffern* betrachten wollen.

Ein *allgemeines* Urteil über Ziffern kann finit nur im hypothetischen Sinn gedeutet werden, d. h. als eine Aussage über jedwede vorgelegte Ziffer. Ein solches Urteil spricht ein Gesetz aus, das sich an jedem vorliegenden Einzelfall verifizieren muß.

Ein *Existenzsatz* über Ziffern, also ein Satz von der Form „es gibt eine Ziffer $\mathfrak{n}$ von der Eigenschaft $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$“, ist finit aufzufassen als ein „Partialurteil“, d. h. als eine unvollständige Mitteilung einer genauer bestimmten Aussage, welche entweder in der direkten Angabe einer Ziffer von der Eigenschaft $\mathfrak{A}(n)$ oder der Angabe eines Verfahrens zur Gewinnung einer solchen Ziffer besteht, – wobei zur Angabe eines Verfahrens gehört, daß für die Reihe der auszuführenden Handlungen eine bestimmte Grenze aufgewiesen wird.

In entsprechender Weise sind diejenigen Urteile finit zu interpretieren,
33 in denen eine allgemeine Aussage mit einer Existenzbehauptung | verknüpft ist. So hat man z. B. einen Satz von der Form „zu jeder Ziffer $\mathfrak{k}$ von der Eigenschaft $\mathfrak{A}(\mathfrak{k})$ gibt es eine Ziffer $\mathfrak{l}$, für welche $\mathfrak{B}(\mathfrak{k}, \mathfrak{l})$ gilt“, finit aufzufassen als unvollständige Mitteilung von einem Verfahren, welches gestattet, zu jeder vorgelegten Ziffer $\mathfrak{k}$ von der Eigenschaft $\mathfrak{A}(\mathfrak{k})$ eine Ziffer $\mathfrak{l}$ zu finden, welche zu $\mathfrak{k}$ in der Beziehung $\mathfrak{B}(\mathfrak{k}, \mathfrak{l})$ steht.

Besondere Achtsamkeit erfordert die Anwendung der *Negation*.

Die Verneinung ist unproblematisch bei „elementaren“ Urteilen, welche eine Frage betreffen, über die sich durch eine direkte anschauliche Feststellung (einen „Befund“) entscheiden läßt. Sind z. B. $\mathfrak{k}, \mathfrak{l}$ bestimmte Ziffern, so läßt sich direkt feststellen, ob

$$\mathfrak{k} + \mathfrak{k} = \mathfrak{l}$$

zutrifft oder nicht, d. h. ob $\mathfrak{k} + \mathfrak{k}$ mit $\mathfrak{l}$ übereinstimmt oder von $\mathfrak{l}$ verschieden ist.

Die Negation eines solchen elementaren Urteils besagt einfach, daß das Ergebnis der betreffenden anschaulichen Entscheidung von dem im Urteil behaupteten Sachverhalt abweicht; und es besteht für ein elementares Urteil ohne weiteres die Alternative, daß entweder dieses selbst oder seine Negation zutrifft.

Dagegen für ein allgemeines und ein existentiales Urteil ist es nicht ohne weiteres klar, was im finiten Sinne als seine Negation gelten soll.

Betrachten wir daraufhin zunächst die Existenzaussagen. Daß es eine Ziffer $\mathfrak{n}$ von einer Eigenschaft $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ nicht gibt, kann in unscharfem Sinne gemeint sein, als die Feststellung, daß eine Ziffer von dieser Eigenschaft uns zur Angabe nicht zur Verfügung steht. Eine solche Feststellung hat aber wegen ihrer Bezogenheit auf einen zufälligen Erkenntniszustand keine objektive Bedeutung. Soll aber unabhängig vom Erkenntnisstande das Nichtvorhandensein einer Ziffer $\mathfrak{n}$ von der Eigenschaft $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ behauptet werden, so kann das im finiten Sinne nur durch eine Unmöglichkeitsbehauptung geschehen, welche besagt, daß eine Ziffer $\mathfrak{n}$ nicht die Eigenschaft $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ besitzen *kann*.

Wir kommen so auf eine *verschärfte* Negation; diese aber ist nicht das genau kontradiktorische Gegenteil der Existenzbehauptung, „es gibt eine Ziffer $\mathfrak{n}$ von der Eigenschaft $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$“, die (als Partialurteil) auf eine bekannte Ziffer von jener Eigenschaft hinweist oder auf ein Verfahren, das wir zur Gewinnung einer solchen Ziffer besitzen.

Die Existenzaussage und ihre verschärfte Negation sind nicht, wie eine elementare Aussage und ihre Negation, Aussagen über die beiden allein in Betracht kommenden Ergebnisse *einer und derselben Entscheidung*, sondern sie entsprechen zwei getrennten Erkenntnismöglichkeiten, nämlich einerseits der Auffindung einer Ziffer von einer gegebenen Eigenschaft, andererseits der Einsicht in ein allgemeines Gesetz über Ziffern.

Daß eine von diesen beiden Möglichkeiten sich bieten muß, ist nicht logisch selbstverständlich. Wir können daher vom finiten Standpunkt | nicht 34
die Alternative benutzen, daß es entweder eine Ziffer $\mathfrak{n}$ gibt, für die $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ zutrifft, oder daß das Zutreffen von $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ auf eine Ziffer ausgeschlossen ist.

Ähnlich wie bei dem Existentialurteil verhält es sich bei einem allgemeinen Urteil von der Form „für jede Ziffer $\mathfrak{n}$ gilt $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$“ betreffs der finiten Negation. Die Verneinung der Gültigkeit eines solchen Urteils ergibt ohne weiteres noch keinen finiten Sinn; wird sie aber zu der Behauptung verschärft, daß die Allgemeingültigkeit von $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ sich durch ein Gegenbeispiel widerlegen läßt, dann bildet diese verschärfte Negation nicht das kontradiktorische Gegenteil des allgemeinen Urteils; nämlich es ist dann wiederum nicht logisch selbstverständlich, daß entweder das allgemeine Urteil oder die verschärfte Negation zutreffen muß, daß also entweder $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ für jede vorgelegte Ziffer $\mathfrak{n}$ zutrifft oder daß sich eine Ziffer angeben läßt, für welche $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ unzutreffend ist.

Allerdings ist zu bemerken, daß die Auffindung eines Gegenbeispiels nicht die einzige Möglichkeit bildet, ein allgemeines Urteil zu widerlegen. Es kann auch in anderer Weise die Verfolgung der Konsequenzen des allgemeinen Urteils auf einen Widerspruch führen. Dieser Umstand hebt jedoch die Schwierigkeit nicht auf, vielmehr wird dadurch die Komplikation noch erhöht. Nämlich es ist weder die Alternative logisch ersichtlich, daß ein allgemeines Urteil über Ziffern entweder zutreffen oder in seinen Konsequenzen auf einen Widerspruch führen, also widerlegbar sein müsse, noch auch ist es selbstverständlich, daß ein solches Urteil, wenn es widerlegbar ist, dann auch durch ein Gegenbeispiel widerlegbar ist.

Die komplizierte Situation, die wir hier in betreff der Verneinung von Urteilen beim finiten Standpunkt vorfinden, entspricht der These Brouwers von der Ungültigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten für unendliche Gesamtheiten. Diese Ungültigkeit besteht beim finiten Standpunkt in der Tat insofern, als es hier für das existentiale sowie für das allgemeine Urteil nicht gelingt, eine dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten genügende Negation finiten Inhalts zu finden.

Diese Darlegungen mögen zur Kennzeichnung des finiten Standpunktes genügen. Sehen wir uns nun die Arithmetik in ihrer üblichen Behandlung daraufhin an, ob sie diesem methodischen Standpunkt entspricht, so bemerken wir, daß dieses nicht der Fall ist, daß vielmehr durch die arithmetischen Schlußweisen und Begriffsbildungen mannigfach die Grenzen der finiten Betrachtung überschritten werden.

Die Überschreitung des finiten Standpunktes findet bereits in den Schlußweisen der Zahlentheorie statt, indem hier Existenzaussagen über ganze Zahlen – wir sprechen in der üblichen Mathematik von „ganzen Zahlen" (genauer „positiven ganzen Zahlen" und kurz auch „Zahlen") anstatt von „Ziffern" – zugelassen werden ohne Rücksicht auf die Möglichkeit einer tatsächlichen Bestimmung der betreffenden Zahl, und indem man Gebrauch macht von der
35 Alternative, daß eine | Aussage über ganze Zahlen entweder für alle Zahlen zutrifft oder daß es eine Zahl gibt, für die sie unzutreffend ist.

Diese Alternative, das „tertium non datur" für ganze Zahlen, kommt implizite auch zur Anwendung bei dem „Prinzip der kleinsten Zahl", welches besagt: „Wenn eine Aussage über ganze Zahlen für mindestens eine Zahl zutrifft, so gibt es eine kleinste Zahl, für die sie zutrifft."

Das Prinzip der kleinsten Zahl hat in seinen *elementaren* Anwendungen finiten Charakter. In der Tat, sei $\mathfrak{A}(n)$ die betreffende Aussage über eine Zahl n, und sei $\mathfrak{m}$ eine bestimmte Zahl, für welche $\mathfrak{A}(\mathfrak{m})$ zutrifft, so gehe man die Zahlen von 1 bis $\mathfrak{m}$ durch; man muß dann einmal zuerst zu einer Zahl $\mathfrak{k}$ gelangen, für die $\mathfrak{A}(\mathfrak{k})$ richtig ist, da ja spätestens $\mathfrak{m}$ eine solche Zahl ist. Diese Zahl $\mathfrak{k}$ ist dann die kleinste Zahl von der Eigenschaft $\mathfrak{A}$.

Diese Überlegung beruht aber auf zwei Voraussetzungen, die bei den nichtelementaren Anwendungen des Prinzips der kleinsten Zahl nicht immer erfüllt sind. Erstens wird vorausgesetzt, daß das Zutreffen der Aussage $\mathfrak{a}$ auf eine Zahl in dem Sinne statthat, daß uns eine Zahl $\mathfrak{m}$ von der Eigenschaft $\mathfrak{A}(\mathfrak{m})$ wirklich gegeben ist, während bei den Anwendungen die Existenz einer Zahl von der Eigenschaft $\mathfrak{A}$ vielfach nur mittels des „tertium non datur" erschlossen ist, ohne daß wir dadurch zur wirklichen Bestimmung einer solchen

Zahl gelangen. Die zweite Voraussetzung ist, daß sich für eine jede Zahl $\mathfrak{k}$ aus der Reihe der Zahlen von 1 bis $\mathfrak{m}$ entscheiden läßt, ob $\mathfrak{A}(\mathfrak{k})$ zutrifft oder nicht; diese Entscheidungsmöglichkeit besteht allerdings für elementare Aussagen $\mathfrak{A}(n)$ ohne weiteres; dagegen kann bei einer nichtelementaren Aussage $\mathfrak{A}(n)$ die Frage, ob sie für eine gegebene Zahl $\mathfrak{k}$ zutrifft, ein ungelöstes Problem bilden.

Sei z. B. $\psi(a)$ eine Funktion, die durch eine Aufeinanderfolge von Rekursionen und Einsetzungen definiert ist, so wie wir sie in der finiten Zahlentheorie zulassen, und $\mathfrak{A}(n)$ bedeute die Aussage, daß es eine Zahl a gibt, für welche $\psi(a) = n$ ist. Dann ist für eine vorgelegte Zahl $\mathfrak{k}$ die Frage, ob $\mathfrak{A}(\mathfrak{k})$ zutrifft, im allgemeinen (d. h. wenn die Funktion ψ nicht besonders einfach ist) nicht durch direktes Zusehen entscheidbar, vielmehr hat sie den Charakter eines mathematischen Problems. Denn die Rekursionen, welche in die Definition von ψ eingehen, liefern ja die Werte der Funktion nur *für vorgelegte Argumentwerte*, während es sich bei der Frage, ob es eine Zahl a gibt, für die $\psi(a)$ den Wert $\mathfrak{k}$ hat, um den gesamten Wertverlauf der Funktion ψ handelt.

In allen den Fällen nun, wo die genannten Voraussetzungen für die finite Begründung des Prinzips der kleinsten Zahl nicht erfüllt sind, muß zur Begründung dieses Prinzips das „tertium non datur" für die ganzen Zahlen herangezogen werden[19].

| Es seien einige Beispiele von zahlentheoretischen Alternativen aufgeführt, 36
welche sich mittels des tertium non datur für ganze Zahlen ergeben, dagegen auf finitem Wege vom heutigen Stande unserer Kenntnis nicht zu erweisen sind:

„Entweder ist jede gerade Zahl, die > 2 ist, als Summe zweier Primzahlen darstellbar, oder es gibt eine gerade Zahl, die > 2 und nicht als Summe zweier Primzahlen darstellbar ist."

„Entweder ist jede ganze Zahl der Form $2^{(2^{\mathfrak{k}})}+1$ für $\mathfrak{k} > 4$ in zwei Faktoren > 1 zerlegbar, oder es gibt eine Primzahl der Form $2^{(2^{\mathfrak{k}})} + 1$ mit $\mathfrak{k} > 4$."

„Entweder ist jede genügend große ganze Zahl als Summe von weniger als 8 dritten Potenzen darstellbar, oder es gibt zu jeder ganzen Zahl n eine größere ganze Zahl m, welche nicht als Summe von weniger als 8 dritten Potenzen darstellbar ist."

„Entweder gibt es beliebig große Primzahlen p von der Eigenschaft, daß

[19][1] Wir werden den Beweis des Prinzips der kleinsten Zahl später im Rahmen des Formalismus vorführen. (*vide* [**?**], § 6, S. 284–285.)

$p+2$ ebenfalls eine Primzahl ist, oder es gibt eine größte Primzahl von dieser Eigenschaft.“

„Entweder besteht für jede ganze Zahl $n > 2$ und beliebige positive ganze Zahlen a, b, c die Ungleichung $a^n + b^n \neq c^n$, oder es gibt eine kleinste solche ganze Zahl $n > 2$, für welche die Gleichung $a^n + b^n = c^n$ mit positiven ganzen Zahlen a, b, c lösbar ist.“

Derartige Beispiele der Zahlentheorie sind geeignet, um uns die einfachsten Formen nichtfiniter Argumentationen zu verdeutlichen. Dagegen wird uns in der Zahlentheorie das Erfordernis zur Überschreitung des finiten Standpunktes nicht wirklich fühlbar; denn es gibt wohl kaum einen zahlentheoretisch geführten Beweis, bei dem sich die etwa benutzten nichtfiniten Schlußweisen nicht durch ziemlich leichte Modifikationen umgehen ließen.

Ganz anders steht es damit in der Analysis (Infinitesimalrechnung); hier gehört die nichtfinite Art der Begriffsbildung und der Beweisführung geradezu zur Methode der Theorie.

Wir wollen uns den Grundbegriff der Analysis, den Begriff der reellen Zahl, kurz vergegenwärtigen. Man definiert die reelle Zahl entweder als eine Folge beständig wachsender rationaler Zahlen

$$r_1 < r_2 < r_3 < \dots,$$

welche alle unter einer gemeinsamen Schranke liegen$_{d}$,$_{d}$ („Fundamentalreihe“)$_{a}$,$_{a}$ oder als einen unendlichen Dezimalbruch bzw. Dualbruch, oder als eine Einteilung der rationalen Zahlen in zwei Klassen, bei welcher jede Zahl der ersten Klasse kleiner ist als jede Zahl der zweiten Klasse („Dedekindscher Schnitt“).

Dabei liegt die Auffassung zu ${}_a\underline{\text{G}}_a$runde, daß die rationalen Zahlen eine
37 festumgrenzte Gesamtheit bilden, die als ein *Individuenbereich* | betrachtet werden kann. Auch die Gesamtheit der möglichen Folgen von rationalen Zahlen, bzw. der möglichen Einteilungen aller rationalen Zahlen wird in der Analysis als ein Individuenbereich gedacht.

Allerdings genügt es, an Stelle der Gesamtheit der rationalen Zahlen die Gesamtheit der ganzen Zahlen zu ${}_a\underline{\text{G}}_a$runde zu legen und an Stelle der Einteilungen aller rationalen Zahlen diejenigen aller ganzen Zahlen zu betrachten. In der Tat ist ja jede positive rationale Zahl ge${}_d\underline{\text{ge}}_d$geben durch ein Zahlenpaar m, n, und jede rationale Zahl überhaupt läßt sich darstellen als Differenz zweier positive${}_d\underline{\text{n}}_{da}\underline{\text{r}}_a$ rationale${}_d\underline{\text{n}}_{da}\underline{\text{r}}_a$ Zahlen, d. h. als ein Paar von Zahlenpaaren $(m, n; p, q)$. Auch läßt sich ja jeder Dualbruch von der Form

$$0, a_1 a_2 a_3 \ldots,$$

worin $a_1, a_2, a_3, \ldots$, alle entweder $= 0$ oder $= 1$ sind, als eine Einteilung aller ganzen Zahlen deuten, nämlich als die Einteilung in solche Zahlen k, für welche $a_k = 0$ ist, und solche, für welche $a_k = 1$ ist. Jeder Einteilung der positiven ganzen Zahlen entspricht auf diese Weise umkehrbar eindeutig ein Dualbruch der obigen Form, und andrerseits läßt sich jede reelle Zahl darstellen als Summe einer ganzen Zahl und eines Dualbruchs dieser Form.

Statt der Einteilungen können wir auch *Mengen* von ganzen Zahlen betrachten; denn jede Menge von ganzen Zahlen bestimmt die Einteilung in solche Zahlen, die zur Menge gehören und solche, die nicht dazu gehören, und ist auch umgekehrt durch diese Einteilung vollständig bestimmt. – Dieselbe Bemerkung gilt auch für den Dedekindschen Schnitt, der ebenfalls durch eine *Menge* von rationalen Zahlen, nämlich die Menge der kleineren rationalen Zahlen vertreten werden kann. Eine solche Menge ist durch folgende Eigenschaften charakterisiert: 1. sie enthält mindestens eine und nicht alle rationalen Zahlen; 2. zugleich mit einer rationalen Zahl enthält sie alle kleineren rationalen Zahlen und mindestens eine größere.

Durch solche Umformungen wird aber die existentiale Voraussetzung, die wir für die Analysis zu ${}_a\underline{\mathrm{G}}_a$runde legen müssen, nur unwesentlich abgeschwächt. Es bleibt das Erfordernis, die Mannigfaltigkeit der ganzen Zahlen und auch die der Mengen von ganzen Zahlen als festen Individuenbereich aufzufassen, für den das „tertium non datur" Gültigkeit hat und mit Bezug auf den eine Aussage über die Existenz einer ganzen Zahl bzw. einer Zahlenmenge mit einer Eigenschaft $\mathfrak{E}$ unabhängig von ihrer Deutbarkeit als Partialurteil sinnvoll ist. Während also das Unendlich-Große und das Unendlich-Kleine durch diese Theorie der reellen Zahlen im eigentlichen Sinne ausgeschaltet wird und nur noch im Sinne einer Redeweise bestehen bleibt, wird das *Unendliche als Gesamtheit* beibehalten. Ja, man kann sagen, daß die Vorstellung von den unendlichen Gesamtheiten systematisch erst hier in der strengen Grundlegung der Analysis eingeführt und zur Geltung gebracht wurde.

| Um uns wirklich davon zu überzeugen, daß die Voraussetzung der Tota- 38
lität des Bereiches der ganzen Zahlen bzw. der rationalen Zahlen und ferner des Bereiches der Mengen (Einteilungen) von ganzen bzw. von rationalen Zahlen wesentlich in der Begründung der Analysis zur Anwendung kommt, brauchen wir uns nur einige von den grundlegenden Begriffsbildungen und Überlegungen vorzuführen.

Wird die reelle Zahl durch eine Folge von wachsenden rationalen Zahlen

$$r_1 < r_2 < r_3 < \dots$$

definiert, so ist schon der Begriff der Gleichheit von reellen Zahlen nicht finit. Denn ob zwei solche Folgen von rationalen Zahlen dieselbe reelle Zahl definieren, hängt davon ab, ob es zu jeder Zahl in der einen Folge eine größere in der anderen Folge und umgekehrt gibt. Ein allgemeines Verfahren zur Entscheidung hierüber besitzen wir aber nicht.

Geht man andererseits aus von der Definition der reellen Zahl durch einen Dedekindschen Schnitt, so hat man zu beweisen, daß jede beschränkte Folge wachsender rationaler Zahlen einen Schnitt erzeugt, welcher die obere Grenze der Folge darstellt. Diesen Schnitt erhält man als die Einteilung der rationalen Zahlen in solche, die von mindestens einer Zahl aus der Folge übertroffen werden, und solche, die nicht übertroffen werden. Das heißt: eine rationale Zahl r wird zur ersten oder zur zweiten Klasse gerechnet, je nachdem es unter den Zahlen der Folge eine solche gibt, die $> r$ ist, oder alle Zahlen der Folge $\leq r$ sind. Dies ist wiederum keine finite Unterscheidung.

Ähnlich verhält es sich, wenn man die reellen Zahlen durch unendliche Dezimalbrüche oder durch Dualbrüche definiert. Es muß wiederum gezeigt werden, daß eine beschränkte Folge rationaler Zahlen

$$r_1 < r_2 < \dots$$

einen Dezimalbruch bzw. Dualbruch bestimmt. Nehmen wir der Einfachheit halber an, es handle sich um eine Folge positiver echter Brüche:

$$0 < b_1 < b_2 < \dots < 1,$$

und es soll der Dualbruch

$$0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

bestimmt werden, der die obere Grenze der Folge von Brüchen darstellt. Diese Bestimmung geschieht folgendermaßen:

$a_!$ ist $= 0$ oder $= 1$, je nachdem alle Brüche $b_n < \frac{1}{2}$ sind oder nicht;

a_{m+1} ist $= 0$ oder $= 1$, je nachdem alle Brüche b_n kleiner sind als

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \dots + \frac{a_m}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}}$$

oder nicht.

In allen diesen Fällen hat man es mit Alternativen zu tun, bei denen es sich darum handelt, ob alle rationalen Zahlen einer gegebenen Folge

$$r_1, r_2, r_3, \ldots$$

| eine gewisse Ungleichung erfüllen, oder ob diese mindestens einmal eine 39
Ausnahme erleidet. Eine solche Alternative benutzt das „tertium non datur" für die ganzen Zahlen; denn es wird dabei vorausgesetzt, daß entweder für alle ganzen Zahlen n als Index die rationale Zahl r_n der betreffenden Ungleichung genügt, oder daß es eine ganze Zahl n gibt, für welche r_n gegen die Ungleichung verstößt.

Mit dieser Inanspruchnahme der *Gesamtheit der ganzen Zahlen* als Individuenbereich kommen wir jedoch für die Analysis nicht aus, sondern wir brauchen überdies die *Gesamtheit der rellen Zahlen* als Individuenbereich. Wie wir sahen, ist diese Gesamtheit im wesentlichen gleichzusetzen mit derjenigen der Mengen von ganzen Zahlen$_{a_2 - a_2}$

Die Erforderlichkeit des Individuenbereiches der reellen Zahlen macht sich schon beim Beweise des Satzes von der oberen Grenze einer beschränkten Menge von reellen Zahlen geltend. Um die Existenz der oberen Grenze für eine beschränkte, also etwa im Intervall von 0 bis 1 gelegene Menge von reellen Zahlen auf Grund der Dedekindschen Definition der reellen Zahl zu beweisen, betrachtet man die Einteilung der rationalen Zahlen in solche, die von einer reellen Zahl aus der Menge übertroffen werden, und solche, die nicht übertroffen werden. Man rechnet also eine rationale Zahl r zur ersten Klasse, dann und nur dann, wenn es in der Menge eine reelle Zahl $a > r$ gibt.

Nun muß man sich klarmachen, daß eine Menge uns in der Analysis im allgemeinen nur durch eine definierende Eigenschaft gegeben ist, d. h. die Menge wird eingeführt als die Gesamtheit derjenigen reellen Zahlen, welche eine gewisse Bedingung $\mathfrak{B}$ erfüllen. Die Frage, ob es in einer betrachteten Menge eine reelle Zahl $a > r$ gibt, kommt also darauf hinaus, ob es eine reelle Zahl gibt, welche größer als r ist und zugleich eine gewisse Bedingung $\mathfrak{B}$ erfüllt. In dieser Fassung wird es deutlich, daß wir die Gesamtheit der reellen Zahlen als einen Individuenbereich zu ${}_a\underline{\mathrm{G}}_a$runde legen[20].

Es sei noch bemerkt, daß der beschriebene Prozeß zur Gewinnung der oberen Grenze auf die Bildung einer *Vereinigungsmenge* hinauskommt. In

[20][1] Auf den hier vorliegenden Sachverhalt hat Weyl in seiner Schrift *Das Kontinuum* (*vide* [**?**]) besonders nachdrücklich hingewiesen.

der Tat ist ja jede reelle Zahl definiert durch eine Einteilung der rationalen Zahlen in kleinere und größere bzw. durch die Menge der kleineren rationalen Zahlen. Die gegebene Menge von reellen Zahlen stellt sich hiernach dar als eine Menge $\mathfrak{M}$ von Mengen von rationalen Zahlen. Und die obere Grenze der Menge $\mathfrak{M}$ wird gebildet von der Menge derjenigen rationalen Zahlen, welche mindestens einer der Mengen aus $\mathfrak{M}$ angehören. Die Gesamtheit dieser rationalen Zahlen ist aber gerade die Vereinigungsmenge von $\mathfrak{M}$.

Es gelingt auch nicht etwa, die Heranziehung des Individuenbereiches der
40 reellen Zahlen dadurch zu umgehen, daß man anstatt der Dedekind|schen Definition der reellen Zahlen die Definition durch eine Fundamentalreihe oder durch einen Dualbruch benutzt. Vielmehr wird hierdurch der Prozeß nur noch komplizierter, indem noch ein rekursives Verfahren hinzutritt. Es sei dies kurz für den Fall der Definition der reellen Zahlen durch Dualbrüche angegeben. Wir haben es dann zu tun mit einer Menge von Dualbrüchen

$$0, a_1 a_2 a_3 \ldots,$$

die wiederum durch eine gewisse Bedingung $\mathfrak{B}$ bestimmt ist; und die obere Grenze stellt sich dar durch einen Dualbruch

$$0, b_1 b_2 \ldots,$$

der folgendermaßen definiert ist:

$b_1 = 0$, wenn bei allen Dualbrüchen, welche der Bedingung $\mathfrak{B}$ genügen, an erster Dualstelle 0 steht, sonst ist $b_1 = 1$;

$b_{n+1} = 0$, wenn bei allen Dualbrüchen, welche der Bedingung $\mathfrak{B}$ genügen, und deren erste$_d\underline{\text{n}}_d$ n Dualziffern bzw. mit $b_1, b_2, \ldots, b_n$ übereinstimmen, an der $(n+1)$ten Stelle 0 steht, sonst ist $b_{n+1} = 1$.

Hier tritt die Gesamtheit der reellen Zahlen auf als die Gesamtheit aller Dualbrüche, und wir machen Gebrauch von der Voraussetzung, daß für die aus Nullen und Einsen gebildeten unendlichen Folgen das „tertium non datur“ gilt. –

Nun ist aber auch diese Voraussetzung der Gesamtheit aller reellen Zahlen bzw. aller Dualbrüche als eines Individuenbereiches noch nicht ausreichend. Dies zeigt sich an folgendem einfachen Fall: Es sei a die obere Grenze einer Menge von reellen Zahlen. Wir wollen zeigen, daß es eine Folge von reellen Zahlen *aus der Menge* gibt, welche gegen a konvergiert. Hierzu schließen wir folgendermaßen:

Aus der Eigenschaft der oberen Grenze folgt, daß es für jede ganze Zahl n eine Zahl c_n in der Menge gibt, so daß

$$a - \frac{1}{n} < c_n \leq a,$$

also

$$|a - c_n| < \frac{1}{n}$$

ist. Die Zahlen c_n bilden somit eine gegen a konvergente Folge, und sie gehören alle der betrachteten Menge an.

Wenn wir so argumentieren, so verdecken wir durch die Ausdrucksweise einen prinzipiellen Beweispunkt. Indem wir nämlich die Schreibweise c_n anwenden, denken wir uns für jede Zahl n unter denjenigen reellen Zahlen c, welche zu der betrachteten Menge gehören, und die Ungleichung

$$a - \frac{1}{n} < c \leq a$$

erfüllen, eine bestimmte ausgezeichnet.

| Hierin liegt eine Voraussetzung. Was wir unmittelbar schließen können, ist 41
nur, daß es zu jeder Zahl n eine Teilmenge $\mathfrak{M}_n$ unserer betrachteten Menge gibt, welche aus den Zahlen besteht, die der obigen Ungleichung genügen, und daß für jedes n diese Teilmenge mindestens ein Element enthält. Nun wird vorausgesetzt, daß wir in jeder dieser Mengen

$$\mathfrak{M}_1,\ \mathfrak{M}_2,\ \mathfrak{M}_3,\ \ldots$$

je ein Element, c_1 in $\mathfrak{M}_1$, c_2 in $\mathfrak{M}_2$, … c_n in $\mathfrak{M}_n$, auszeichnen können, so daß wir eine bestimmte unendliche Folge von reellen Zahlen erhalten.

Wir haben hier einen Spezialfall des *Auswahlprinzips* vor uns, welches allgemein folgendes besagt: „Wenn es zu jedem Ding x einer Gattung $\mathfrak{G}_1$ mindestens ein Ding y der Gattung $\mathfrak{G}_2$ gibt, welches zu x in der Beziehung $\mathfrak{B}(x, y)$ steht, so gibt es eine Funktion φ, welche jedem Ding x der Gattung $\mathfrak{G}_1$ eindeutig ein solches Ding $\varphi(x)$ der Gattung $\mathfrak{G}_2$ zuordnet, welches zu x in der Beziehung $\mathfrak{B}(x, \varphi(x))$ steht."

In dem vorliegenden Fall ist die Gattung $\mathfrak{G}_1$ die der positiven ganzen Zahlen, $\mathfrak{G}_2$ die der reellen Zahlen, die Beziehung $\mathfrak{B}(x, y)$ besteht in der Ungleichung

$$a - \frac{1}{x} < y \leq a,$$

und die Funktion φ, deren Existenz aus dem Auswahlaxiom entnommen wird, ist die Zuordnung der reellen Zahl c_x zu ihrer Nummer x.

In der Anwendung des Auswahlprinzips, welches zuerst von Zermelo als eine besondere Voraussetzung erkannt und in mengentheoretischer Fassung formuliert worden ist, liegt eine weitere Art der Überschreitung des finiten Standpunktes vor, die über die Anwendung des „tertium non datur“ noch hinausgeht. Die angestellte Betrachtung von methodischen Beispielen lehrt uns, daß die Begründung der Infinitesimalrechnung, wie sie seit der Entdeckung der strengen Methoden gegeben wird, nicht im Sinne einer Zurückführung auf das *finite* zahlentheoretische Denken erfolgt. Die hier vollzogene *Arithmetisierung* der Größenlehre ist insofern *keine restlose*, als gewisse systematische Grundvorstellungen eingeführt werden, die nicht dem Bereich des anschaulichen arithmetischen Denkens angehören. Die Einsicht, welche uns die strenge Begründung der Analysis gebracht hat, besteht darin, daß diese wenigen Grundannahmen schon genügen, um die Größenlehre als Theorie der Zahlenmengen aufzubauen.

Von den Methoden der Analysis werden große Gebiete der Mathematik beherrscht, so die Funktionentheorie, die Differentialgeometrie, die Topologie (Analysis situs). Der weitgehendste Gebrauch von nichtfiniten Annahmen, noch weit über die Voraussetzungen der Analysis hinaus, wird in der allgemeinen *Mengenlehre* gemacht, deren Methoden auch in die neuere abstrakte Algebra und in die Topologie eingreifen.

42 | Die Arithmetik in ihrer üblichen Behandlung entspricht somit keineswegs dem finiten Standpunkt, sondern beruht wesentlich auf hinzutretenden Prinzipien des Schließens. Wir sehen uns daher, wenn wir die Arithmetik in ihrer vorhandenen Form beibehalten wollen und andererseits die Anforderungen des finiten Standpunktes unter dem Gesichtspunkt der Evidenz anerkennen, vor die Aufgabe gestellt, die Anwendung jener Prinzipien, mit denen wir über das finite Denken hinausgehen, durch einen Nachweis ihrer Widerspruchsfreiheit zu rechtfertigen. Wenn ein solcher Nachweis für die Widerspruchsfreiheit der üblichen arithmetischen Schlußweisen gelingt, so haben wir damit auch die Gewähr, daß die Ergebnisse dieser Schlußweisen niemals durch eine finite Feststellung oder eine finite Überlegung widerlegt werden können; denn die finiten Methoden sind ja in der üblichen Arithmetik inbegriffen, und eine finite Widerlegung eines mit den üblichen Mitteln der Arithmetik bewiesenen Satzes würde daher einen Widerspruch innerhalb der üblichen Arithmetik bedeuten.

Wir kommen so auf das im § 1 gestellte Problem zurück. Nun bleibt aber noch die Frage zu beantworten, von welcher die Betrachtungen dieses Paragraphen ausgingen: ob wir nicht, anstatt einen Unmöglichkeitsbeweis für das Auftreten eines Widerspruchs in der Arithmetik an Hand der Formalisierung der Schlüsse zu führen, einfacher direkt ohne zusätzliche Annahmen die ganze Arithmetik begründen und damit jenen Unmöglichkeitsbeweis entbehrlich machen können.

Die Antwort hierauf ist zum einen Teil bejahend, zum anderen verneinend. Nämlich was die Möglichkeit einer direkten finiten Begründung der Arithmetik, in einem für die praktischen Anwendungen ausreichenden Umfange, betrifft, so ist diese durch die Untersuchungen von Kronecker und von Brouwer aufgezeigt worden.

Kronecker, der als erster die Anforderungen des finiten Standpunktes geltend gemacht hat, ging darauf aus, die nichtfiniten Schlußweisen allenthalben aus der Mathematik auszuschalten. In der Theorie der algebraischen Zahlen und Zahlenkörper ist er damit zum Ziel gekommen[21]. Hier gelingt auch die Einhaltung des finiten Standpunktes noch in solcher Weise, daß man von den Sätzen und Beweismethoden nichts Wesentliches aufzugeben braucht.

Nachdem die Problemstellung Kroneckers lange Zeit hindurch gänzlich abgelehnt worden war, hat in neuerer Zeit Brouwer sich an die Aufgabe gemacht, die Arithmetik unabhängig von dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten zu begründen, und hat im Sinne dieses Programms erhebliche Teile
der Analysis und Mengenlehre entwickelt[22]. | Allerdings müssen bei diesem 43
Verfahren wesentliche Sätze preisgegeben und beträchtliche Komplikationen der Begriffsbildung in Kauf genommen werden.

Der methodische Standpunkt des „Intuitionismus“, den Brouwer zu ${}_a\underline{\text{G}}_a$runde legt, bildet eine gewisse *Erweiterung der finiten Einstellung* insofern, als Brouwer zuläßt, daß eine Annahme über das Vorliegen einer Folgerung bzw. eines Beweises eingeführt wird, ohne daß die Folgerung bzw. der Beweis nach anschaulicher Beschaffenheit bestimmt ist. So sind z. B. vom Standpunkt Brouwers Sätze zugelassen von der Form „wenn unter der Voraussetzung $\mathfrak{A}$ der Satz $\mathfrak{B}$ gilt, so gilt auch $\mathfrak{C}$“ oder auch „die Annahme, daß $\mathfrak{A}$ widerlegbar sei, führt auf einen Widerspruch“ bzw. nach Brouwers Ausdrucksweise: „die

21[1] Die Ergebnisse dieser Untersuchungen wurden von Kronecker nicht systematisch publiziert, sondern nur in Vorlesungen mitgeteilt.

22[2] Ein ausführliches Verzeichnis der Veröffentlichungen Brouwers über diesen Gegenstand findet sich in dem Lehrbuch von A. Fraenkel: *Einleitung in die Mengenlehre* (*vide* [**?**]).

Absurdität von $\mathfrak{A}$ ist absurd“.

Eine derartige weitere Fassung des finiten Standpunktes, welche erkenntnistheoretisch darauf hinauskommt, daß man zu den anschaulichen Einsichten noch Überlegungen allgemein logischen Charakters hinzunimmt, erweist sich als erforderlich, wenn man mittels der finiten Betrachtungen über einen gewissen elementaren Bereich hinaus gelangen will. Wir werden in einem vorgerückten Stadium unserer Betrachtungen auf dieses Erfordernis hingeführt werden.

Wenngleich nun durch die genannten Untersuchungen ein Weg gewiesen ist, wie man sich in der Mathematik weitgehend ohne die nicht finiten Schlußweisen behelfen kann, so wird doch damit ein Nachweis für die Widerspruchsfreiheit der üblichen Methoden der Arithmetik keineswegs entbehrlich gemacht. Denn die Vermeidung der nichtfiniten Methoden des Schließens erfolgt nicht im Sinne einer vollen Ersetzung dieser Methoden durch andere Überlegungen, vielmehr gelingt sie in der Analysis und den an sie anschließenden Gebieten der Mathematik nur um den Preis einer wesentlichen Einbuße an Systematik und Beweistechnik.

Dem Mathematiker kann aber nicht zugemutet werden, eine solche Einbuße ohne zwingenden Grund hinzunehmen. Die Methoden der Analysis sind in einem Ausmaß erprobt, wie wohl sonst kaum eine wissenschaftliche Voraussetzung, und sie haben sich aufs glänzendste bewährt. Wenn wir diese Methoden unter dem Gesichtspunkt der Evidenz kritisieren, so entsteht für uns die Aufgabe, den Grund für ihre Anwendbarkeit aufzuspüren, so wie wir es überall in der Mathematik tun, wo ein erfolgreiches Verfahren auf Grund von Vorstellungen geübt wird, die an Evidenz zu wünschen übriglassen.

Es ist also, sofern wir den finiten Standpunkt einnehmen, ein nicht abzuweisendes Problem, uns betreffs der Anwendbarkeit der nichtfiniten Methoden eine klare Einsicht zu verschaffen, und sofern uns unser Vertrauen auf diese Methoden nicht täuscht, kann diese Einsicht nur darin bestehen, daß
44 wir Gewißheit darüber er|halten, daß diese üblichen arithmetischen Methoden niemals zu einem nachweislich falschen Ergebnis führen können, genauer gesagt, daß die Ergebnisse ihrer Anwendung sowohl miteinander wie auch mit jeder vom finiten Standpunkt ersichtlichen Tatsache im Einklang stehen.

Dieses Problem ist aber kein anderes als das eines Nachweises der Widerspruchsfreiheit unserer üblichen Arithmetik.

Zur Behandlung dieses Problems haben wir im § 1 bereits die in der symbolischen Logik ausgebildete Methode der Formalisierung des logischen

Schließens in Aussicht genommen$_{a_2}$[23]$_{a_2}$. Diese Methode erfüllt jedenfalls die Bedingung, daß durch sie die Aufgabe des geforderten Nachweises der Widerspruchsfreiheit – sofern die vollständige Formalisierung der üblichen Arithmetik gelingt – zu einem *finiten* Problem gemacht wird. Denn wenn die übliche Arithmetik formalisiert ist, d. h. ihre Voraussetzungen und Schlußweisen in Ausgangsformeln und Regeln der Ableitung übersetzt sind, so stellt sich ein arithmetischer Beweis als eine anschaulich überblickbare Aufeinanderfolge von Prozessen dar, deren jeder einem von vornherein angegebenen Bestande von in Betracht kommenden Handlungen angehört. Wir haben also dann grundsätzlich dieselbe methodische Sachlage wie in der elementaren Zahlentheorie, und so wie es dort gelingt, Unmöglichkeitsbeweise in finitem Sinne zu führen, z. B. dafür, daß es nicht zwei Ziffern $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ geben kann derart, daß

$$\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = 2 \cdot \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{n},$$

so ist es auch ein finites Problem, zu zeigen, daß es in der formalisierten Arithmetik nicht zwei Beweise geben kann derart, daß die Endformel des einen mit der Negation der Endformel des anderen übereinstimmt.

Von einer Lösung dieses Problems sind wir allerdings noch weit entfernt. Doch sind in der Verfolgung dieses Zieles bereits mannigfache lohnende Ergebnisse gewonnen worden, und es hat sich auf diesem Wege ein neues Feld der Forschung eröffnet, indem die Formalisierung des logischen Schließens zu einer systematischen *Beweistheorie* verwertet wurde, welche die Frage nach der Tragweite der logischen Schlußweisen, die von der traditionellen Logik nur in einer sehr speziellen Form gestellt und gelöst wurde, in systematischer Allgemeinheit behandelt und durch deren Untersuchungsmethode die Probleme der Grundlagen der Mathematik mit den logischen Problemen in unmittelbaren Zusammenhang treten.

Diese Beweistheorie, auch „*Metamathematik*“ genannt, soll im folgenden entwickelt werden. Wir beginnen mit der Formalisierung des Schließens, die wir zunächst unabhängig von der Anwendung auf die Beweistheorie darlegen wollen.

[23][1] Vgl. S. 157.

Kapitel 10

Bernays Project: Text No. 13

Sur le platonisme dans les mathématiques / (Über den Platonismus in der Mathematik[†]) (1935)

Platonism in mathematics

(*L'enseignement mathematique* 24, S. 52–69;
repr. in *Abhandlungen*, S. 62–78)

A62 | Gestatten Sie, daß ich Ihnen meinerseits vom gegenwärtigen Stand der Forschungen über die Grundlagen der Mathematik berichte. Da es in diesem Bereich Fragen gibt, die offen bleiben, bin ich nicht in der Lage, Ihnen ein endgültiges Bild zu entwerfen. Es ist jedoch zu betonen, daß die Situation keineswegs so kritisch ist, wie man glauben könnte, wenn man jene Stimmen hört, die von einer Krise der Grundlagen sprechen. Dieser Ausdruck mag in gewisser Hinsicht gerechtfertigt erscheinen, aber er läßt leicht die Meinung aufkommen, daß die mathematische Wissenschaft in ihren Grundfesten erschüttert sei.

In Wahrheit gedeihen die mathematischen Wisenschaften in voller Sicherheit und Harmonie. Die Ideen von Dedekind, Poincare und Hilbert sind

[†]Vortrag, gehalten am 18. Juni 1934 im Zyklus der „Internationalen Vorträge für mathematische Wissenschaften“ in der Reihe: Mathematische Logik.

systematisch und mit großem Erfolg weiterentwickelt worden, ohne daß sich irgendeine Unstimmigkeit in den Ergebnissen zeigt.

Lediglich in philosophischer Hinsicht sind Einwände erhoben worden. Sie beziehen sich auf bestimmte Denkweisen, die der Infinitesimalrechnung und der Mengenlehre eigen sind. Diese Denkweisen sind zum erstenmal systematisch angewendet worden, als man den Methoden der Infinitesimalrechnung eine strenge Form gegeben hat. Man betrachtet die Gegenstände einer Theorie als die Elemente einer Gesamtheit und folgert daraus: Für jede Eigenschaft, die sich vermittels der Begriffe der Theorie ausdrückt, steht objektiv fest, ob es in der Gesamtheit ein Element gibt, das diese Eigenschaft besitzt oder nicht. Aus dieser Vorstellung läßt sich auch die folgende Alternative herleiten: Entweder alle Elemente einer Menge besitzen eine gegebene Eigenschaft, oder es gibt wenigstens eines, das diese Eigenschaft nicht besitzt.

Man findet in der Axiomatik der Geometrie – in der Form, die Hilbert ihr gegeben hat – ein Beispiel für diese Art der Theorienbildung. Wenn wir die Axiomatik Hilberts mit der Euklids vergleichen, wobei wir davon absehen, daß bei dem griechischen Mathematiker noch einige Axiome fehlen, so bemerken wir, daß Euklid von Figuren spricht, die erst zu konstruieren sind, während für Hilbert die Systeme der | Punkte, der Geraden und der Ebenen A63
bereits von Anfang an existieren. Euklid postuliert: Man kann zwei Punkte durch eine Gerade verbinden; Hilbert dagegen stellt das Axiom auf: Sind zwei beliebige Punkte gegeben, so existiert eine Gerade, auf der beide Punkte liegen. „Existieren" bezieht sich hier auf das System der Geraden. Dieses Beispiel zeigt bereits, daß die Tendenz, von der wir sprechen, dahin geht, die Gegenstände als losgelöst von aller Bindung an das denkende Subjekt zu betrachten.

Da diese Tendenz vor allem in der Philosophie Platons zur Geltung gekommen ist, sei es mir gestattet, sie als „Platonismus" zu bezeichnen.

Der Wert der vom Platonismus inspirierten mathematischen Konzeptionen liegt darin, daß sie Modelle für das abstrakte Vorstellen liefern, die sich durch ihre Einfachheit und ihre logische Geschlossenheit auszeichnen. Diese repräsentieren, mit gewissen Extrapolationen, bestimmte Bereiche der Erfahrung und des Anschaulichen. Wir wissen indessen, daß man die theoretischen Systeme der Geometrie und der Physik arithmetisch darstellen kann. Aus diesem Grunde richten wir unsere Aufmerksamkeit auf den Platonismus in der Arithmetik. Ich spreche übrigens hier von der Arithmetik im weiteren Sinne, worin die Analysis und die Mengenlehre eingeschlossen ist.

Die schwächste der „platonistischen" Annahmen, die von der Arithmetik eingeführt worden sind, ist die von der Gesamtheit der ganzen Zahlen. Daraus resultiert das Prinzip des „tertium non datur" für die ganzen Zahlen: Wenn P ein Prädikat von ganzen Zahlen ist, dann trifft P entweder auf jede Zahl zu, oder es gibt wenigstens eine Zahl, die eine Ausnahme bildet.

Diese Alternative ist – kraft der genannten Annahme – eine unmittelbare Folge des logischen Prinzips des „tertium non datur"; in der Analysis wendet man sie fast ständig an. So folgert man beispielsweise vermittels dieser Alternative: Für zwei reelle Zahlen a und b, die durch konvergierende Reihen gegeben sind, gilt entweder $a = b$ oder $a < b$ oder $b < a$; desgleichen: eine Folge von positiven rationalen Zahlen nähert sich entweder beliebig der Null, oder aber es existiert eine positive rationale Zahl, die kleiner ist als alle Zahlen der Folge.

Auf den ersten Blick erscheinen derartige Alternativen trivial, und man übersieht leicht, daß sich dort eine Annahme eingeschlichen hat.

Aber die Analysis gibt sich nicht mit dieser bescheidenen Art des Platonismus zufrieden; dieser kommt in stärkerem Maße in folgenden Begriffen zur Geltung: Zahlenmenge, Zahlenfolge und Funktion. Hier sieht man ab von den effektiven Möglichkeiten, eine Menge, eine Folge oder eine Funktion zu definieren. A64 Diese Begriffe werden vielmehr in | einem „quasi-kombinatorischen" Sinne gebraucht; darunter verstehe ich: im Sinne einer Analogie zwischen dem Unendlichen und dem Endlichen.

Betrachten wir zum Beispiel die verschiedenen Funktionen, die jeder Zahl einer endlichen Reihe $1, 2, ..., n$ eine Zahl der gleichen Reihe zuordnen. Es gibt n^n Funktionen dieser Art, und jede von ihnen erhält man durch n unabhängige Entscheidungen. Zum Unendlichen übergehend, stellt man sich nun Funktionen vor, die durch eine unendliche Zahl unabhängiger Entscheidungen erzeugt werden, durch welche jeder ganzen Zahl eine ganze Zahl zugeordnet wird, und man zieht die Gesamtheit dieser Funktionen in Betracht. Desgleichen betrachtet man eine Menge ganzer Zahlen als das Ergebnis unendlich vieler unabhängiger Akte, die für jede Zahl entscheiden, ob sie in der Menge enthalten oder nicht enthalten ist. Daran schließt sich die Idee der Gesamtheit dieser Mengen. In analoger Weise werden auch die Folgen und die Mengen reeller Zahlen betrachtet. Die Bildungsgesetze von speziellen Funktionen, Folgen oder Mengen sind – so gesehen – nur Methoden der Angabe eines Gegenstandes, der unabhängig von der Konstruktion und dieser vorgängig Existenz besitzt.

Das Auswahlprinzip ist eine direkte Anwendung der eben erwähnten quasikombinatorischen Auffassungen. Generell wird es in der Theorie der reellen

Zahlen in folgender Form angewendet: Sei

$$M_1, M_2, \ldots\ldots$$

eine Folge von nicht leeren Mengen reeller Zahlen; dann gibt es eine Folge

$$a_1, a_2, \ldots\ldots$$

dergestalt, daß für jeden Index n, a_n Element von M_n ist. Das Prinzip gibt zur Kritik Anlaß, wenn die effektive Konstruktion der Zahlenfolge gefordert wird.

Ein ähnlicher Fall liegt vor bei den, nach Poincaré, imprädikativen Definitionen. Eine imprädikative Definition einer reellen Zahl ist dadurch gekennzeichnet, daß sie eine Bedingung des Inhalts enthält, daß alle reellen Zahlen eine bestimmte Eigenschaft P haben, oder eine Bedingung des Inhalts, es existiere eine reelle Zahl mit der Eigenschaft P.

Diese Art von Definitionen stützt sich auf die Annahme der Gesamtheit der Folgen ganzer Zahlen, da ja eine reelle Zahl durch einen Dezimalbruch dargestellt wird, d. h. durch eine spezielle Folge ganzer Zahlen.

Man verwendet sie insbesondere zum Beweis des Grundtheorems, daß eine beschränkte Menge reeller Zahlen immer eine obere Grenze, d. h. eine kleinste obere Schranke besitzt. In den Theorien von Cantor | erstrecken A65
sich die platonistischen Begriffsbildungen weit über die Theorie der reellen Zahlen hinaus. Dies geschieht durch die iterierte Anwendung des quasikombinatorischen Funktionsbegriffes und durch die Verwendung von Vereinigungsprozessen. Das sind ja die bekannten Methoden der Mengenlehre.

Die platonistischen Konzeptionen der Analysis und der Mengenlehre haben auch in den modernen Theorien der Algebra und der Topologie Anwendung gefunden, wo sie sich als sehr fruchtbar erwiesen haben.

Dieser kurze Überblick mag genügen, um den Platonismus und seine Anwendung in der Mathematik zu charakterisieren. Diese Anwendung ist eine so übliche, daß es keine Übertreibung ist, wenn man sagt, der Platonismus sei heute herrschend in der Mathematik.

Andererseits sehen wir jedoch, daß diese Tendenz von Anfang an grundsätzlich kritisiert worden ist und viele Diskussionen verursacht hat. Die Kritik hat sich verstärkt durch die Entdeckung der Paradoxien der Mengenlehre, obwohl durch diese Antinomien nur der extreme Platonismus widerlegt wird.

Bisher haben wir nur einen beschränkten Platonismus behandelt, der nicht mehr prätendiert als – sozusagen – eine idealisierende Extrapolation eines Denkbereiches. Aber man ist hierbei nicht stehengeblieben. Viele Mathematiker und Philosophen interpretieren die Methoden des Platonismus im Sinne eines Begriffsrealismus und postulieren die Existenz einer Ideenwelt, die alle Gegenstände und Beziehungen der Mathematik enthält. Durch die Antinomie von Russell-Zermelo, aber auch durch andere Antinomien, hat sich dieser absolute Platonismus als unhaltbar erwiesen.

Wenn man diese Widersprüche in ihrer rein logischen Form zum erstenmal hört, wirken sie wie Wortspiele ohne ernstliche Bedeutung. Man muß jedoch bedenken, daß diese anscheinend spielerischen Formen der Paradoxien als Konsequenzen aus den Forderungen des absoluten Platonismus erhalten wurden.

Es geht in diesen Antinomien besonders darum, sichtbar zu machen, daß es unmöglich ist, folgende Dinge miteinander in Einklang zu bringen: den Gedanken der Gesamtheit aller mathematischen Gegenstände und die allgemeinen Begriffe von Menge und Funktion; in der Tat, die Gesamtheit selber würde einen Bereich von Elementen für weitere Mengen sowie von Argumenten und Werten für weitere Funktionen ergeben.

Wir müssen also auf den absoluten Platonismus verzichten. Dabei ist zu betonen, daß dieses fast die einzige Einschränkung ist, die sich aus den A66 genannten Widersprüchen ergibt. Mancher mag das bedauern, da | man sich doch von allen Seiten auf die Paradoxien beruft. In der Tat wird jedoch durch das Erfordernis, die Paradoxien zu vermeiden, noch kein eindeutiges Programm festgelegt. Insbesondere wird der beschränkte Platonismus von diesen Antinomien überhaupt nicht berührt.

Jedenfalls erhielt die Grundlagenkritik der Analysis von dieser Seite einen neuen Impuls, und unter den verschiedenen Möglichkeiten, den Widersprüchen auszuweichen, bot sich die der völligen Elimination des Platonismus als die radikalste an.

Sehen wir zu, wie diese Elimination sich vollziehen läßt. Sie geschieht in zwei Schritten entsprechend den beiden wesentlichen Annahmen des Platonismus. Der erste Schritt besteht darin, die Begriffe einer Menge, einer Folge, einer Funktion, die ich „quasi-kombinatorisch" genannt habe, durch konstruktive Begriffe zu ersetzen. Der Gedanke einer unendlichen Zahl unabhängiger Bestimmungen wird verworfen. Man betont, daß eine unendliche Folge oder ein Dezimalbruch nur durch ein arithmetisches Gesetz festgelegt werden kann, und betrachtet das Kontinuum als eine Menge von Elementen, die durch derartige Gesetze definiert sind. Dieses Vorgehen erfolgt im Sinne der Tendenz zur vollkommenen Arithmetisierung der Analysis. In der

Tat muß man zugestehen, daß in der gewöhnlichen Methode der Analysis die Arithmetisierung keine vollständige ist. Die Begriffsbildungen, die man hier anwendet, reduzieren sich nicht völlig – wie wir gesehen haben – auf den Begriff der ganzen Zahl und die logischen Begriffe.

Wenn wir indessen den Gedanken verfolgen, daß jede reelle Zahl durch ein arithmetisches Gesetz definiert ist, dann drängt sich die Idee der Gesamtheit der reellen Zahlen nicht mehr auf, und das Auswahlprinzip verliert seine Evidenz. Überdies sind wir dann genötigt, wofern wir nicht – wie Russell und Whitehead – zusätzliche Voraussetzungen einführen, auf verschiedene gebräuchliche Schlußweisen zu verzichten. Diese Konsequenzen hat vor allem Hermann Weyl in seinem Buch >Das Kontinuum< zur vollen Deutlichkeit gebracht.

Gehen wir nun zum zweiten Schritt der Elimination über. Er besteht darin, auf die Idee der Gesamtheit der ganzen Zahlen zu verzichten. Dieser Gesichtspunkt wurde zuerst von Kronecker geltend gemacht und später dann von Brouwer systematisch weiterentwickelt.

Obwohl viele von Ihnen im März eine authentische Darstellung dieser Methode von Prof. Brouwer selber erhalten haben, erlaube ich mir dennoch einige erklärende Worte.

In bezug auf Kronecker muß man zunächst ein Mißverständnis beseitigen, das durch den häufig zitierten Aphorismus nahegelegt wird: „Die natürlichen Zahlen sind von Gott geschaffen, alles andere in der | Mathematik ist Menschenwerk." Wenn das wirklich die Überzeugung von Kronecker gewesen wäre, hätte er die Vorstellung von der Gesamtheit der ganzen Zahlen anerkennen müssen. A67

In Wahrheit ist die Methode Kroneckers – und auch die von Brouwer – gerade dadurch charakterisiert, daß sie die Voraussetzung vermeidet, es gebe eine fertige Reihe der natürlichen Zahlen, die eine ideale Gegenständlichkeit (in platonistischem Sinne) bildet.

Man kann nach Kronecker und Brouwer von der Zahlenreihe nur im Sinne eines nie endenden Prozesses sprechen, der über jede erreichte Grenze hinausgeht.

Dieser Ausgangspunkt hat weitere Divergenzen zur Folge, vor allem in der Anwendung und Interpretation logischer Formen: Weder ein allgemeines Urteil über die natürlichen Zahlen noch ein Existenzurteil kann so aufgefaßt werden, daß es eine Eigenschaft der Zahlenreihe ausdrückt. Ein allgemeiner zahlentheoretischer Satz muß als eine Voraussage angesehen werden, daß eine gewisse Eigenschaft bei jeder Zahlenkonstruktion angetroffen wird. Die

Behauptung der Existenz einer Zahl mit einer bestimmten Eigenschaft wird als Teilaussage einer bestimmten Behauptung interpretiert, die eine Zahl der fraglichen Eigenschaft angibt oder einen Weg weist, um zu einer solchen Zahl zu gelangen. Dieses nennt Hilbert ein „Partialurteil".

Aus dem gleichen Grunde hat die Negation eines allgemeinen Satzes oder eines Existenzsatzes über die natürlichen Zahlen keinen unmittelbaren Sinn. Man muß die Negation verschärfen, um zu einer mathematischen Behauptung zu gelangen. Eine solche Verschärfung der Negation eines Satzes, welcher die Existenz einer Zahl mit einer Eigenschaft P aussagt, wird z. B. durch die Aussage geliefert, daß es eine Zahl der Eigenschaft P nicht geben kann oder daß die Annahme einer Zahl dieser Eigenschaft zu einem Widerspruch führt. Für solche verschärfte Negationen ist jedoch das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten nicht mehr anwendbar.

Auf diese Weise ergeben sich die für Brouwers „Intuitionismus" charakteristischen Komplikationen. So kann man z.B. nicht generell die folgende Alternative anwenden: Eine unendliche Reihe mit positiven Gliedern ist entweder konvergent oder divergent; zwei konvergierende Summen repräsentieren entweder dieselbe reelle Zahl oder verschiedene Zahlen. In der Theorie der ganzen Zahlen und der algebraischen Zahlen lassen sich diese Schwierigkeiten vermeiden, und es gelingt hier, alle wesentlichen Theoreme und Begründungen aufrechtzuerhalten.

A68 In der Tat hat schon Kronecker gezeigt, daß die Theorie der alge- | braischen Zahlkörper sich nach seinem methodischen Programm entwickeln läßt, also ohne auf die Gesamtheit der ganzen Zahlen Bezug zu nehmen.[1]

Was die Analysis angeht, so wissen Sie, daß diese von Brouwer gemäß den Forderungen des Intuitionismus entwickelt wurde. Man muß allerdings dabei einige Theoreme der gebräuchlichen Analysis aufgeben, so z. B. den

[1] Zu diesem Zweck hat Kronecker in seinen Vorlesungen u. a. ein Verfahren dargelegt, wie man den Begriff einer reellen algebraischen Zahl einführen kann, eine Methode, die man fast ganz vergessen hat, obwohl sie die einfachste ist, um diesen Begriff zu definieren. Die Methode besteht darin, die reellen algebraischen Zahhlen darzustellen durch die Zeichenwechsel von irreduziblen Polynomen einer Variablen mit ganzen rationalen Koeffizienten; ausgehend von dieser Definition führt man die Elementaroperationen und die Größenbeziehung für die reellen algebraischen Zahlen ein und stellt fest, daß die geläufigen Rechengesetze gültig sind; schließlich beweist man, daß ein Polynom mit algebraischen Koeffizienten, welches für zwei algebraische Argumente a und b Werte von verschiedenem Vorzeichen annimmt, zwischen a und b eine Nullstelle hat.

Fundamentalsatz, daß jede stetige Funktion in einem abgeschlossenen Intervall ein Maximum besitzt. Nur Weniges von der Mengenlehre bleibt in der intuitionistischen Mathematik erhalten.

Summarisch können wir sagen, daß der Intuitionismus für die Zahlentheorie angemessen ist, die halb-platonistische Methodik, welche die Vorstellung von der Gesamtheit der ganzen Zahlen verwendet, jedoch die quasikombinatorischen Begriffe vermeidet, für die Theorie der reellen Zahlen angemessen ist und die gebräuchliche platonistische Methodik für die geometrische Theorie des Kontinuums. Diese Situation ist keineswegs erstaunlich; ist es doch ein dem heutigen Mathematiker vertrautes Verfahren, in jeder Disziplin nur die für sie notwendigen Voraussetzungen zu verwenden.

Durch diese Beschränkung gewinnt eine Theorie an methodischer Klarheit; und in dieser Richtung erweist sich der Intuitionismus als fruchtbar.

Aber wie Sie wissen, begnügt sich der Intuitionismus nicht mit dieser Rolle; er wendet sich gegen die gebräuchliche Mathematik und behauptet, allein die wahre Mathematik zu vertreten.

Andrerseits sind die Mathematiker im allgemeinen gar nicht bereit, die bewährten und eleganten Methoden der Analysis gegen eine kompliziertere Methodik einzutauschen, ohne daß es dafür eine zwingende Notwendigkeit gäbe. | A69

Man muß also die Frage grundsätzlich betrachten. Versuchen wir uns den Intuitionismus und seine Philosophie genauer zu vergegenwärtigen.

Die Instanz, auf die sich Brouwer beruft, ist die Evidenz. Er behauptet, daß die Vorstellungen, auf die sich der Intuitionismus stützt, uns in evidenter Weise durch die reine Anschauung gegeben sind. In dieser Berufung auf die reine Anschauung steht er zum Teil in Einklang mit Kant. Während aber für Kant eine reine Anschauung von Raum und Zeit existiert, erkennt Brouwer nur die Anschauung der Zeit an, von der er wie Kant die Zahlvorstellung ableitet.

Was diese philosophische Position angeht, muß man Brouwer, wie mir scheint, zwei wesentliche Dinge zugestehen: erstens, daß der Begriff der natürlichen Zahl einen anschaulichen Ursprung hat. Daran haben auch die Untersuchungen der Logiker, auf die ich später zurückkommen werde, nichts geändert. Zweitens ist zuzugestehen, daß man die Arithmetik und die Geometrie nicht in der Weise gleichstellen darf, wie Kant es getan hat. Die Vorstellung der Zahl ist elementarer als die geometrischen Vorstellungen.

Jedoch die Existenz einer geometrischen Anschauung völlig abzulehnen, erscheint als ein wenig voreilig. Lassen wir aber diese Frage hier beiseite; es gibt dringendere: Ist es wirklich sicher, daß sich die Evidenz der arithmetischen Anschauung genauso weit erstreckt, wie es zur Abgrenzung der intuitionistischen Arithmetik erforderlich ist? Und schließlich: Ist es möglich, eine scharfe Grenze zu ziehen zwischen dem, was evident und dem, was lediglich plausibel ist?

Ich glaube, diese beiden Fragen wird man verneinen müssen. Was zunächst die Evidenz im allgemeinen angeht, so wissen Sie, daß die Menschen – und selbst die Wissenschaftler – darüber verschiedener Meinung sind. Sogar ein und derselbe Mensch verwirft mitunter Annahmen, die ihm vorher als evident erschienen.

Ein Beispiel einer vieldiskutierten Evidenzfrage, über welche bis heute Meinungsverschiedenheit besteht, ist die der Evidenz des Parallelenaxioms. Ich glaube, daß die Kritik, die sich gegen dieses Axiom gerichtet hat, sich zum Teil durch die besondere Stellung erklärt, die es im System Euklids hat. Verschiedene andere Axiome waren hier weggelassen, so daß sich das Parallelenaxiom von den übrigen durch seine Komplikation unterschied.

Ich möchte mich begnügen, hierzu das folgende zu bemerken: Man kann überhaupt die geometrische Evidenz anzweifeln; man kann der Meinung sein, sie erstrecke sich nur auf topologische Gegebenheiten oder auch auf die Sachverhalte, die durch die projektiven Axiome ausgedrückt werden. Man kann
A70 andererseits behaupten, die geometrische Intuition | sei nicht exakt. Diese Ansichten sind konsequent, und zugunsten einer jeden von ihnen können Argumente angeführt werden. Aber zu behaupten, die metrische Geometrie besitze eine Evidenz, die auf diejenigen Gesetze beschränkt ist, die der euklidischen Geometrie mit derjenigen von Bolyai-Lobatschefskij gemeinsam sind, also eine exakte metrische Evidenz, die aber nicht die Existenz eines exakten Quadrats garantiert, eine solche Behauptung scheint mir sehr künstlich. Dennoch haben mehrere Mathematiker diese Ansicht vertreten.

Es ging uns hier darum, die Schwierigkeiten aufzuzeigen, denen man begegnet, wenn man den Bereich der Evidenz abgrenzen will. Diese Schwierigkeiten ändern jedoch nichts daran, daß es unbestreitbare Evidenzen gibt, und der Intuitionismus weist jedenfalls solche Evidenzen auf. Aber bewegt er sich wirklich nur im Bereich dieser elementaren Evidenzen? Dies steht nicht völlig außer Zweifel, und zwar aus folgendem Grunde: Der Intuitionismus läßt gänzlich die Möglichkeit außer acht, daß die Rechenoperationen, die für die Anwendung der rekursiven Definitionen erfordert werden, für sehr große Zahlen keine konkrete Bedeutung mehr besitzen. Ausgehend von zwei ganzen Zahlen k, l, gelangt man ohne weiteres zu k^l; dieser Prozeß führt nach wenigen Schritten zu Zahlen, die unsere Vorstellungskraft und sogar die in der Naturwissenschaft vorkommenden Zahlen übertreffen, z. B.

$$67^{\left(257^{729}\right)}\ .$$

Der Intuitionismus ebenso wie die gewöhnliche Mathematik behauptet, eine solche Zahl könne durch eine Dezimalentwicklung dargestellt werden. Könnte man nicht die Kritik, die der Intuitionismus an den Existenzbehauptungen übt, weiterführen und die Frage aufwerfen: Was bedeutet die Behauptung der Existenz einer Dezimalentwicklung der eben genannten Zahl, da wir doch nicht wirklich imstande sind, sie uns zu verschaffen? Brouwer beruft sich auf die Anschauung; aber man kann bezweifeln, ob es hier wirklich eine anschauliche Evidenz gibt. Wird hier nicht vielmehr die allgemeine Methode der Analogie angewandt, die darin besteht, die Beziehungen, die an den berechenbaren Zahlen verifiziert werden können, auf die unzugänglichen Zahlen auszudehnen? In der Tat ist die Anwendung dieser Analogie um so stärker motiviert, als es keine scharfe Unterscheidung zwischen zugänglichen und unzugänglichen Zahlen gibt.

Man könnte hier den Begriff eines „ausführbaren Prozesses" bilden und die rekursiven Definitionen so verstehen, daß ihre Anwendung auf ausführbare Rechenoperationen beschränkt ist. Um Widersprüche zu vermeiden, müßte man sich allerdings davor hüten, das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten auf den Begriff „ausführbar" anzuwenden; | aber eine solche Beschränkung A71
versteht sich für den Intuitionismus ja von selbst.

Ich hoffe, ich werde richtig verstanden: Ich bin weit davon entfernt, zu empfehlen, daß man die Arithmetik mit der genannten Einschränkung betreiben solle. Ich möchte nur zeigen, daß der Intuitionismus sich auf Behauptungen stützt, die zweifelhaft sind und von denen man sich im Prinzip lösen könnte; die dadurch resultierende Theorie wäre freilich ziemlich dürftig.

Es steht also nicht völlig außer Zweifel, daß der Bereich der vollen Evidenz sich auf den ganzen Intuitionismus erstreckt. Andererseits bejahen mehrere Mathematiker die volle Evidenz der intuitionistischen Arithmetik und behaupten ebenso die Evidenz der Vorstellung der Zahlenreihe in folgendem Sinne: Um die Existenz einer Zahl zu beweisen, ist es nicht nötig, für diese Zahl direkt oder durch Rekursion eine obere Schranke aufzuweisen. Übrigens haben wir ja eben gesehen, wie weit die Angabe einer solchen Schranke im allgemeinen von einer wirklich konkreten Vorführung entfernt ist.

Kurz gesagt, der Gesichtspunkt der anschaulichen Evidenz liefert keine eindeutige Entscheidung zugunsten des Intuitionismus.

Außerdem muß man beachten, daß die Evidenzen, auf die sich der Intuitionismus in seinen Überlegungen stützt, nicht alle den Charakter der Unmittelbarkeit besitzen; es treten auch abstrakte Betrachtungen hinzu. In der Tat verwendet man beim Intuitionismus häufig Formulierungen, die eine allgemeine Hypothese der Form enhalten: „Wenn jede Zahl n die Eigenschaft $A(n)$ besitzt, dann hat man B." Eine solche Formulierung wird im Sinne des Intuitionismus folgendermaßen interpretiert: „Wenn erwiesen ist, daß jede Zahl n die Eigenschaft $A(n)$ besitzt, dann B." Hier liegt ein Bedingungssatz von abstraktem Charakter vor; da nämlich im Intuitionismus die Beweismethoden nicht festgelegt sind, ist die Bedingung, daß etwas bewiesen sei, nicht anschaulich bestimmt. Es ist richtig, daß man die genannte Formulierung auch im Sinne eines Partialurteils auffassen kann, d. h. als Angabe einer Überlegung, die von der genannten Bedingung zu dem Schlußsatz B führt, und zwar einer Überlegung, die man effektiv vorlegt. (Das entspricht ungefähr der Interpretation, die Kolmogoroff von dem Intuitionismus gibt.) Jedenfalls muß die Schlußfolgerung von der Annahme der Gültigkeit bzw. der Erwiesenheit eines allgemeinen Satzes ausgehen, einer Annahme, die nicht anschaulich bestimmt ist. Es ist also eine abstrakte Überlegung.

In dem hier betrachteten Beispiel ist das abstrakte Element immerhin
A72 noch eingeschränkt. Der abstrakte Charakter nimmt aber zu, wenn | man die Hypothesen übereinanderschichtet, d. h. wenn man Behauptungen wie die folgenden aufstellt: „Wenn man aus der Annahme, daß $A(n)$ für jede beliebige Zahl n gilt, auf B schließen kann, gibt es auch C" oder: „wenn aus der Annahme, daß die Annahme A auf einen Widerspruch führt, ein Widerspruch folgt, gilt B" oder in kürzerer Form: „wenn die Absurdität von A absurd ist, gilt B". Man kann in der Übereinanderschaltung solcher abstrakter Bedingungssätze noch weiter gehen.

Durch die systematische Anwendung solcher abstrakter Schlußfolgerungen hat Brouwer die Methoden von Kronecker überschritten, und es gelang ihm so, eine allgemeine intuitionistische Logik aufzustellen, die von Heyting systematisiert wurde.

Betrachtet man diese intuitionistische Logik, in welcher der Begriff der Folgerung unbeschränkt angewendet wird, und vergleicht man die Methode, die hier angewendet wird, mit der gewöhnlichen Methode, so bemerkt man, daß es nicht das wesentliche Charakteristikum des Intuitionismus ist, sich für das mathematische Verfahren ausschließlich auf anschauliche Evidenz zu stützen, sondern vielmehr Bezug zu nehmen auf das denkende und handelnde Subjekt.

Das ist eine grundsätzliche methodische Haltung. Sie steht im Gegensatz zu der üblichen Art, Mathematik zu betreiben, die darin besteht, bei der Aufstellung von Theorien von dem denkenden Subjekt möglichst zu abstrahieren.

Diese Feststellung läßt uns daran zweifeln, ob der Intuitionismus die einzige Methode der mathematischen Überlegung ist. Denn selbst wenn wir zugeben, daß die Tendenz zur Loslösung vom denkenden Subjekt im Platonismus zu weit getrieben worden ist, müssen wir darum noch nicht glauben, die Wahrheit liege im anderen Extrem. Indem wir die beiden uns offenstehenden Möglichkeiten betrachten, werden wir vielmehr suchen, durch ihre Ausnutzung eine Anpassung der Methode an den Charakter des Gegenstands der jeweilig behandelten Disziplin zu bewirken.

Für die Zahlentheorie zum Beispiel ist es am natürlichsten, den anschaulichen Begriff der Zahl zu verwenden. In der Tat kann man auf diese Art die Zahlentheorie begründen, ohne ein Axiom der vollständigen Induktion oder ein Unendlichkeitsaxiom einzuführen, wie man es einerseits bei Peano, andererseits bei Russell findet.

Will man den anschaulichen Zahlenbegriff vermeiden, so wird man veranlaßt, einen Begriff höherer Allgemeinheit einzuführen, wie den Allgemeinbegriff einer Behauptung, einer Funktion oder einer beliebigen Zuordnung; diese Begriffe sind jedoch ohne weiteres nicht | scharf abgegrenzt. Sie lassen sich A73
freilich axiomatisch präzisieren, wie das in der axiomatischen Mengenlehre geschieht, aber dann wird das Axiomensystem sehr kompliziert.

Sie wissen, daß Frege versucht hat, die Arithmetik aus der reinen Logik abzuleiten, indem er diese als die allgemeine Theorie der Gesamtheit der mathematischen Gegenstände ansah. Obwohl dieser Unternehmung, die einem absoluten Platonismus entspricht, durch den Widerspruch von Russell-Zermelo die Grundlage entzogen wurde, hat die logische Schule doch nicht den Gedanken aufgegeben, die Arithmetik in ein System der Logik einzuordnen. Anstelle eines absoluten Platonismus hat man dabei axiomatische Voraussetzungen eingeführt. Hierdurch verliert nun allerdings das so gewonnene System den rein logischen Charakter.

Im System der >Principia Mathematica< sind es nicht nur die Axiome des Unendlichen und der Reduzierbarkeit, die über die reine Logik hinausgehen, sondern bereits die Grundannahme eines universellen Bereiches der Individuen und eines Bereiches der Grundprädikate hat nicht rein logischen

Charakter. Daß uns eine Dingwelt zur Verfügung stehe, die gleichsam für die theoretische Behandlung präpariert ist, in der die Gegenständlichkeiten in Subjekte und Prädikate getrennt sind, dies ist in der Tat eine Annahme ad hoc.

Aber selbst mit solchen zusätzlichen Annahmen gelingt es nicht, die Arithmetik dem System der Logik ganz einzuverleiben. Da dieses System sich nach festen Regeln formal aufbaut, müßte man jedes Theorem der Arithmetik mit Hilfe einer bestimmten Reihe von Anwendungen der Regeln, ausgehend von gewissen der Grundaussagen des Systems, gewinnen können. Das ist nun aber nicht der Fall: Nämlich, wie Kurt Gödel bewiesen hat, überschreitet die Arithmetik jeden gegebenen Formalismus. (Die gleiche Feststellung gilt übrigens für die axiomatische Mengenlehre.)

Das Vorhaben, die Arithmetik aus der Logik abzuleiten, ist aus der traditionellen Ansicht hervorgegangen, die Logik stehe zur Arithmetik in der Beziehung des Allgemeinen zum Besonderen. Tatsächlich aber ist die mathematische Abstraktion, wie mir scheint, nicht von geringerem Grade, vielmehr nur anders gerichtet als die logische Abstraktion.

Alle diese Erwägungen vermindern jedoch keineswegs den Wert der Untersuchungen der Logiker, welche auf die systematische Entwicklung der Logik und auf die Formalisierung der mathematischen Beweise gerichtet sind. Hier sollte nur die These verfochten werden, daß für die Zahlentheorie die
A74 anschauliche Methode der Begründung die angemessenste ist. |

Im Gegensatz dazu erscheint in der Theorie des Kontinuums – also im Gebiete der Analysis – die intuitionistische Methode als ziemlich künstlich. Die Idee des Kontinuums ist eine geometrische Idee, welche durch die Analysis in arithmetischer Sprache ausgedrückt wird.

Ist die Methode der intuitionistischen Darstellung des Kontinuums der Idee des Kontinuums besser angepaßt als die übliche Methode?

Hermann Weyl will uns dieses glauben machen. Er wirft der üblichen Analysis vor, das Kontinuum in einzelne Punkte zu zerhacken. Aber trifft dieser Vorwurf nicht eher den Halbplatonismus, der das Kontinuum als eine Menge von arithmetischen Gesetzen betrachtet, als die gebräuchliche Methode? In der Tat besteht doch für die gebräuchliche Methode eine durchaus befriedigende Analogie zwischen der Art, wie sich ein fester Punkt aus dem Kontinuum löst, und der Art, wie eine durch ein arithmetisches Gesetz definierte reelle Zahl sich aus der Gesamtheit der reellen Zahlen löst, in der die einzelnen Elemente im allgemeinen nur implizite auftreten zufolge des quasi-kombinatorischen Begriffes einer Zahlenfolge.

Diese Analogie scheint mir der Natur des Kontinuums angemessener zu sein, als diejenige, die der Intuitionismus zwischen dem fließenden Charakter des Kontinuums und den Ungewißheiten der ungelösten arithmetischen Probleme aufstellt.

Es ist wahr, daß in der gebräuchlichen Analysis der Begriff einer stetigen Funktion und auch derjenige einer differenzierbaren Funktion eine Allgemeinheit besitzt, welche bei weitem unsere anschauliche Vorstellung von einer Kurve übersteigt. Trotzdem gelingt es in dieser Analysis, den Satz vom Maximum einer stetigen Funktion und das Rolle'sche Theorem zu beweisen; auf diese Weise kommt man der anschaulichen Vorstellung näher.

Die intuitionistische Methode dagegen geht zwar von einem viel eingeschränkteren Begriff der Funktion aus, gelangt aber nicht zu so einfachen Theoremen wie die eben erwähnten, vielmehr muß sie diese durch kompliziertere Theoreme ersetzen. Das rührt davon her, daß die intuitionistische Vorstellung nicht jenen Charakter der Geschlossenheit besitzt, der zweifellos zur geometrischen Vorstellung des Kontinuums gehört. Und es ist auch dieser Charakter, der einer vollkommenen Arithmetisierung des Kontinuums entgegensteht.

Durch diese Überlegungen werden wir darauf aufmerksam, daß der Dualismus von Arithmetik und Geometrie in Beziehung steht mit dem Gegensatz von Intuitionismus und Platonismus. Die Arithmetik wird beherrscht durch den Zahlbegriff. Dieser ist ursprünglich anschaulich; es tritt dann aber die platonistische Vorstellung von der Gesamtheit | der natürlichen Zahlen hin- A75
zu. In der Geometrie dagegen ist die platonistische Vorstellung des Raumes die beherrschende. Ausgehend von dieser aber finden dann Konstruktionen von Figuren als Prozesse im intuitionistischen Sinne statt.

So zeigt es sich, daß die beiden Tendenzen, die intuitionistische und die platonistische, ihre natürliche Rolle haben; sie ergänzen sich und man muß sich Gewalt antun, will man auf eine von beiden verzichten.

Aber der Dualismus dieser beiden Tendenzen, ebenso wie der von Arithmetik und Geometrie, hat nicht den Charakter einer vollen Symmetrie. Wie wir bereits bemerkt haben, ist es nicht angängig, Arithmetik und Geometrie ganz auf gleiche Stufe zu stellen: Der Zahlbegriff ist für unsern Geist unmittelbarer als die Vorstellung des Raumes. Desgleichen muß man anerkennen, daß die Annahmen des Platonismus einen Charakter von Transzendenz haben, der sich nicht im Intuitionismus findet.

Dieser Charakter von Transzendenz macht eine gewisse Vorsicht hinsichtlich jeder platonistischen Annahme erforderlich. Denn selbst wenn eine solche

Annahme keineswegs willkürlich ist und sich mit Natürlichkeit einstellt, so kann es dennoch sein, daß die Vorstellungsweise, aus der sie hervorgeht, nur eine beschränkte Anwendung erlaubt, bei deren Überschreitung man in einen Widerspruch geraten würde.

Auf diese Möglichkeit müssen wir um so mehr acht haben, als wir durch das Streben nach Einfachheit angewiesen sind, unseren methodischen Prinzipien einen möglichst großen Anwendungsbereich zu geben. Und die Notwendigkeit einer Einschränkung wird oft nicht bemerkt.

So war es der Fall, wie wir gesehen haben, bei der Vorstellung der Totalität, die vom absoluten Platonismus zu weit erstreckt worden ist. Hierbei zeigte sich die Notwendigkeit einer Einschränkung durch die Entdeckung des Widerspruchs von Russell-Zermelo.

Es ist daher wünschenswert, eine Methode zu finden, die uns garantiert, daß die platonistischen Annahmen, die den mathematischen Theorien zugrunde liegen, nicht die erlaubten Grenzen überschreiten. Die Annahmen, um die es sich dabei handelt, kommen hinaus auf Vorstellungen von Gesamtheiten und auf das Prinzip der Analogie oder der Permanenz der Gesetze. Und die Bedingung, welche die Anwendung dieser Leitgedanken einschränkt, ist keine andere als die der Widerspruchsfreiheit der Folgerungen, die sich aus jenen zugrundegelegten Annahmen ergeben.

Wie Sie wissen, geht Hilbert darauf aus, uns eine solche Garantie der
A76 Widerspruchsfreiheit zu geben, und seine Beweistheorie zielt darauf ab. |

Diese Theorie stützt sich teilweise auf die Ergebnisse der Logiker. Wie diese gezeigt haben, lassen sich die Beweise, die in der Arithmetik, in der Analysis und in der Mengenlehre geführt werden, formalisieren, d. h. sie können mit Hilfe logischer Symbole durch rechnerische Verfahren ausgedrückt werden, die sich nach festen Regeln vollziehen. Den Ausgangssätzen entsprechen dabei Ausgangsformeln und einer logischen Folgerung entspricht die Ableitung einer Formel aus einer oder mehreren Formeln gemäß einer bestimmten Regel. Bei dieser Formalisierung wird eine platonistische Annahme dargestellt durch eine Ausgangsformel oder durch eine Regel des Übergangs von erhaltenen Formeln zu weiteren Formeln. Auf diese Weise wird die Untersuchung nach Beweismöglichkeiten zurückgeführt auf Probleme, wie man sie in der elementaren Zahlentheorie antrifft. Insbesondere erhält man einen Beweis der Widerspruchsfreiheit einer Theorie, wenn es gelingt, zu zeigen, daß es unmöglich ist, zwei kontradiktorische Formeln A und $\overline{A}$ (die Überstreichung stellt die Negation dar) abzuleiten. Diese Unmöglichkeitsbehauptung, um deren Beweis es sich handelt, hat die gleiche Struktur wie z. B. die Behauptung, daß es unmöglich ist, die Gleichung $a^2 = 2b^2$ durch zwei ganze Zahlen a und b zu erfüllen.

Somit wird durch die symbolische Reduktion die Frage der Widerspruchsfreiheit einer Theorie auf eine Frage von elementar-arithmetischem Charakter zurückgeführt.

Ausgehend von diesem Grundgedanken hat Hilbert ein detailliertes Programm einer Beweistheorie entworfen und zugleich auch die Leitgedanken für die Durchführung angegeben. Seine Absicht war dabei, sich an anschauliche kombinatorische Überlegungen zu halten; auf diese wollte er sich gemäß seinem „finiten Standpunkt" beschränken.

In diesem Rahmen des Finiten wurde die Theorie bis zu einem gewissen Punkt entwickelt. Dazu haben mehrere Mathematiker beigetragen: Ackermann, von Neumann, Skolem, Herbrand, Gödel, Gentzen.

Diese Untersuchungen sind indessen nicht über einen verhältnismäßig beschränkten Bereich hinausgekommen. Man gelangte in der Tat nicht einmal dazu, die Widerspruchsfreiheit der axiomatischen Zahlentheorie zu beweisen. Andererseits weiß man, daß die Formalisierung dieser Theorie sich vollziehen läßt, indem man zu dem gewöhnlichen Logikkalkül die formalisierten Axiome von Peano sowie die rekursiven Definitionen der Summe $a + b$ und des Produktes $a.b$ hinzufügt.

Diese Situation wurde geklärt durch ein allgemeines Theorem von Gödel, gemäß welchem ein Beweis der Widerspruchsfreiheit einer formalisierten Theorie nicht dargestellt werden kann mit Hilfe dieses | Formalismus selbst. Aus A77
diesem Theorem erhält man folgendes spezielleres Ergebnis: Es ist unmöglich, mit elementaren kombinatorischen Methoden die Widerspruchsfreiheit einer solchen formalisierten Theorie zu beweisen, im Rahmen deren man jeden Beweis eines arithmetischen Satzes darstellen kann, der mit den elementaren kombinatorischen Methoden geführt ist.

Nun läßt sich dieser Satz, wie es scheint, auf den Formalismus der axiomatischen Zahlentheorie anwenden. Wenigstens haben uns alle bisher unternommenen Versuche kein einziges Beispiel eines elementaren kombinatorischen Beweises geliefert, den man nicht in diesem Formalismus darstellen könnte, und die Methoden, durch welche es in den betrachteten Fällen gelingt, einen Beweis in den genannten Formalismus zu übersetzen, scheinen generell hierfür zu genügen. Indem wir uns auf diesen Anschein stützen,[1]

[1]Wenn man sich anschickt zu zeigen, daß es möglich ist, jeden elementaren kombinatorischen Beweis eines arithmetischen Satzes in den Formalismus der axiomatischen

gelangen wir zu der Folgerung, daß ein stärkeres Mittel als die elementaren Kombinations-Methoden notwendig ist, um die Widerspruchsfreiheit der axiomatischen Zahlentheorie zu beweisen.

Eine Entdeckung von Gödel und Gentzen führt uns zu einer solchen stärkeren Methode. Sie haben unabhängig voneinander gezeigt, daß die Widerspruchsfreiheit der intuitionistischen Arithmetik die Widerspruchsfreiheit der axiomatischen Zahlentheorie nach sich zieht. Zu diesem Ergebnis gelangten sie mit Hilfe der Formalisierung der intuitionistischen Logik und Arithmetik, wie sie von Heyting durchgeführt wurde. Die Überlegung ist verhältnismäßig einfach und erfordert nur elementare Methoden. Um aus dem genannten Ergebnis den Schluß zu ziehen, daß die axiomatische Zahlentheorie widerspruchsfrei ist, genügt es, sich auf die Widerspruchsfreiheit der intuitionistischen Arithmetik zu stützen.

Dieser Beweis der Widerspruchsfreiheit der axiomatischen Zahlentheorie zeigt uns unter anderem, daß der Intuitionismus durch seine abstrakten Folgerungsweisen die elementaren kombinatorischen Methoden wesentlich überschreitet.

Es stellt sich nun die Frage, ob die verstärkte Methodik der Beweistheorie, die sich durch die Zulassung der abstrakten Folgerungsweisen des Intuitionismus ergibt, uns in den Stand setzt, die Wider- | spruchsfreiheit der Analysis zu beweisen. Die Beantwortung dieser Frage würde sehr wichtig und sogar entscheidend sein im Hinblick auf die Beweistheorie wie auch, so scheint es mir, in Hinsicht auf die Rolle, die dem Intuitionismus zuzuschreiben ist.

A78

Die Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik sind in vollem Gange. Mehrere grundsätzliche Fragen bleiben offen, und wir wissen nicht, was uns in diesem Bereich noch zu entdecken beschieden ist. Jedenfalls erwecken diese Untersuchungen in ihren wechselnden Aspekten unsere Neugier – ein Gefühl, das nur in geringerem Maße von den klassischen Bereichen der Mathematik hervorgebracht wird, die bereits eine größere Vollkommenheit erreicht haben.

Zahlentheorie zu übersetzen, sieht man sich der Schwierigkeit gegenüber, den Bereich der elementaren kombinatorischen Methoden genau abzugrenzen.

Kapitel 11

Bernays Project: Text No. 14

Hilberts Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik (1935)

Hilbert's investigations of the foundations of arithmetic

(Hilbert's *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin: Springer, Bd. 3, S. 196–216)

---

196 | Die ersten Untersuchungen Hilberts über die Grundlagen der Arithmetik schließen sich zeitlich und auch gedanklich an seine Untersuchungen der Grundlagen der Geometrie an. Hilbert beginnt in der Abhandlung „Über den Zahlbegriff"[1] damit, daß er für die Arithmetik, entsprechend wie für die Geometrie, die axiomatische Methode zur Geltung bringt, die er der sonst gewöhnlich angewandten „genetischen" Methode gegenüberstellt.

> Vergegenwärtigen wir uns zunächst die Art und Weise der Einführung des Zahlbegriffes. Ausgehend von dem Begriff der Zahl 1, denkt man sich gewöhnlich durch den Prozeß des Zählens zunächst die weiteren ganzen rationalen positiven Zahlen $2, 3, 4, \ldots$ entstanden und ihre Rechnungsgesetze entwickelt; sodann gelangt

[1] *Vide* [?].

man durch die Forderung der allgemeinen Ausführung der Subtraktion zur negativen Zahl; man defini$_d\underline{\text{e}}_d$rt ferner die gebrochene Zahl, etwa als ein Zahlenpaar – dann besitzt jede lineare Funktion eine Nullstelle –, und schließlich die reelle Zahl als einen Schnitt oder eine Fundamentalreihe – dadurch erreicht man, daß jede ganze rationale indefinite, und überhaupt jede stetige indefinite Funktion eine Nullstelle besitzt. Wir können diese Methode der Einführung des Zahlbegriffs die *genetische Methode* nennen, weil der allgemeinste Begriff der reellen Zahl durch sukzessive Erweiterung des einfachen Zahlbegriffes *erzeugt* wird.

Wesentlich anders verfährt man beim Aufbau der Geometrie. Hier pflegt man mit der Annahme der Existenz der sämtlichen Elemente zu beginnen, d. h. man setzt von vorn$_a\underline{\text{e }}_a$herein drei Systeme von Dingen, nämlich die Punkte, die Geraden und die Ebenen, voraus und bringt dann diese Elemente – wesentlich nach dem Vorbilde von Euklid – durch gewisse Axiome, nämlich die Axiome der Verknüpfung, der Anordnung, der $_a\underline{\text{C}}_a$ongruenz und der Stetigkeit, miteinander in Beziehung. Es entsteht dann die notwendige Aufgabe, die *Widerspruchslosigkeit* und *Vollständigkeit* dieser Axiome zu zeigen, d. h. es muß bewiesen werden, daß die Anwendung der aufgestellten Axiome nie | zu Widersprüchen 197
führen kann, und ferner, daß das System der Axiome zum Nachweis aller geometrischen Sätze ausreicht. Wir wollen das hier eingeschlagene Untersuchungsverfahren die *axiomatische Methode* nennen.

Wir werfen die Frage auf, ob wirklich die genetische Methode gerade für das Studium des Zahlbegriffes, und die axiomatische Methode für die Grundlagen der Geometrie die allein angemessene ist$_a\underline{\text{; a}}_a$uch scheint es von Interesse, beide Methoden gegenüberzustellen und zu untersuchen, welche Methode die vorteilhaftere ist, wenn es sich um die logische Untersuchung der Grundlagen der Mechanik oder anderer physikalischer Disziplinen handelt.

Meine Meinung ist diese: *Trotz des hohen pädagogischen und heuristischen Wertes der genetischen Methode verdient doch zur endgültigen Darstellung und völligen logischen Sicherung des In-*

haltes unserer Erkenntnis die axiomatische Methode den Vorzug.[a]

Die Zahlentheorie hatte bereits Peano axiomatisch entwickelt[2]. Hilbert stellt nun ein Axiomensystem der Analysis auf, durch welches das System der reellen Zahl charakterisiert wird als ein reeller archimedischer Körper, der keiner Erweiterung zu einem umfassenderen Körper der gleichen Art mehr fähig ist.

An die Aufzählung der Axiome schließen sich einige beispielsweise angeführten Bemerkungen über Abhängigkeiten. Insbesondere wird erwähnt, daß das kommutative Gesetz der Multiplikation aus den übrigen Körpereigenschaften und den Ordnungseigenschaften mit Hilfe des Archimedischen Axioms, aber nicht ohne dieses abgeleitet werden kann.

Die Forderung der Nichterweiterbarkeit wird formuliert durch das „Axiom der Vollständigkeit". Dieses Axiom hat den Vorzug der Prägnanz; jedoch ist seine logische Struktur kompliziert. Außerdem ist an ihm nicht unmittel-
198 bar ersichtlich, daß es eine Stetigkeitsforderung zum Ausdruck bringt. Will | man statt dieses Axioms ein solches haben, das deutlich den Charakter einer Stetigkeitsforderung besitzt und das andererseits nicht schon die Forderung des Archimedischen Axioms in sich schließt, so empfiehlt es sich, das Cantorsche Stetigkeitsaxiom zu nehmen, welches besagt, daß es zu jeder Folge von Intervallen, in der jedes Intervall das folgende umschließt, einen Punkt gibt, der allen Intervallen angehört. (Die Aufstellung dieses Axioms erfordert die

2[1] G. Peano: *Arithmetices principia nova methodo exposita* (*vide* [?]). Die Einführung der rekursiven Definition ist hier nicht einwandfrei; es fehlt der Nachweis der Lösbarkeit der Rekursionsgleichungen. Ein solcher Nachweis war bereits von Dedekind in seiner Schrift *Was sind und was sollen die Zahlen* (*vide* [?]) erbracht worden. Beim Ausgehen von Peanos Axiomen verfährt man zur Einführung der rekursiven Definition am besten so, daß man zunächst die Lösbarkeit der Rekursionsgleichungen für die Summe nach L. Kalmár, durch einen Induktionsschluß nach dem Parameterargument, beweist, sodann mit Hilfe der Summe den Begriff „kleiner" definiert und hernach für die allgemeine rekursive Definition die Dedekindsche Überlegung verwendet. Man findet dieses Verfahren dargestellt in dem Lehrbuch von Landau: *Grundlagen der Analysis* (*vide* [?]). Hierbei wird allerdings der Funktionsbegriff benutzt. Will man diesen vermeiden, so muß man die Rekursionsgleichungen der Summe und des Produktes als Axiome einführen. Der Nachweis der allgemeinen Lösbarkeit von Bekursionsgleichnngen ergibt sich dann nach einem Verfahren von K. Gödel (vgl. „Über formal unentscheidbare Sätze ..." (*vide* [?])$_{d,d}$ sowie auch Hilbert-Bernays *Grundlagen der Mathematik* (*vide* [?], ■ S. 412 ff.)).

a[?], S. 180–181.

vorherige Einführung des Begriffs einer Zahlenfolge)[3].

Am Schluß der Abhandlung tritt die Absicht, die Hilbert mit der axiomatischen Fassung der Analysis verfolgt, besonders deutlich in folgenden Worten zutage:

> Die Bedenken, welche gegen die Existenz des Inbegriffs aller reellen Zahlen und unendlicher Mengen überhaupt geltend gemacht worden sind, verlieren bei der oben gekennzeichneten Auffassung jede Berechtigung: unter der Menge der reellen Zahlen haben wir uns hiernach nicht etwa die Gesamtheit aller möglichen Gesetze zu denken, nach denen die Elemente einer Fundamentalreihe fortschreiten können, sondern vielmehr – wie eben dargelegt ist – ein System von Dingen, deren gegenseitige Beziehungen durch das obige *endliche und abgeschlossene* System von Axiomen I–IV gegeben sind, und über welche neue Aussagen nur Gültigkeit haben, falls man sie mittels$_a\underline{\text{t}}_a$ einer endlichen Anzahl von logischen Schlüssen aus jenen Axiomen ableiten kann.[b]

Dem methodischen Gewinn, den diese Auffassung bringt, steht allerdings eine erhöhte Anforderung gegenüber; denn die axiomatische Fassung der Theorie der reellen Zahlen zieht mit Notwendigkeit die Aufgabe eines Nachweises der Widerspruchsfreiheit für das aufgestellte Axiomensystem nach sich.

So wurde auch von Hilbert in seinem Pariser Vortrag „Mathematische Probleme“[4] die Aufgabe des Nachweises der Widerspruchsfreiheit für die arithmetischen Axiome in der Reihe der von ihm aufgestellten Probleme genannt.[c]

[3][1] Betreffs der Unabhängigkeit des Archimedischen Axioms von dem genannten Cantorschen Axiom vgl. P. Hertz: „Sur les axiomes d'Archimède et de Cantor“ (*vide* [**?**]).

Auf das Cantorsche Axiom hat neuerdings besonders R. Baldus hingewiesen. Siehe dessen Abhandlungen „Zur Axiomatik der Geometrie“: „I. Über Hilberts Vollständigkeitsaxiom“, „II. Vereinfachungen des Archimedischen und des Cantorschen Axioms“, „III. Über das Archimedische und das Cantorsche Axiom“ (*vide* [**?**], [**?**], [**?**]), sowie die daran anknüpfende Abhandlung von A. Schmidt: „Die Stetigkeit in der absoluten Geometrie“ (*vide* [**?**]).

[4][2] Gehalten auf dem Internationalen Mathematikerkongreß 1900 zu Paris (*vide* [**?**]).

---

[b] [**?**], S. 184.

[c] *Vide* [**?**], S. 299–301.

Zur Durchführung des Nachweises gedachte Hilbert mit einer geeigneten 199 | Modifikation der in der Theorie der reellen Zahlen angewandten Methoden auszukommen.

Doch in der genaueren Auseinandersetzung mit dem Problem traten ihm sogleich die erheblichen Schwierigkeiten entgegen, die für diese Aufgabe bestehen. Es kam hinzu, daß die inzwischen von Russell und Zermelo entdeckte mengentheoretische Paradoxie zu erhöhter Vorsicht in den Schlußweisen veranlaßte. Sahen sich doch Frege und Dedekind genötigt, ihre Untersuchungen, durch welche sie glaubten, die Zahlentheorie in einwandfreier Weise begründet zu haben – Dedekind mittels der allgemeinen Begriffe der Mengenlehre, Frege im Rahmen der reinen Logik[5] –, zurückzuziehen, da sich an Hand jener Paradoxie erwies, daß in ihren Überlegungen unzulässige Schlußweisen enthalten waren.

So zeigt uns der 1904 gehaltene Vortrag[6] „Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik“ einen völlig neuen Aspekt. Hier wird zunächst auf den grundsätzlichen Unterschied hingewiesen, der für das Problem des Nachweises der Widerspruchsfreiheit zwischen der Arithmetik und der Geometrie besteht. Für die Axiome der Geometrie erfolgt der Nachweis der Widerspruchsfreiheit durch eine arithmetische Interpretation des geometrischen Axiomensystems. Für den Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik dagegen „erscheint die Berufung auf eine andere Grunddisziplin unerlaubt“.[d]

Man könnte allerdings an eine Zurückführung auf die Logik denken.

> Allein bei aufmerksamer Betrachtung werden wir gewahr, daß bei der hergebrachten Darstellung der Gesetze der Logik gewisse arithmetische Grundbegriffe, z. B. der Begriff der Menge, zum Teil auch der Begriff der Zahl, insbesondere als Anzahl, bereits zur Verwendung kommen. Wir geraten so in eine Zwickmühle, und zur Vermeidung von Paradoxien ist daher eine teilweise gleichzeitige Entwicklung der Gesetze der Logik und der Arithmetik erforderlich.[e]

[5][1] R. Dedekind: *Was sind und was sollen die Zahlen?*, G. Frege: *Grundgesetze der Arithmetik* (*vide* [**?**], [**?**]).

[6][2] Auf dem Internationalen Mathematikerkongreß in Heidelberg 1904 (*vide* [**?**]).

---

[d] [**?**], S. ■ .

[e] [**?**], S. 250.

Hilbert legt nun den Plan eines solchen gemeinsamen Aufbaues von Logik und Arithmetik dar. Dieser Plan enthält bereits zum großen Teil die leitenden Gesichtspunkte für die Beweistheorie, insbesondere den Gedanken, durch die Übersetzung der mathematischen Beweise in die Formelsprache der symbolischen Logik den Nachweis der Widerspruchsfreiheit in ein Problem von elementar-arithmetischem Charakter zu transformieren. Auch finden sich hier schon die Ansätze zu den Beweisen der Widerspruchsfreiheit vor.

Allerdings bleibt die Ausführung noch ganz in den Anfängen. So wird | 200
insbesondere der Nachweis für die „Existenz des Unendlichen“ nur im Rahmen eines ganz engen Formalismus geführt.

Außerdem ist auch der methodische Standpunkt der Hilbertschen Beweistheorie in dem Heidelberger Vortrag noch nicht zur vollen Deutlichkeit entwickelt. Einige Stellen deuten darauf hin, daß Hilbert die anschauliche Zahlvorstellung vermeiden und durch die axiomatische Einführung des Zahlbegriffes ersetzen will. Ein solches Verfahren würde in den beweistheoretischen Überlegungen einen Zirkel ergeben. Auch wird der Gesichtspunkt der Beschränkung in der inhaltlichen Anwendung der Formen des existentialen und des allgemeinen Urteils noch nicht ausdrücklich und restlos zur Geltung gebracht.

In diesem vorläufigen Stadium hat Hilbert seine Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik für lange Zeit unterbrochen.[7] Ihre Wiederaufnahme finden wir angekündigt in dem 1917 gehaltenen Vortrage[8] „Axiomatisches Denken“.

Dieser Vortrag steht unter dem Zeichen der mannigfachen erfolgreichen axiomatischen Untersuchungen, die von Hilbert selbst und anderen Forschern in verschiedenen Gebieten der Mathematik und Physik angestellt worden waren. Insbesondere im Gebiete der Grundlagen der Mathematik hatte die axiomatische Methode auf zwei Wegen zu einer umfassenden Systematik der

[7][1] Eine Weiterführung der durch Hilberts Heidelberger Vortrag angeregten Forschungsrichtung erfolgte durch J. König, der in seinem Buche *Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre* (*vide* [**?**]), sowohl durch eine genauere Fassung und eingehendere Darlegung des methodischen Standpunktes, wie auch hinsichtlich seiner Durchführung über den Heidelberger Vortrag hinausgeht. Julius König starb noch vor der Beendigung des Buches; es wurde von seinem Sohn als Fragment herausgegeben. Von diesem Werk, welches einen Vorläufer der späteren Hilbertschen Beweistheorie bildet, ist jedoch keine Einwirkung auf Hilbert ausgegangen. Dagegen hat später J. v. Neumann in seiner Untersuchung „Zur Hilbertschen Beweistheorie“ (*vide* [**?**]) an die Ansätze von König angeknüpft.

[8][2] Auf der Naturforscherversammlung in Zürich (*vide* [**?**]).

Arithmetik und Mengenlehre geführt. Zermelo stellte 1907 sein Axiomensy-
201 stem der Mengenlehre auf[9], durch welches die Prozesse der Mengen|bildung derart abgegrenzt werden, daß einerseits die mengentheoretischen Paradoxien vermieden werden und andererseits die in der Mathematik gebräuchlichen mengentheoretischen Schlußweisen erhalten bleiben. Und von Russell und Whitehead wurde in ihrem Werke *Principia Mathematica*[10] das Fregesche Unternehmen einer logischen Begründung der Arithmetik – für welches ja die von Frege selbst angewandte Methode der Durchführung als ungangbar erwiesen war – auf axiomatischem Wege restituiert[11].

Hilbert sagt von dieser Axiomatisierung der Logik, man könne in der Vollendung dieses Unternehmens „die Krönung des Werkes der Axiomatisierung überhaupt erblicken". An diese rühmende Anerkennung schließt sich

[9][3] E. Zermelo: „Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I" (*vide* [?]). An dieses Axiomensystem haben sich in neuerer Zeit verschiedene Untersuchungen geknüpft. A. Fraenkel fügte das Ersetzungsaxiom hinzu, eine im Sinne der Cantorschen Mengenlehre liegende Erweiterung des Bereiches der zulässigen Mengenbildung; J. v. Neumann führte ein Axiom ein, durch welches ausgeschlossen wird, daß der Prozeß des Überganges von einer Menge zu einem ihrer Elemente sich von irgend einer Menge aus ins Unbegrenzte fortsetzen läßt. Ferner haben Th. Skolem, Fraenkel und J. v. Neumann, jeder auf eine andere Art, den von Zermelo in unbestimmter Allgemeinheit benutzten Begriff der „definiten Aussage" im Sinne einer schärferen impliziten Charakterisierung des Mengenbegriffes präzisiert. Das Ergebnis dieser Präzisie|rung stellt sich am prägnantesten in der Axiomatik v. Neumanns dar; hier nämlich wird erreicht, daß alle Axiome solche der „ersten Stufe" (im Sinne der Terminologie der symbolischen Logik) sind. Von Zermelo wird eine derartige Präzisierung des Mengenbegriffes abgelehnt, insbes. im Hinblick auf die zuerst von Skolem festgestellte Konsequenz, daß das so verschärfte Axiomensystem der Mengenlehre sich im Individuenbereich der ganzen Zahlen realisieren läßt. – Eine Darstellung dieser Untersuchungen bis zum Jahre 1928, mit eingehenden Literaturangaben, enthält das Lehrbuch von A. Fraenkel: *Einleitung in die Mengenlehre* (*vide* [?]). Siehe ferner: J. v. Neumann: „Über eine Widerspruchsfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre", Th. Skolem: „Über einige Grundlagenfragen der Mathematik", E. Zermelo: „Über Grenzzahlen und Mengenbereiche" (*vide* [?], [?], [?]).

[10][1] *Vide* [?].

[11][2] Die axiomatische Form der Anlage ist auch schon in Freges System vorhanden. Die Aufhebung des in dem Fregeschen System vorgefundenen Widerspruchs beruht bei dem Verfahren von Russell und Whitehead darauf, daß die Begriffsumfänge (Klassen) nicht als Individuen (Gegenstände) betrachtet werden, vielmehr eine Aussage über den Umfang eines Begriffs nur als eine Umschreibung für eine Aussage über den Begriff selbst angesehen wird. Dadurch überträgt sich die Unterscheidung der Stufen von den Begriffen auf die Klassen. Für diese Art der Behebung des Widerspruches genügt übrigens die einfachere, bereits bei Frege vorliegende Stufenunterscheidung.

allerdings sogleich die Bemerkung, daß die Vollendung des Unternehmens „noch neuer und vielseitiger Arbeit bedürfen“ wird.[f]

In der Tat enthält der Standpunkt der *Principia Mathematica* eine ungelöste Problematik. Was durch dieses Werk geliefert wird, ist die Ausarbeitung eines übersichtlichen Systems von Voraussetzungen für einen gemeinsamen deduktiven Aufbau von Logik und Mathematik sowie der Nachweis, daß dieser Aufbau tatsächlich gelingt. Für die Zulässigkeit der Voraussetzungen wird aber außer der inhaltlichen Plausibilität (welche auch nach der Ansicht von Russell und Whitehead keine Gewähr der Widerspruchsfreiheit bietet) nur die Erprobung im deduktiven Gebrauch geltend gemacht. Aber auch diese Erprobung verschafft uns ja inbetreff der Widerspruchsfreiheit nur ein erfahrungsmäßiges Vertrauen, keine völlige Sicherheit. Die völlige | Gewiß- 202
heit der Widerspruchsfreiheit erachtet aber Hilbert als ein Erfordernis der mathematischen Strenge.

Somit bleibt für Hilbert die Aufgabe eines Nachweises der Widerspruchsfreiheit für jene Voraussetzungen bestehen. Zur Behandlung dieser Aufgabe, sowie auch verschiedener weitergehender grundsätzlicher Fragen, wie z. B. „das Problem der prinzipiellen Lösbarkeit einer jeden mathematischen Frage“ oder „die Frage nach dem Verhältnis zwischen Inhaltlichkeit und Formalismus in Mathematik und Logik“ hält Hilbert es für erforderlich, „den Begriff des spezifisch mathematischen Beweises selbst zum Gegenstand einer Untersuchung“ zu machen.[g]

Dem hiermit von neuem gefaßten Plan einer Beweistheorie[12] hat sich Hilbert in den nachfolgenden Jahren, insbesondere seit 1920, vornehmlich gewidmet. Ein verstärkter Antrieb hierzu erwuchs ihm aus der Opposition, welche Weyl und Brouwer gegen das übliche Verfahren der Analysis und Mengenlehre richteten[13].

12[1] Zur Mitarbeit an diesem Unternehmen forderte Hilbert damals P. Bernays auf, mit dem er von da an seine Untersuchungen ständig besprochen hat.

13[2] H. Weyl: *Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*, „Der circulus vitiosus in der heutigen Begründung der Analysis“, „Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik“ (*vide* [?], [?], [?]). – L. E. J. Brouwer: „Intuitionisme en formalisme“, „Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten. I–II“, „Intuitionistische Mengenlehre“, „Besitzt jede reelle Zahl eine Dezimalbruchentwicklung?“ (*vide* [?], [?], [?], [?], [?]).

f [?], S. ■ .

g [?], S. ■ .

So beginnt auch Hilbert die erste Mitteilung über seine „Neubegründung der Mathematik“[14] damit, daß er sich mit den Einwänden Weyls und Brouwers auseinandersetzt. An dieser Auseinandersetzung ist bemerkenswert, daß Hilbert trotz der energischen Zurückweisung der gegen die Analysis erhobenen Einwendungen und trotz seines Eintretens für die Berechtigung der üblichen Schlußweisen doch darin mit dem oppositionellen Standpunkt einig ist, daß er das übliche Verfahren der Analysis nicht als ohne weiteres einsichtig und der Anforderung der mathematischen Strenge genügend befindet. Die „Berechtigung“, die Hilbert dem üblichen Verfahren zuerkennt, besteht nach seiner Auffassung nicht auf Grund von Evidenz, sondern auf Grund der Zulässigkeit der axiomatischen Methode, von der Hilbert erklärt, daß sie, wenn irgendwo sonst, so hier angebracht sei. Diese Auffassung ist es, aus der das Problem eines Nachweises der Widerspruchsfreiheit für die Voraussetzungen der Analysis erwächst.

203 | Was ferner die methodische Einstellung betrifft, welche Hilbert seiner Beweistheorie zugrunde legt und welche er an Hand der anschaulichen Behandlung der Zahlentheorie erläutert, so liegt hierin – ungeachtet der Stellungnahme Hilberts gegen Kronecker – eine weitgehende Annäherung an den Standpunkt Kroneckers vor[15]. Eine solche besteht insbesondere in der Anwendung des anschaulichen Begriffes der Ziffer und ferner darin, daß die anschauliche Form der vollständigen Induktion, d. h. die Schlußweise, welche sich auf die anschauliche Vorstellung von dem „Aufbau“ der Ziffern gründet, als einsichtig und keiner weiteren Zurückführung bedürftig anerkannt wird. Indem Hilbert sich zur Annahme dieser methodischen Voraussetzung entschloß, wurde auch der Grund der Einwendungen behoben, welche seinerzeit Poincaré gegen Hilberts Unternehmen der Begründung der Arithmetik auf Grund der Darlegung in dem Heidelberger Vortrag gerichtet hatte[16].

Der Ansatz der Beweistheorie, wie er in der ersten Mitteilung niedergelegt ist, enthält bereits die genauere Ausgestaltung des Formalismus. Gegenüber dem Heidelberger Vortrag tritt dabei die scharfe Sonderung des logisch-

[14][3] Vortrag, gehalten in Hamburg 1922 (*vide* [?]).

[15][1] In dem späteren Vortrage „Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre“ (gehalten in Hamburg 1930, *vide* [?]), hat sich Hilbert hierüber deutlicher ausgesprochen. Nach der Erwähnung der Dedekindschen Untersuchung *Was sind und was sollen die Zahlen* (*vide* [?]) erklärt er: „Etwa zu gleicher Zeit, also schon vor mehr als einem Menschenalter$_{a,a}$ hat Kronecker eine Auffassung klar ausgesprochen und durch zahlreiche Beispiele erläutert, die heute im wesentlichen mit unserer finiten Einstellung zusammenfällt.“ $_a$(S. 487)$_a$

[16][2] H. Poincaré: „Les mathématiques et la logique“ (*vide* [?]).

mathematischen Formalismus von der inhaltlichen, „metamathematischen“ Überlegung hervor, welche sich insbesondere durch die Unterscheidung der Zeichen „zur Mitteilung“ von den Symbolen und Variablen des Formalismus ausprägt.

Allerdings erscheint als ein Überbleibsel aus dem Stadium, in dem diese Sonderung noch nicht vollzogen war, die formale Beschränkung der Negation auf die Ungleichungen, während ja nur eine Beschränkung in der metamathematischen Anwendung der Negation erforderlich ist.

Als ein Charakteristikum des Hilbertschen Ansatzes tritt schon in der ersten Mitteilung die Formalisierung des „tertium non datur“ mittels transfiniter Funktionen auf. Insbesondere wird für die ganzen Zahlen das „tertium non datur“ formalisiert durch die Funktionenfunktion $\kappa(f)$, deren Argument eine zahlentheoretische Funktion ist und die den Wert 0 hat, falls $f(a)$ für alle Zahlwerte a den Wert 1 hat, sonst aber den kleinsten Zahlwert a darstellt, für den $f(a)$ einen von 1 verschiedenen Wert hat.

Der Leitgedanke zum Nachweis für die Widerspruchsfreiheit der transfiniten Funktionen (d. h. der für sie aufgestellten Axiome), den Hilbert schon
da|mals bereit hatte, wird in dieser Mitteilung noch nicht dargelegt. Ein 204
Nachweis der Widerspruchsfreiheit wird hier vielmehr nur für einen gewissen Teilformalismus erbracht; dieser Nachweis hat aber nur die Bedeutung eines Beispiels für eine metamathematische Beweisführung[17].

In dem bald auf die erste Mitteilung folgenden Leipziger Vortrag „Die logischen Grundlagen der Mathematik“[18] finden wir den Ansatz und die Darstellung der Beweistheorie in verschiedener Hinsicht weiter entwickelt. Es seien kurz die Hauptpunkte genannt, in denen die Ausführungen des Leipziger Vortrages über die der ersten Mitteilung hinausgehen:

1. Der Grund der Überschreitung der anschaulichen Betrachtungsweise durch die übliche Mathematik, bestehend in der unbeschränkten Anwendung der Begriffe „alle“, „es gibt“ auf unendliche Gesamtheiten, wird aufgezeigt und der Begriff der „finiten Logik“ herausgearbeitet. Auch wird der Vergleich der Rolle der „transfiniten“ Formeln mit derjenigen der idealen Elemente hier zum ersten Male angestellt.

[17][1] Die Beweismethode beruht hier wesentlich darauf, daß diejenigen elementaren Schlußregeln für die Implikation, welche durch die (mit 10. bis 13. numerierten) „Axiome des logischen Schließens“ formalisiert werden, nicht in den betrachteten Teilformalismus aufgenommen sind.

[18][2] Gehalten auf dem Deutschen Naturforscher-Kongreß 1922 (*vide* [**?**]).

2. Der Formalismus wird von unnötigen Beschränkungen (insbesondere der Vermeidung der Negation) befreit.

3. Die Formalisierung des „tertium non datur“ und zugleich des Auswahlprinzips mittels transfiniter Funktionen wird vereinfacht.

4. Der Formalismus der Analysis wird in den Grundzügen entwickelt.

5. Für den elementaren zahlentheoretischen Formalismus, welcher sich bei der Ausschließung der gebundenen Variablen ergibt, ist der Nachweis der Widerspruchsfreiheit geliefert. Die Aufgabe des Nachweises für die Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie und Analysis konzentriert sich damit auf die Behandlung des „transfiniten Axioms“

$$A(\tau(A)) \;\rightarrow\; A(a),$$

welches in zweifacher Weise zur Anwendung kommt, da das Argument von A einerseits auf den Bereich der gewöhnlichen Zahlen, andrerseits auf den der Zahlenfolgen (Funktionen) bezogen wird.

6. Zur Behandlung des „transfiniten Axioms“ im Nachweis der Widerspruchsfreiheit wird ein Verfahren angegeben, welches jedenfalls in den einfachsten Fällen zum Ziel führt.

Mit der Gestaltung der Beweistheorie, die uns in dem Leipziger Vortrag entgegentritt, war die grundsätzliche Form ihrer Anlage erreicht.

205 | Die beiden nächstfolgenden Publikationen Hilberts über die Beweistheorie, der Münsterer Vortrag „Über das Unendliche“[19] und der (zweite) Hamburger Vortrag „$_a\underline{\text{D}}_a$ie Grundlagen der Mathematik“[20], in denen von neuem und ausführlicher als zuvor das Problem, die Grundidee und der formale Ansatz der Beweistheorie dargelegt wird, zeigen allerdings im Formalismus verschiedene Veränderungen und Erweiterungen. Diese dienen jedoch nur zum kleineren Teil dem ursprünglichen Ziel der Beweistheorie; hauptsächlich sind sie im Hinblick auf den Plan einer Lösung des Cantorschen Kontinuumsproblems angebracht, d. h. eines Beweises für den Satz, daß das Kontinuum (die Menge der reellen Zahlen) die gleiche Mächtigkeit hat wie die Menge der Zahlen der zweiten Zahlenklasse.

Hilbert hatte den Gedanken, die zahlentheoretischen Funktionen, d. h. die Funktionen, welche jeder natürlichen Zahl wieder eine solche zuordnen –

[19][1] Gehalten 1925 anläßlich einer zu Ehren des Andenkens an Weierstrass veranstalteten Zusammenkunft (*vide* [**?**]).

[20][2] Gehalten 1927 $_a\underline{\text{in Hamburg}}_a$ (*vide* [**?**]).

(die Elemente des Kontinuums können ja durch solche Funktionen dargestellt werden) – nach den Gattungen der Variablen, die zu ihrer Definition erfordert werden, zu ordnen und auf Grund des Aufstiegs der Variablen-Gattungen, welcher analog dem der transfiniten Ordnungszahlen ist, eine Abbildung des Kontinuums auf die Menge der Zahlen der zweiten Zahlenklasse zu bewirken. Die Verfolgung dieses Zieles ist aber nicht über einen Entwurf hinausgekommen, und Hilbert hat daher später beim Abdruck der beiden genannten Vorträge in den *Grundlagen der Geometrie*[21] die Teile, welche sich auf das Kontinuumsproblem beziehen, weggelassen.

Gleichwohl haben die Betrachtungen, die Hilbert zur Behandlung des Kontinuumsproblems anstellte, verschiedene fruchtbare Anregungen und Gesichtspunkte geliefert.

So wurde durch die Überlegungen betreffend die rekursiven Definitionen W. Ackermann zu seiner Untersuchung „Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen“[22] angeregt. Hilbert referiert in seinem Münsterer Vortrag über die Fragestellung und das Ergebnis dieser (damals noch nicht erschienenen) Abhandlung:

> Betrachten wir die Funktion
>
> $$a + b;$$
>
> | daraus entsteht durch n-fache Iteration und Gleichsetzung 206
>
> $$a + a + \cdots + a = a \cdot n.$$
>
> Ebenso gelangt man von
>
> $$a \cdot b \quad \text{zu} \quad a \cdot a \cdots a = a^n,$$
>
> weiter von
>
> $$a^b \quad \text{zu} \quad a^{(a^a)}, a^{(a^{(a^a)})}, \ldots .$$

[21][3] Die beiden Vorträge sind in die 7. Auflage der *Grundlagen der Geometrie* als Anhang VIII u. IX aufgenommen worden (*vide* [**?**]). Dabei wurden, abgesehen von den Auslassungen, auch kleine redaktionelle Änderungen, insbesondere hinsichtlich der Schreibweise der Formeln, vorgenommen.

[22][4] *Vide* [**?**].

Wir bekommen so sukzessive die Funktionen

$$\begin{aligned} a+b &= \varphi_1(a,b), \\ a\cdot b &= \varphi_2(a,b), \\ a^b &= \varphi_3(a,b). \end{aligned}$$

$\varphi_4(a,b)$ ist der b-te Wert in der Folge:

$$a, a^a, a^{(a^a)}, a^{(a^{(a^a)})}, \dots .$$

In entsprechender Weise gelangt man zu $\varphi_5(a,b)$, $\varphi_6(a,b)$ usw.

Man könnte nun zwar $\varphi_n(a,b)$ für variables n durch Einsetzungen und Rekursionen definieren; diese Rekursionen aber wären nicht gewöhnliche sukzessive, sondern vielmehr würde man auf eine verschränkte, nach verschiedenen Variablen zugleich genommene (simultane) Rekursion geführt werden und eine Auflösung dieser in gewöhnliche sukzessive Rekursionen gelingt erst, wenn man den Begriff der Funktionsvariablen benutzt: die Funktion $\varphi_a(a,a)$ ist ein Beispiel einer Funktion der Zahlenvariablen a, die nicht durch Einsetzungen und gewöhnliche sukzessive Rekursionen allein definiert werden kann, wenn man lediglich Zahlenvariable zuläßt[23]. Wie man unter Benutzung der Funktionsvariablen die Funktion $\varphi_n(a,b)$ definieren kann, zeigen die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} \iota(f,a,1) &= a, \\ \iota(f,a,n+1) &= f(a,\iota(f,a,n)); \\ \varphi_1(a,b) &= a+b, \\ \varphi_{n+1}(a,b) &= \iota(\varphi_n,a,b). \end{aligned}$$

Hierbei bedeutet ι eine individuelle Funktion mit drei Argumenten, von denen das erste selbst eine Funktion zweier gewöhnlicher Zahlenvariablen ist.[h]

[23][1] Für diese Behauptung hat W. Ackermann den Beweis erbracht. (Anmerkung des Hilbertschen Textes.)

[h] [?], S. 185–186.

Die Untersuchung der rekursiven Definitionen ist neuerdings von Rozsa Péter fortgeführt worden. Sie bewies, daß alle die rekursiven Definitionen, welche nur nach den Werten *einer* Variablen fortschreiten und keine andere Variablenart als die freie Zahlenvariable erfordern, auf das einfachste Rekursionsschema zurückgeführt werden können. Unter Benutzung dieses Resul|tates hat sie ferner die Beweisführung der eben genannten Ackermann- 207
schen Abhandlung wesentlich vereinfacht[24].

Diese Ergebnisse betreffen die Verwendung rekursiver Definitionen zur Gewinnung zahlentheoretischer Funktionen. In dem Hilbertschen Beweisplan tritt die rekursive Definition noch in anderer Weise auf, nämlich als Verfahren zur Bildung von Zahlen der zweiten Zahlenklasse und auch von Variablengattungen. Hierbei werden von Hilbert gewisse allgemeine Begriffsbildungen betreffend die Variablenarten zu Grunde gelegt, über die Hilbert in dem Vortrag „Die Grundlagen der Mathematik“ folgenden kurz zusammenfassenden Bericht gibt:

> Die *mathematischen Variablen* sind von zweierlei Art$_{d:d}$
>
> $_{a}\rule{3cm}{0.4pt}_{a}$1. die *Grundvariablen*,
>
> $_{a}\rule{3cm}{0.4pt}_{a}$2. die *Variablengattungen*.
>
> 1. Während man in der gesamten Arithmetik und Analysis mit der gewöhnlichen ganzen Zahl als einziger Grundvariablen auskommt, gehört jetzt einer jeden Cantorschen transfiniten Zahlklasse eine Grundvariable zu, die eben die Ordinalzahlen dieser Klasse anzunehmen fähig ist. Einer jeden Grundvariablen entspricht demgemäß eine Aussage, die sie als solche charakterisiert; diese ist implizite durch Axiome charakterisiert.
>
> Zu jeder Grundvariablen gehört eine Art von Rekursion, mit deren Hilfe man Funktionen definiert, deren Argument eine solche Grundvariable ist. Die zu der Zahlenvariablen gehörige Rekursion ist die „gewöhnliche Rekursion“, gemäß welcher eine Funktion einer Zahlenvariablen n definiert wird, indem man angibt, welchen Wert sie für $n = 0$ hat und wie man den Wert für n' aus dem für n erhält[25]. Die Verallgemeinerung der gewöhnlichen Rekursion ist die transfinite Rekursion, deren allgemeines Prinzip darin be-

[24][1] Siehe R. Péter: „Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion“ und „Konstruktion nichtrekursiver Funktionen“ (*vide* [?], [?]).

[25][2] Hier ist n' der formale Ausdruck für „die auf n folgende Zahl“.

steht, den Wert der Funktion für einen Wert der Variablen durch die vorhergehenden Funktionswerte zu bestimmen.

2. Aus den Grundvariablen leiten wir noch weitere Arten von Variablen ab, indem wir auf die Aussagen für die Grundvariablen, z. B. auf Z[26], logische Verknüpfungen anwenden. Die so definierten Variablen heißen Variablengattungen, die sie definierenden Aussagen heißen Gattungsaussagen; für diese werden wieder jedesmal neue Individualzeichen eingeführt. So liefert die Formel

$$\Phi(f) \sim (x)(Z(x) \to Z(f(x)))$$

das einfachste Beispiel für eine Variablengattung; diese Formel
208 definiert die | Gattung der Funktionsvariablen (Funktion-sein).
Ein weiteres Beispiel ist die Formel

$$\Psi(g) \sim (f)(\Phi/\blacksquare\ /\Psi(f) \to Z(g(f)));$$

sie definiert das „Funktionenfunktion-sein“; das Argument g ist die neue Funktionenfunktionsvariable.

Für die Herstellung der höheren Variablengattungen muß man die Gat-tungsaussagen selbst mit Indizes versehen, wodurch ein Rekursionsverfahren ermöglicht wird.[i]

Diese Begriffsbildungen kommen insbesondere zur Anwendung in der Theorie der Zahlen der zweiten Zahlenklasse. Hier ging eine neue Anregung aus von der Hilbertschen Vermutung, daß jede Zahl der zweiten Zahlenklasse, – bei Zugrundelegung des Ausgangselementes 0, der Operation des Fortschreitens um Eins („Strichfunktion“) und des Limesprozesses, ferner der Zahlenvariablen und der Grundvariablen der zweiten Zahlenklasse –, ohne Benutzung transfiniter Rekursionen, allein mittels gewöhnlicher Rekursionen definiert werden kann.

Die ersten über die elementaren Fälle hinausgehenden Beispiele solcher Definitionen, nämlich die Definition der ersten ε-Zahl (nach Cantors Termi-

[26][3] Die Formel $Z(a)$ entspricht der Aussage „a ist eine gewöhnliche ganze Zahl“.

[i] [**?**], S. 69–70.

nologie) und der ersten kritischen ε-Zahl[27] sind von P. Bernays und J. v. Neumann angegeben worden. Dabei werden bereits rekursiv definierte Variablengattungen benutzt[28].

Jedoch diese verschiedenen Betrachtungen, welche sich auf die rekursiven Definitionen beziehen, gehen schon über den engeren Bereich der beweistheoretischen Fragestellung hinaus. Für dieses engere Problemgebiet der Beweistheorie bestand ja seit Hilberts Leipziger Vortrag die Aufgabe, den Nachweis der Widerspruchsfreiheit, mit Einbeziehung des transfiniten Axioms, gemäß dem Hilbertschen Ansatz durchzuführen. Das transfinite Axiom war übrigens bald nach dem Leipziger Vortrag durch die Einführung der Auswahlfunktion $\varepsilon(A)$ (ausführlich: $\varepsilon_x A(x)$) an Stelle der vorherigen Funktion $\tau(A)$ in die Gestalt des logischen „ε-Axioms“

$$A(a) \ \rightarrow \ A(\varepsilon_x A(x))$$

| gebracht worden. Die Rolle dieses ε-Axioms wird von Hilbert in dem Ham- 209
burger Vortrag mit folgenden Worten erläutert:

> Die ε-Funktion kommt im Formalismus in dreifacher Weise zur Anwendung.
>
> $_{a}\underline{1.}_{a}$ Es läßt sich mit Hilfe des ε das „alle“ und „es gibt“ definieren, nämlich folgendermaßen[29]:
>
> $$(x)A(x) \sim A(\varepsilon_x \overline{A(x)}),$$
> $$(Ex)A(x) \sim A(\varepsilon_x A(x)).$$

[27][1] Unter einer ε-Zahl versteht man eine transfinite Ordnungszahl α von der Eigenschaft, daß $\alpha = \omega^{\alpha}$ ist. Die erste ε-Zahl ist der Limes der Folge

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots,$$

worin $\alpha_0 = 1, \alpha_{n+1} = \omega^{\alpha_n}$ ist; die erste kritische ε-Zahl ist der Limes der Folge

$$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots,$$

worin $\beta_0 = 1$ und β_{n+1} die β_n-te ε-Zahl ist.

[28][2] Vgl. die Angabe in Hilberts Vortrag „Die Grundlagen der Mathematik“ ([**?**], S. 81f.). – Die genannten Beispiele sind bisher nicht publiziert worden.

[29][1] In den beiden folgenden Formeln ist das Zeichen $\sim$ der Äquivalenz an Stelle des bei Hilbert stehenden Doppelpfeiles angewandt; dadurch wird die im Hilbertschen Text sich anschließende Bemerkung zur Einführung des Zeichens $\sim$ entbehrlich.

Auf Grund dieser Definition liefert das ε-Axiom [...] die für das All- und das Seinszeichen gültigen logischen Beziehungen, wie

$$\begin{aligned} &(x)A(x) \ \rightarrow \ A(a) && \text{(Aristotelisches Axiom)},\\ &\overline{(x)}A(x) \ \rightarrow \ (Ex)\overline{A(x)} && \text{(Tertium non datur)}. \end{aligned}$$

$_a$2.$_a$ Trifft eine Aussage $\mathfrak{A}$ auf ein und nur ein Ding zu, so ist

$_{aa}$

$\varepsilon(\mathfrak{A})$ *dasjenige Ding*, für welches $\mathfrak{A}$ gilt. $_{aa}$

Die ε-Funktion ermöglicht es also, eine solche Aussage $\mathfrak{A}$, die nur auf ein Ding zutrifft, in der Form

$$a = \varepsilon(\mathfrak{A})$$

aufzulösen.

$_a$3.$_a$ Darüber hinaus hat das ε die Rolle der Auswahlfunktion, d. h. im Falle, wo $\mathfrak{A}$ auf mehrere Dinge zutreffen kann, ist $\varepsilon(\mathfrak{A})$ *irgend*$_{dd}$*eines* von den Dingen a, auf welche $\mathfrak{A}$ zutrifft.[j]

Das ε-Axiom kann auf verschiedene Gattungen von Variablen angewandt werden. Zur Formalisierung der Zahlentheorie genügt die Anwendung auf die Zahlenvariable, d. h. auf die Gattung der natürlichen Zahlen. Man hat dann zu dem logischen Formalismus und den Axiomen der Gleichheit noch die zahlentheoretischen Axiome

$$\begin{gathered} a' \neq 0,\\ a' = b' \rightarrow a = b, \end{gathered}$$

ferner die Rekursionsgleichungen für die Addition und Multiplikation[30] und das Schlußprinzip der vollständigen Induktion hinzuzunehmen. Dieses Schlußprinzip kann mittels des ε-Symbols durch die Formel

$$\varepsilon_x A(x) = b' \ \rightarrow \ \overline{A(b)}$$

in Verbindung mit der elementaren Formel

$$a \neq 0 \ \rightarrow \ a = (\delta(a))'$$

210 | formalisiert werden. Die zusätzliche Formel für das ε-Symbol entspricht einer Teilaussage des Prinzips der kleinsten Zahl[31], und die hinzugefügte elementare Formel stellt den Satz dar, daß es zu jeder von 0 verschiedenen Zahl eine vorhergehende gibt.

Zur Formalisierung der Analysis muß man das ε-Axiom außer auf die Zahlenvariable noch auf eine höhere Gattung von Variablen anwenden. Man hat hier verschiedene Möglichkeiten, je nachdem man den Allgemeinbegriff des Prädikates, der Menge oder der Funktion bevorzugt. Hilbert wählt die Gattung der Funktionsvariablen, d. h. genauer der variablen zahlentheoretischen Funktion eines Arguments.

Die Einführung der höheren Variablengattung ermöglicht es, das Schlußprinzip der vollständigen Induktion, nach dem Verfahren Dedekinds, durch eine Definition des Begriffes der natürlichen Zahl zu ersetzen.

Das wesentliche Moment der Erweiterung bei diesem Formalismus beruht auf der Verbindung des ε-Axioms mit der Einsetzungsregel für die Funktionsvariable, wodurch insbesondere die „imprädikativen Definitionen“ von Funktionen, d. h. die Definitionen von Funktionen unter Bezugnahme auf die Gesamtheit der Funktionen, in den Formalismus aufgenommen sind.

Die Aufgabe des Nachweises der Widerspruchsfreiheit für den zahlentheoretischen Formalismus und für die Analysis ist hiernach eine mathematisch scharf umgrenzte. Zu ihrer Behandlung hatte man den Hilbertschen Ansatz zur Verfügung, und es schien anfangs, daß es nur einer verständnisvollen und eingehenden Bemühung bedürfe, um diesen Ansatz zu einem vollständigen Beweis auszugestalten.

Diese Vorstellung hat sich jedoch als irrig erwiesen. Trotz intensiver Bemühungen und mannigfaltiger beigetragener Beweisgedanken ist man nicht zu dem gewünschten Ziel gelangt. Schrittweise wurden die gehegten Erwartungen enttäuscht, wobei sich auch geltend machte, daß im Gebiete der metamathematischen Überlegungen die Gefahr eines Versehens besonders groß ist.

Erst schien der Widerspruchsfreiheitsbeweis für die Analysis zu gelingen, doch dieser Anschein erwies sich bald als Täuschung. Hernach glaubte man, wenigstens für den zahlentheoietischen Formalismus zur Lösung des

[30][2] Vgl. hierzu die Anmerkung 2[1] auf S. 209 in diesem Referat.

[31][1] D$_a$<u>as</u>$_a$ h$_a$<u>eißt</u>$_a$ des Prinzips der Existenz einer kleinsten Zahl in jeder nicht leeren Zahlenmenge.

---

[j][?], S. 67–68.

Problems gelangt zu sein. In dieses Stadium fällt insbesondere Hilberts Hamburger Vortrag „Die Grundlagen der Mathematik", der in seinem Schlußteil ein Referat über einen Widerspruchsfreiheitsbeweis von Ackermann bringt, sowie der 1928 in Bologna gehaltene Vortrag „Probleme der Grundlegung der Mathematik"[32], in welchem Hilbert einen Überblick über den damaligen Problemstand der Beweistheorie gab und teils Probleme der Widerspruchsfreiheit, teils Probleme der Vollständigkeit aufstellte.

211 | Die Probleme der Widerspruchsfreiheit knüpft Hilbert hier alle an das ε-Axiom, wobei er für die verschiedenen Formalismen die durch sie umfaßten Bereiche der Mathematik angibt.

In dieser Darlegung spricht sich die damals von allen Beteiligten vertretene Auffassung aus, daß für den Formalismus der Zahlentheorie durch die Untersuchungen Ackermanns und v. Neumanns der Nachweis der Widerspruchsfreiheit bereits geliefert sei.

Daß tatsächlich auch dieses Ziel noch nicht erreicht war, erkannte man erst, als man auf Grund eines allgemeinen Theorems von K. Gödel zweifelhaft geworden war, ob sich überhaupt der Nachweis der Widerspruchsfreiheit für den zahlentheoretischen Formalismus mit elementaren kombinatorischen Methoden im Sinne des „finiten Standpunktes" erbringen lasse.

Das erwähnte Theorem bildet eines der verschiedenen bedeutsamen Ergebnisse der Gödelschen Abhandlung „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I"[33], welche in betreff des Verhältnisses zwischen Inhaltlichkeit und Formalismus – dessen Untersuchung Hilbert in seinem Vortrag „Axiomatisches Denken" als einen der Zwecke der Beweistheorie genannt hatte[k] – wesentliche Aufklärung gebracht hat.

Die Aussage des Theorems besteht darin, daß für einen widerspruchsfreien Formalismus, welcher den üblichen Logikkalkul und die Zahlentheorie in sich schließt, ein Nachweis seiner Widerspruchsfreiheit nicht innerhalb dieses Formalismus selbst dargestellt werden kann, genauer gesagt: daß der elementar-arithmetische Satz, in den sich die Behauptung der Widerspruchsfreiheit des Formalismus – auf Grund einer bestimmten Art der Numerierung der Symbole und Variablen und einer daraus abgeleiteten Numerierung der

[32][2] *Vide* [**?**].
[33][1] *Vide* [**?**].

---

[k] *Vide* p. 214, footnote *g*.

Formeln sowie auch einer solchen der endlichen Formelfolgen – übersetzen läßt, nicht durch den Formalismus ableitbar ist.

Hiermit ist zwar unmittelbar nichts über die Möglichkeit finiter Widerspruchsfreiheitsbeweise gesagt; doch ergibt sich ein Kriterium, dem jeder Nachweis der Widerspruchsfreiheit für den Formalismus der Zahlentheorie oder für einen umfassenderen Formalismus genügen muß: es muß in dem Nachweis eine Überlegung vorkommen, die sich nicht – auf Grund der arithmetischen Übersetzung – in dem betreffenden Formalismus darstellen läßt.

An Hand dieses Kriteriums wurde man gewahr, daß die vorhandenen Widerspruchsfreiheitsbeweise noch nicht für den vollen Formalismus der Zahlentheorie ausreichten[34].

Darüber hinaus wurde sogar die Vermutung erweckt, daß überhaupt im | 212
Rahmen der elementaren anschaulichen Betrachtungen, wie sie dem von Hilbert der Beweistheorie zu Grunde gelegten „finiten Standpunkt“ entsprechen, ein Nachweis für die Widerspruchsfreiheit des zahlentheoretischen Formalismus nicht erbracht werden könne.

Diese Vermutung ist bisher noch nicht widerlegt worden[35]. Jedoch haben K. Gödel und G. Gentzen bemerkt[36], daß unter der Voraussetzung der Widerspruchsfreiheit der von A. Heyting formalisierten intuitionistischen Arithmetik[37] die Widerspruchsfreiheit des üblichen Formalismus der Zahlentheorie ziemlich einfach nachzuweisen ist[38].

Vom Standpunkt des Brouwerschen Intuitionismus ist hiermit der Nachweis für die Widerspruchsfreiheit des Formalismus der Zahlentheorie geliefert. Eine Widerlegung der genannten Vermutung liegt aber insofern nicht vor, als die intuitionistische Arithmetik über den Bereich der anschaulichen, finiten Betrachtung hinausgeht, indem sie neben den eigentlichen mathematischen

[34][2] Der Beweis v. Neumanns bezog sich vornherein auf einen engeren Formalismus; doch schien es, daß die Ausdehnung auf den ganzen Formalismus der Zahlentheorie keine Schwierigkeit mache.

[35][1] Siehe aber den Nachtrag S. 231.

[36][2] K. Gödel: „Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie“ (*vide* [**?**]). G. Gentzen hat seine bereits im Druck befindliche Abhandlung über den Gegenstand auf Grund des Erscheinens der Gödelschen Note ähnlichen Inhaltes zurückgezogen.

[37][3] A. Heyting: „Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik“ und „Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik“ (*vide* [**?**] und [**?**]).

[38][4] Es kann nämlich gezeigt werden, daß eine jede in dem gewöhnlichen Formalismus der Zahlentheorie ableitbare Formel, welche keine Formelvariable, keine Disjunktion und kein Seinszeichen enthält, auch in dem Heytingschen Formalismus ableitbar ist.

Objekten auch das inhaltliche Beweisen zum Gegenstand macht und dazu des abstrakten Allgemeinbegriffs der einsichtigen Folgerung bedarf. —

Es sei hier eine kurze Zusammenstellung gegeben von verschiedenen finiten Widerspruchsfreiheitsbeweisen, welche für Teilformalismen der Zahlentheorie erbracht worden sind. Dabei werde mit F_1 der Formalismus bezeichnet, der aus dem Logikkalkul (der ersten Stufe) durch Hinzufügung der Gleichheitsaxiome und der zahlentheoretischen Axiome, jedoch unter Beschränkung der Anwendung der vollständigen Induktion auf Formeln ohne gebundene Variablen, erhalten wird; und mit F_2 werde der Formalismus bezeichnet, der aus F_1 durch Hinzunahme des ε-Symbols nebst dem ε-Axiom hervorgeht, – wobei dann die Formeln und Schemata für die Allzeichen und Seinszeichen durch explizite Definitionen für das Allzeichen und das Seinszeichen vertreten werden können[39]. Ein Nachweis der Widerspruchsfreiheit von F_2 ergibt zugleich die Widerspruchsfreiheit von F_1.

213 | Die Widerspruchsfreiheit von F_2 wird erwiesen:

1. durch einen Beweis von W. Ackermann, welcher von dem in Hilberts Leipziger Vortrag „Die logischen Grundlagen der Mathematik“ dargelegten Hilbertschen Ansatz ausgeht[40];

[39][5] Siehe in diesem Referat S. 222. – Betreffs der Gleichheitsaxiome ist zu bemerken, daß diese beim Formalismus F_2 in der allgemeinen Form

$$a = a, \quad a = b \;\rightarrow\; (A(a) \rightarrow A(b)) \qquad |$$

anzusetzen sind, wodurch insbesondere die Formel

$$a = b \;\rightarrow\; \varepsilon_x A(x, a) = \varepsilon_x A(x, b)$$

ableitbar wird. Beim Formalismus F_1 kann die Formel

$$a = b \;\rightarrow\; (A(a) \rightarrow A(b))$$

durch die beiden spezielleren Axiome

$$a = b \;\rightarrow\; (a = c \rightarrow b = c), \quad a = b \rightarrow a' = b'$$

vertreten werden.

[40][1] In der Ackermannschen Dissertation „Begründung des ‚tertium non datur‘ mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit“ (*vide* [?]) ist der Beweis in seinem Sohlußteil noch nicht genau ausgeführt. Ackermann hat hernach aber eine vollständige und zugleich vereinfachte Beweisführung geliefert. Von dieser definitiven Fassung des Ackermannschen Beweises liegt bisher keine Veröffentlichung vor, sondern nur der bereits erwähnte Bericht Hilberts in seinem zweiten Hamburger Vortrag „Die Grundlagen der Mathematik“ sowie der etwas ausführlichere „Zusatz“ von P. Bernays, der zugleich mit dem Vortrag erschienen ist (*vide* [?], [?] (diese Ausgabe Kap. 4, S. 47 ff.)). (Die hierin am Schluß stehende Bemerkung betreffend die Einbeziehung der vollständigen Induktion muß fallen gelassen werden.)

2. durch einen Beweis von J. v. Neumann, der von dem gleichen Ansatz ausgeht[41];

3. mittels eines zweiten bisher nicht publizierten Hilbertschen Ansatzes, der von Ackermann durchgeführt wurde; der Gedanke dieses Ansatzes besteht darin, daß an Stelle der Ersetzung der ε-Symbole durch Zahlwerte ein disjunktives Schlußverfahren zur Elimination der ε-Symbole angewandt wird[42].

Die Widerspruchsfreiheit von F_1 wird erwiesen

1. durch einen Beweis von J. Herbrand, der sich auf ein allgemeines, von Herbrand in seiner Thèse „Recherches sur la théorie de la démonstration“[43] zum ersten Male aufgestelltes und bewiesenes Theorem über den Logikkalkul stützt[44];

| 2. durch einen Beweis von G. Gentzen, der sich, aus einer von Gentzen ge- 214
fundenen Verschärfung und Erweiterung des eben erwähnten Herbrandschen Theorems ergibt[45].

Über diese Ergebnisse, welche hauptsächlich für die theoretische Logik und die elementare Axiomatik von Bedeutung sind, und die erwähnte Aufdeckung der Beziehung zwischen dem üblichen zahlentheoretischen Formalismus und demjenigen der intuitionistischen Arithmetik ist man einstweilen in der Behandlung der Probleme der Widerspruchsfreiheit nicht hinausgekommen.

Doch haben die Probleme der Vollständigkeit, welche Hilbert in seinem Vortrag „Probleme der Grundlegung der Mathematik“ stellte, nach verschiedener Richtung eine Behandlung erfahren.

Bei dem einen dieser Probleme handelt es sich um den Nachweis für die Vollständigkeit des Systems der logischen Regeln, die in dem Logikkalkul (der ersten Stufe) formalisiert sind. Dieser Nachweis wurde von K. Gödel in dem Sinne erbracht, daß er zeigte[46]: Wenn eine Formel des Logikkalkuls der ersten Stufe als unableitbar nachgewiesen werden kann, so kann auf Grund dieser

41[2] J. v. Neumann: „Zur Hilbertschen Beweistheorie“ (*vide* [?]).

42[3] Vgl. die Angabe in dem Vortrag von P. Bernays „Methoden des Nachweises von Widerspruchsfreiheit und ihre Grenzen“ (*vide* [?], diese Ausgabe Kap. 8, S. 135 ff.).

43[4] *Vide* [?].

44[5] J. Herbrand: „Sur la non-contradiction de l'arithmétique“ (*vide* [?]).

45[1] G. Gentzen: „Untersuchungen über das logische Schließen“ (*vide* [?]).

46[2] K. Gödel: „Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls“ (*vide* [?]).

Feststellung im Rahmen der Zahlentheorie (mit Benutzung des „tertium non datur“, insbesondere in der Form des Prinzips der kleinsten Zahl) ein Beispiel gegen die Allgemeingültigkeit jener Formel aufgestellt werden.

Das andere Vollständigkeitsproblem betrifft die Axiome der Zahlentheorie; es soll gezeigt werden: Wenn (bei Zugrundelegung der Axiome der Zahlentheorie) eine zahlentheoretische Aussage als widerspruchsfrei erwiesen werden kann, so ist sie auch beweisbar. Diese Behauptung schließt zugleich die folgende in sich: „Wenn für einen Satz[47] $\mathfrak{S}$ die Widerspruchsfreiheit mit den Axiomen der Zahlentheorie nachgewiesen werden kann, so kann nicht auch für $\overline{\mathfrak{S}}$ (das Gegenteil von $\mathfrak{S}$) die Widerspruchsfreiheit mit jenen Axiomen nachgewiesen werden.“

Diese Aufgabestellung enthält insofern eine Unbestimmtheit, als nicht angegeben ist, welcher Formalismus des logischen Schließens zu Grunde gelegt werden soll. Es zeigte sich jedoch, daß in keinem Falle, wie man sich auch betreffs des logischen Formalismus entscheiden mag, sofern man nur an der Forderung einer strengen Formalisierung der Beweise festhält, die angegebene Vollständigkeitsbehauptung zu Recht besteht.

Dieses Ergebnis stammt wiederum von K. Gödel, der in der bereits ge-
215 |nannten Abhandlung „Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I“ folgendes allgemeine Theorem bewies: Wenn ein Formalismus $\mathfrak{F}$ widerspruchsfrei in dem verschärften Sinne ist, daß die Negation einer Formel $(x)\mathfrak{A}(x)$ jedenfalls dann unableitbar ist, wenn für jede Ziffer $\mathfrak{z}$ die Formel $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ in $\mathfrak{F}$ ableitbar ist, und wenn der Formalismus hinlänglich umfassend ist, so daß er den Formalismus der Zahlentheorie (oder einen diesem gleichwertigen Formalismus) in sich schließt, dann läßt sich eine Formel angeben von der Eigenschaft, daß weder sie selbst noch auch ihre Negation in $\mathfrak{F}$ ableitbar ist[48]. Der Formalismus $\mathfrak{F}$ besitzt also unter den genannten Bedingungen nicht die Eigenschaft der deduktiven Vollständigkeit (im Sinne der von Hilbert für den Fall der Zahlentheorie formulierten Be-

[47][3] Gemeint ist ein solcher Satz, der sich im Formalismus der Zahlentheorie ohne Benutzung von freien Variablen darstellen läßt.

[48][1] Diese Formel hat überdies die spezielle Gestalt

$$(x)(\varphi(x) \neq 0),$$

wobei $\varphi(x)$ eine durch elementare Rekursionen definierte Funktion ist, und die Unableitbarkeit dieser Formel sowie andrerseits die Richtigkeit und die Ableitbarkeit der Formel $\varphi(\mathfrak{z}) \neq 0$ für jede vorgelegte Ziffer $\mathfrak{z}$ folgt, ohne die genannte Verschärfung der Forderung der Widerspruchsfreiheit, schon aus der Widerspruchsfreiheit im gewöhnlichen Sinne.

hauptung)[49].

Noch ehe dieses Gödelsche Resultat bekannt war, hatte Hilbert die ursprüngliche Form seines Vollständigkeitsproblems bereits aufgegeben. In seinem Vortrag „Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre“[50] behandelte er dieses Problem für den Spezialfall von Formeln der Gestalt $(x)\mathfrak{A}(x)$, welche außer x keine gebundene Variable enthalten. Dabei modifizierte er jedoch die Aufgabestellung durch die Hinzufügung einer Schlußregel, welche besagt, daß eine Formel $(x)\mathfrak{A}(x)$ von der betrachteten Art stets dann als Ausgangsformel genommen werden darf, wenn sich zeigen läßt, daß für jede Ziffer $\mathfrak{z}$ die Formel $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ eine wahre Aussage (gemäß der elementar-arithmetischen Deutung) darstellt.

| Bei der Hinzunahme dieser Regel ergibt sich das gewünschte Resultat sehr 216
einfach aus der Tatsache, daß eine Formel von der betrachteten speziellen Gestalt, sofern sie widerspruchsfrei ist, auch im Sinne der inhaltlichen Deutung zutreffend ist[51].

Das Verfahren, durch welches hier Hilbert die positive Lösung des Vollständigkeitsproblems (für den von ihm betrachteten Spezialfall) sozusagen erzwingt, bedeutet ein Abgehen von dem vorherigen Programm der Beweistheorie. In der Tat wird ja durch die Einführung der zusätzlichen Schlußregel die Forderung einer restlosen Formalisierung der Schlüsse fallen gelassen.

49[2] Eine andere Art von Unvollständigkeit hat kürzlich Th. Skolem für den Formalismus der Zahlentheorie nachgewiesen: „Über die Unmöglichkeit einer vollständigen Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems“ (*vide* [**?**]). Der Formalismus ist insofern nicht „kategorisch“ (das Wort in Analogie zu der Bezeichnung von O. Veblen gebraucht), als man – unter inhaltlicher Benutzung des „tertium non datur“ für die ganzen Zahlen – eine Interpretation der Beziehungen $=$, $<$ und der Funktionen a', $a+b$, $a \cdot b$ mit Bezug auf ein System von Dingen (es sind zahlentheoretische Funktionen) angeben kann, derart, daß einerseits jeder im Formalismus der Zahlentheorie ableitbare zahlentheoretische Satz auch für die genannte Interpretation gültig bleibt, daß aber andererseits das System keineswegs der Zahlenreihe (in Bezug auf die betrachteten Beziehungen) isomorph ist, daß es vielmehr außer einer der Zahlenreihe isomorphen Teilmenge auch Elemente enthält, die (im Sinne der Interpretation) *größer* sind als alle Elemente jener Teilmenge.

50[3] Gehalten 1930 in Hamburg (*vide* [**?**]).

51[1] Auf diese Tatsache hatte Hilbert schon früher einmal, in dem zweiten Hamburger Vortrag „Die Grundlagen der Mathematik“ hingewiesen (*vide* [**?**], S. 78). Dort benutzte er sie, um zu zeigen, daß der finite Nachweis der Widerspruchsfreiheit für einen Formalismus zugleich ein allgemeines Verfahren liefert, um aus einem in dem Formalismus geführten Beweis für einen elementaren arithmetischen Satz, etwa vom Charakter des Fermatschen Satzes, einen finiten Beweis zu gewinnen.

Man braucht diesen Schritt nicht als endgültig zu betrachten. Wohl aber wird man angesichts der Schwierigkeiten, die sich bei dem Problem der Widerspruchsfreiheit gezeigt haben, die Möglichkeit einer Erweiterung des bisherigen methodischen Rahmens der metamathematischen Überlegungen ins Auge fassen.

Dieser bisherige Rahmen ist auch durch die Grundgedanken der Hilbertschen Beweistheorie nicht eindeutig gefordert. Für die Weiterentwicklung der Beweistheorie wird es darauf ankommen, ob es gelingt, den finiten Standpunkt in sachgemäßer Weise so auszugestalten, daß – ungeachtet der Beschränkungen, welche der beweistheoretischen Zielsetzung durch die Gödelschen Ergebnisse auferlegt werden – doch das hauptsächliche Ziel, der Nachweis der Widerspruchsfreiheit für die übliche Analysis, erreichbar wird.

Während der Drucklegung dieses Referates ist von G. Gentzen der Nachweis für die Widerspruchsfreiheit des vollen zahlentheoretischen Formalismus erbracht worden[52], durch eine Methode, die den grundsätzlichen Anforderungen des finiten Standpunktes durchaus entspricht. Damit findet zugleich die erwähnte Vermutung betreffs der Reichweite der finiten Methoden (S. 226) ihre Widerlegung.

[52][2] Dieser Beweis wird demnächst in den *Mathematischen Annalen* veröffentlicht werden (*vide* [**?**]).

Kapitel 12

Bernays Project: Text No. 15

Thesen und Bemerkungen zu den philosophischen Fragen und zur Situation der logisch-mathematischen Grundlagenforschung (1937)

Theses and remarks on philosophical questions and on the situation of the logico-mathematical foundational research

(*Travaux IX Congrès International de Philosophie*, VI, S. 104–110; repr. in *Abhandlungen*, S. 79–84)

---

104 |**Sommaire**. – I. *Philosophie scientifique* et *Syntaxe logique*. Nécessité d'une interprétation. – II. *Logique* et *mathématique*. La distinction kantienne : «analytique»-«synthétique» est remplacée par une distinction entre «formel» et «objectif». Touchant ici la mathématique et la logique, on traite surtout du côté objectif : qui, en mathématique, consiste dans l'existence de rapports mathématiques, indépendants de la formulation en proposition, et dans la vérificabilité de lois arithmétiques ; en logique, dans le rapport implicite des termes et des principes à certains caractères de la réalité. – III. *Arithmétique* et *géométrie* sont distingués selon la considération du discret et du continu. Précision formelle

des concepts mathématiques intuitifs. – IV. *Pour la problématique des fondements*. Réflexions et indications sur la situation présente des recherches.

| I. Philosophie und Syntax A79

1. Wissenschaftliche Philosophie besteht aus den grundsätzlichen $_{a_1}$heuristischen$_{a_1}$ Überlegungen zur Gestaltung b$_d$e$_d$zw. Umgestaltung der Wissenschaftssprache, sowie den Überlegungen, welche die möglichen grundsätzlichen Deutungen und Auffassungen der wissenschaftlichen Ansätze betreffen.

2. Die Syntax, wie sie in dem Buche Carnaps *Logische Syntax der Sprache*[a] in Anlehnung an die Meta-Mathematik Hilberts und an die Untersuchungen der polnischen Logiker sowie diejenigen von Gödel über die formalisierten Sprachen entwickelt ist, betrachtet die mathematischen Eigenschaften formalisierter Wissenschaftssprachen.

| 3. Soll die Syntax Feststellungen enthalten, so muss sie in einer gedeuteten 105
Sprache erfolgen.

Soll eine formal aufgestellte Definition zur Präzisierung einer philosophischen Begriffsbildung dienen, so muss entweder die formale Definition mit einer Deutung versehen sein, oder jene Präzisierung erfolgt indirekt, indem eine syntaktische Eigenschaft jener formalen Definition gefordert wird, die aber dann ihrerseits in deutbarer Weise bestimmt sein muss.

4. Das Funktionieren einer formalen Sprache als Syntax-Sprache, bei Benutzung etwa der Gödel$_d$'$_d$schen Arithmetisierungsmethode, beruht auf der anschaulich-konkreten Gültigkeit der Arithmetik.

II. Logik und Mathematik

1. Anstelle der Kantischen Unterscheidung „analytisch-synthetisch“, deren allgemeine Fassung auf grundsätzliche Schwierigkeiten stößt, empfiehlt sich die Einführung einer anderen Art von Unterscheidung $_d$„$_d$zwischen$_d$“$_d$ „*formal*“ und „*gegenständlich*“ *motivierten Elementen* einer | Theorie, d. h. A80
zwischen Elementen (Termini, Axiomen, Schlussweisen), die um der Eleganz, der Einfachheit und Abrundung des Systems willen, und solchen, die

[a] *Vide* [**?**].

im Hinblick auf die Sachverhalte des zu behandelnden Gegenstandsgebietes eingeführt werden.

Bemerkung: Diese Unterscheidung liefert freilich keine scharfe Einteilung, weil sich formale und gegenständliche Motive superponieren können.

2. Die systematische Logik bildet ein Anwendungsgebiet mathematischer Betrachtung. Die Verbindung von Logik und Mathematik in den Systemen der Logistik ist eine entsprechende wie die von Physik und Mathematik in den Systemen der theoretischen Physik.

3. Das Mathematische findet sich nicht nur in Verbindung mit dem logischen Satzformalismus, vielmehr finden wir mathematische Beziehungen auch in anschaulicher Gegenständlichkeit; insbesondere treffen wir mathematische Verhältnisse in allen Gebieten des Physikalischen und Biologischen. – Die Unabhängigkeit des Mathematischen von der Sprache ist insbesondere von Brouwer betont worden.

4. Wir müssen anerkennen, dass die numerischen Beziehungen Tatsächlichkeiten ausdrücken. Dieses wird auch gerade anhand der Syntax besonders deutlich: wenn z. B. eine Formel A in einem Formalismus F ableitbar ist, so
106 ist diese Ableitbarkeit eine Tatsache, | welche als solche explicite vorgewiesen und nachgeprüft werden kann. Andrerseits stellt sich diese Ableitbarkeit in der Syntaxsprache durch eine numerische Beziehung dar.

Auch für arithmetische Sätze von der Form der Allgemeinheit, wie z. B. den Satz, dass jede ganze Zahl als Summe von vier oder weniger Quadratzahlen darstellbar ist, haben wir eine Art der Nachprüfung, und zwar in ganz analogem Sinne wie$_{d_2}\underline{\text{r}}_{d_2}$ für ein physikalisches Gesetz, nur dass man es das eine Mal mit einer Rechenanordnung, das andere Mal mit einer experimentellen Anordnung zu tun hat; in beiden Fällen wird durch das Gesetz ein gewisses zu erhaltendes Ergebnis vorhergesagt.

5. In der Logik, und zwar sowohl in derjenigen der Umgangssprache wie in der symbolischen Logik$_{a_2}\underline{,}_{a_2}$ haben wir nebeneinander formal und gegenständlich motivierte Elemente. Eine gegenständliche Motivierung liegt insofern vor, als die logischen Termini und Prinzipien zu einem Teil Bezug haben auf gewisse sehr allgemeine Charakteristika der Wirklichkeit. Auf diese gegenständliche Seite der Logik hat insbesondere Paul Hertz hingewiesen. Auch F. Gonseth spricht von der Logik als einer allgemeinen „théorie de l'objet".

A81 Andererseits bleibt die Tatsache bestehen, dass der Umkreis und die | Problemstellung der Logik nach gewissen Grundzügen der Sprachstruktur orientiert ist.

III. Zur Frage der mathematischen Anschauung

1. In der Kantischen Lehre von der reinen Anschauung ist die Annahme einer mathematischen Anschauung mit verschiedenen bedenklichen Zusatzmomenten behaftet. Wir können alle diese zusätzlichen Momente, so die Behauptung einer Verbindlichkeit der Anschauung von Raum und Zeit für die Physik sowie die Unterscheidung von „sinnlicher" und „reiner" Anschauung, beiseite lassen, aber doch anerkennen, dass es ein anschauliches mathematisches Vorstellen von räumlichen Verhältnissen und von Veränderung gibt, auf Grund dessen wir, jedenfalls in einem gewissen Umfang, Eigenschaften von Konfigurationen anhand ihrer anschaulichen Vorstellung gleichsam ablesen können. Die Art der Phantasie braucht dabei grundsätzlich keine andere zu sein als die, welche im Gebiet der Töne ein komponierender Musiker verwendet, wenn er Klangkombinationen in der Vorstellung vorausbestimmt.

2. Es empfiehlt sich, die Unterscheidung von „arithmetischer" und | „geo- 107
metrischer" Anschauung nicht nach den Momenten des Räumlichen und Zeitlichen, sondern im Hinblick auf den Unterschied des Diskreten und Kontinuierlichen vorzunehmen. Danach ist arithmetisch die Vorstellung einer aus diskreten Bestandteilen zusammengesetzten Figur, in welcher die Bestandteile selbst entweder überhaupt nur nach ihrer Stellung zur Gesamtfigur oder noch nach gewissen eigens herausgehobenen gröberen Unterscheidungsmerkmalen betrachtet werden, ferner auch die Vorstellung eines an einer solchen Figur zu vollziehenden formalen Prozesses, der nur in Hinsicht auf die Veränderung, die er bewirkt, betrachtet wird. Geometrisch dagegen sind die Vorstellungen von stetiger Veränderung, von stetig variierbarer Größe, ferner topologische Vorstellungen wie die von Linien- und Flächengestalten.

3. Die Grenzen der anschaulichen Vorstellbarkeit sind unscharf. Dieses ist der Grund, welcher dazu veranlasst hat, die anhand der Anschauung gewonnenen arithmetischen und geometrischen Begriffe systematisch zu verschärfen, wie es ja teils durch das axiomatische Verfahren, teils durch Einführung formal$_{d_2 \text{-} d_2}$ motivierter Urteils- und Schlussweisen erfolgt ist. Das methodisch Besondere an diesem Fall ist, dass die hier einzuführenden formal motivierten Elemente großenteils von der Logik her bereits zur Verfügung standen, so das Prinzip des „tertium non datur", welches ja gleichbedeutend ist mit der Annahme der | Negationsfähigkeit eines jeden Satzes, und zwar A82
im Sinne des strikten kontradiktorischen Gegenteils; ferner auch die Vergegenständlichung der Begriffe (Prädikate, Relationen) und Begriffsumfänge.

Anmerkung. Historisch ist bemerkenswert, dass in der Aristotelischen Logik bei den bekannten 19 Schlussfiguren das tertium non datur nirgends erfordert wird, weil das allgemein bejahende Urteil so interpretiert wird, dass es die Existenz unter den Subjektsbegriff fallender Gegenstände behauptet. (Man beachte unter diesem Gesichtspunkt die Regel „ex mere negativis nihil sequitur“.)$_{d_2}\underline{\ldots\text{tur“).}}_{d_2}$

IV. Zur Grundlagen-Problematik

1. Die Methode der abstrakten Verschärfung der Mathematik, wie sie in der Analysis und Mengenlehre zur Auswirkung kommt, hat, wie bekannt, von Anbeginn Opposition bei einem Teil der Mathematiker gefunden. In ihrer ausgeprägtesten Form hat diese Opposition zum Ziel, das übliche Ver-
108 fahren der Einführung formal motivierter Ele|mente durch ein solches zu ersetzen, welches sich vollständig im Rahmen der arithmetischen Evidenz vollzieht; die geometrische Anschaulichkeit soll ausgeschaltet werden, und andererseits sollen alle die abstrakten Begriffsbildungen und Schlussweisen vermieden werden, welche keine arithmetische Anschaulichkeit besitzen.

2. Die im Sinne der in 1. genannten Zielsetzung (einer nach arithmetischer Evidenz orientierten Mathematik) von Kronecker begonnene und von Brouwer durchgeführte Begründung eines erheblichen Teiles der vorhandenen Mathematik hat die Mathematiker nicht zur Annahme des methodischen Standpunktes der arithmetischen Evidenz bekehrt. Die Gründe dafür mögen die folgenden sein:

a) Wer in der Mathematik Anschaulichkeit sucht, der wird die restlose Eliminierung der geometrischen Anschauung als unbefriedigend und künstlich empfinden. Tatsächlich gelingt auch die Reduktion des Stetigen auf das Diskrete nur in einem angenäherten Sinn. Wer andererseits scharfe Begrifflichkeit anstrebt, der wird die Methoden bevorzugen, welche vom Standpunkt der Systematik die günstigsten sind.

b) Bei dem Brouwer$_{d_2}\underline{\text{'}}_{d_2}$schen Verfahren werden in die Sprache der Mathematik Unterscheidungen eingeführt und spielen eine wesentliche Rolle, deren Bedeutsamkeit nur vom Standpunkt der Syntax dieser Sprache ersichtlich ist. Die von Brouwer behauptete Ungültigkeit des „tertium non datur“ kann in
A83 präziser Weise nur als *syntaktischer* | Sachverhalt, nicht als $_{d_2}\underline{\text{s}}_{d_2}$ein solcher der mathematischen Gegenständlichkeit selbst konstatiert werden.

Bemerkung. Der Brouwer$_{d_2}\underline{\text{'}}_{d_2}$sche Gedanke, das Kontinuum als Menge der Wahlfolgen zu charakterisieren, ist an sich unabhängig von der Ablehnung des „tertium non datur“. In $_{a_1}\underline{\mathrm{B}}_{a_1}$ezug auf indefinite Prädikate von Wahlfolgen kann freilich kein „tertium non datur“ gelten. Aber man könnte gleichwohl den Standpunkt so wählen, dass für die zahlentheoretischen Eigenschaften gesetzlicher Folgen das „tertium non datur“ beibehalten wird. Auf diese Weise würde man eine Erweiterung der von Weyl 1918 aufgestellten Kontinuumstheorie erhalten.

3. Der Standpunkt, den Hilbert durch seine Beweistheorie einnimmt, ist dadurch gekennzeichnet, dass er sowohl den Bedürfnissen der formalen Systematik wie denen der arithmetischen Evidenz gerecht werden will. Als Mittel zur Vereinigung dieser Ziele dient ihm die Sonderung von Mathematik und Meta-Mathematik, welche der Kantischen Teilung der Philosophie in „Kritik“ und „System“ nachgebildet ist. Bekanntermaßen ist die Hauptaufgabe, die Hilbert der | Meta-Mathematik als einer Beweiskritik stellt, der Nach- 109
weis für die Widerspruchsfreiheit des üblichen Verfahrens der Mathematik. Die Inangriffnahme des Problems ist als eine etappenweise zu vollziehende gedacht.

In der Durchführung der Aufgabe zeigen sich freilich erhebliche, zum Teil unerwartete Schwierigkeiten. Ein wesentlicher Grund für noch unüberwundene Schwierigkeiten besteht darin, dass der Abstand zwischen einem Formalismus der anschaulichen Arithmetik und dem der üblichen Mathematik größer ist, als ihn Hilbert vermutet hatte.

Im zahlentheoretischen Formalismus läßt sich das „tertium non datur“ in gewissem Sinne eliminieren. Auf dieser Tatsache beruhen die von Gödel und Gentzen erbrachten Beweise für die Widerspruchsfreiheit des zahlentheoretischen Formalismus. Sobald man aber zur Betrachtung von Zahl*funktionen* übergeht, ist von einer solchen Eliminierbarkeit nicht mehr die Rede. Dieses geht insbesondere aus einem Satz hervor, der im Anschluss an eine Präzisierung des Begriffes einer „berechenbaren“ Funktion von S. C. Kleene bewiesen worden ist und welcher besagt, dass es Zahlfunktionen gibt, die sich mit den Symbolen des zahlentheoretischen Formalismus (bei Einschluss eines Symbols für „kleinste Zahl x von der Eigenschaft $\mathfrak{P}(x)$“) definieren lassen, jedoch nicht berechenbar sind.

Bemerkung. – Die Präzisierung des Begriffes der berechenbaren Funktion erfolgte auf zwei voneinander unabhängige Arten: durch den Herbrand-Gödel$_{d_2}$'$_{d_2}$schen Begriff der „allgemein-rekursiven“ und den Church$_{d_2}$'$_{d_2}$schen Begriff der „λ-definierbaren“ Funktion; diese beiden | Begriffe sind von A. Church A84
und Kleene als umfangsgleich erwiesen worden.

4. Während die Aufgabe eines Widerspruchsfreiheitsbeweises für die Analysis ein noch ungelöstes Problem ist, sind nach anderer Richtung, nämlich im Gebiet der stufenfreien Formalismen der kombinatorischen Logik, Nachweise für Widerspruchsfreiheit gelungen. Ein solcher stufenfreier Kalkul ist die von H. B. Curry im Anschluss an Schönfinkel aufgestellte Theorie der „combinators“, ferner die von Church begründete Theorie der „conversions“. Diese beiden formalen Theorien, deren enger Zusammenhang von J. B. Rosser aufgezeigt wurde, liefern einen weittragenden und logisch befriedigenden Definitionsformalismus. Die Widerspruchsfreiheit des Operierens mit den combinators (im Sinne der Eindeutigkeit) ist schon vor längerem von Curry, die des Formalismus der conversions neuerdings von Church und Rosser bewiesen worden.

110 | Die stufenfreien kombinatorischen Formalismen liefern auch eine neue Anregung für die Gestaltung des Systems der Logistik. Durch eine Eingliederung dieser Gebiete kann eventuell eine Reform der Logistik im ganzen bewirkt werden. Ein zulänglicher Ansatz für eine solche Eingliederung liegt freilich bisher nicht vor.

Kapitel 13

Bernays Project: Text No. 15b

Grundsätzliche Betrachtungen zur Erkenntnistheorie[†] (1937)

Considerations on the Principles of Epistemology

(*Abhandlungen der Fries'schen Schule* NF 6, Heft 3/4 (1937), S. 279–290.)

---

279 | In der erkenntnistheoretischen Diskussion stehen einander die Lehre von der Erkenntnis a priori und diejenige des ausschließlichen Empirismus gegenüber. Die aprioristische Ansicht ist charakterisiert durch die Behauptung, daß wir gewisse ursprünglich in der Vernunft enthaltene, wenngleich erst durch die Anregung von seiten der Sinneseindrücke zur Aktualität kommende Erkenntnisse über die Naturwirklichkeit besitzen, die sich, wenn sie zu vollem Bewußtsein gebracht sind, in der Form allgemeiner Gesetze in endgültiger Weise formulieren lassen. Weiterhin behauptet diese Lehre, daß jene a priori erkennbaren allgemeinen Gesetze die Prinzipien für die exakte Naturforschung enthalten und daß durch sie insbesondere die Methode der physikalischen Theorienbildung in eindeutiger und endgültiger Weise festgelegt werde, so daß es nach der Auffindung dieser Prinzipien im eigentlichen Sinne keine Entwicklung der physikalischen Spekulation mehr gebe.

[†]The article was originally numbered "VI." and had the additional line"Von Paul Bernays."

So bildet nach Kant die klassische Kinematik den notwendigen Rahmen für alle Physik. Auch die Prinzipien der Newtonschen Dynamik werden von Kant als endgültige Grundsätze der Physik angesehen und somit die Aufgabe der physikalischen Forschung auf die Auffindung mechanischer Modelle zur Erklärung der verschiedenen Phänomene eingeschränkt.

(Es treten sogar noch weitere einschränkende Bedingungen hinzu, welche nach Kant philosophisch deduzierbar sind: so z. B., daß jede Grundkraft eine Zentralkraft sein müsse, wie auch, daß es eine zeitlich unmittelbare Fernwirkung geben müsse.)

| In dieser extremen Form kann die aprioristische Lehre jedenfalls nicht mit 280
der heutigen Physik in Einklang gebracht werden. Will man sie aufrechterhalten, so muß man entweder die Gedankenbildungen der heutigen Physik grundsätzlich verwerfen, oder man muß den aprioristischen Standpunkt abschwächen, indem man den als a priori gültig behaupteten Prinzipien eine so weitherzige Deutung gibt, daß sie mit der gegenwärtigen Physik vereinbar werden.

Das erstgenannte Verhalten erscheint als ein bedenklicher Dogmatismus. Gegen das andere Verfahren sprechen aber folgende Gründe:

1. Selbst wenn die Formulierungen der Prinzipien sich bei einer weitherzigen Art der Interpretation aufrecht erhalten lassen, so geht doch bei einer solchen zumeist ein wesentliches Moment dessen verloren, was die Überzeugungskraft eines Prinzips ausmacht.

   So ist z. B. das Prinzip der Erhaltung der Substanz mit der Vorstellung verbunden, daß die Substanz dasjenige ist, woraus ein konkretes Ding besteht. Wenn man nun etwa dieses Prinzip dahin auslegt, daß es lediglich die Gültigkeit von Erhaltungssätzen besagt, dann ist jene Vorstellung preisgegeben, und das Prinzip hat dann gar keine apriorische Überzeugungskraft.

   Wir können uns diesen Sachverhalt an dem Gesetz von der Erhaltung der elektrischen Ladung verdeutlichen. Als eine Konsequenz der Substanz-Vorstellung müßte dieses Gesetz besagen, daß die positive und die negative Ladung jede für sich erhalten bleibt. Gemäß der heutigen Physik gilt dagegen das Gesetz nur in dem Sinne, daß die algebraische Summe von positiver und negativer Ladung konstant bleibt. Das ist zwar auch ein Erhaltungssatz, doch hat dieser nichts mehr mit der Idee der Substanz zu tun und besitzt auch keinerlei apriorische Plausibilität.

2. Die Möglichkeit, den Wortlaut eines Prinzips bei Wandlungen der phy-
sikalischen Grundansichten aufrecht zu erhalten, hängt von der beson-
281 deren Beschaffenheit der jeweils neuen Theorien ab, und | es kann wohl
kaum als von vornherein gewiß angenommen werden, daß in allen Fällen
die Änderung der Auffassung derart sein muß, daß jene Möglichkeit der
Aufrechterhaltung der Formulierungen besteht.

Angesichts dieser Sachlage wird man nach einer philosophischen Ansicht suchen, die uns in radikalerer Weise der Notwendigkeit von Rückzügen oder unbefriedigenden Defensiven enthebt.

Als ein solcher radikaler Standpunkt bietet sich ein extremer Empirismus, welcher die Naturwissenschaft ganz und gar auf die unmittelbaren Daten der Wahrnehmung zurückzuführen sucht. Nach dieser Ansicht besteht die Naturwissenschaft, wenn von ihr alle unnötigen und bedenklichen Zutaten abgestreift werden, aus nichts anderem als einer nach dem Gesichtspunkt möglichst großer Übersichtlichkeit erfolgenden Anordnung und Zusammenfassung von Sinnesdaten.

Gegenüber dieser Auffassung ist jedoch geltend zu machen, daß bloße Zusammenstellungen von Sinnesdaten ja noch nicht ohne weiteres schon objektive Tatbestände und Zusammenhänge ergeben. Der geistige Prozeß, welcher von den direkten Sinnesgegebenheiten zur Feststellung objektiver Tatsächlichkeiten führt, ist jedenfalls kein so simpler. Dieses hat ja insbesondere Kant nachdrücklich geltend gemacht, und wir müssen ihm hierin durchaus zustimmen.

Außerdem ist jener extreme Empirismus ganz außerstande, die Methode der Erprobung naturwissenschaftlicher Behauptungen an Hand von neuen Experimenten verständlich zu machen. – Wie weit ab das Verfahren der Naturwissenschaft von einem bloßen Registrieren von Wahrnehmungen ist, zeigt sich insbesondere auch daran, daß unter Umständen ganz geringe Beobachtungseffekte den Anlaß geben können zu einer umwälzenden Veränderung in den naturwissenschaftlichen Theorien.

282 Diesen Tatsachen, welche gegen den extremen Empirismus spre|chen, trägt ein gemäßigter Empirismus Rechnung, der einerseits die Art der Gegenständlichkeit, mit der wir im alltäglichen Leben und auch beim Experimentieren zu tun haben, als gegeben vorwegnimmt und der ferner die wesentliche Rolle der Annahmen würdigt, durch welche Sätze, die ihrer Form nach den Anspruch auf Allgemeingültigkeit enthalten, versuchsweise statu-

iert werden.[1]

Ein solcher gemäßigter Empirismus läßt aber die erkenntnistheoretischen Fragen noch offen, welche einerseits die Ausbildung jener Naturansicht des alltäglichen Lebens (der „morphologischen Weltansicht“, nach der Bezeichnung von Fries und Apelt), andererseits die Bildung der Hypothesen und Theorien betreffen.

Somit werden wir auf unsere vorherige Problemstellung zurückgeführt: nach einer philosophischen Ansicht von der Erfahrungserkenntnis zu suchen, welche grundsätzlich die Konflikte ausschließt, in welche uns die Kantische Lehre von der Erkenntnis a priori mit den fortschreitenden naturwissenschaftlichen Gedankenbildungen bringt. Wir wollen die Frage gleich etwas bestimmter fassen: Ist eine radikale Loslösung von solchen Beengungen, wie sie der Kantische Apriorismus für die Methodenlehre der Naturwissenschaft zur Folge hat, vereinbar mit der Aufrechterhaltung wesentlicher Gedanken der Kantischen Vernunftkritik?

Diese Form der Fragestellung legt uns nahe, zwei wesentliche Momente in dem Ansatz der Kantischen Theorie der Erfahrung voneinander zu sondern: den Gedanken, unsere Erfahrungserkenntnis nicht als einen in der Hauptsache rezeptiven Vorgang und auch nicht als ein unmittelbares Schauen, sondern als ein von Sinneseindrücken angeregtes Erzeugnis des Geistes anzusehen, und andererseits die Annahme, daß in diesem Geistesprodukt alles Grundsätzliche durch unveränderliche Grundbeschaffenheiten des Geistes bestimmt sei.

| Diese letztere Annahme rührt davon her, daß Kant bei dem Ansatz seiner 283
Theorie von der folgenden Erwägung geleitet war: Die Prinzipien der exakten Naturwissenschaften sind Erkenntnisse a priori, als solche sind sie aber nur begreiflich, wenn sie Bedingungen der Möglichkeit der Erfahrung zum Ausdruck bringen. Hier ist einerseits die Überzeugung von dem apriorischen Erkenntnischarakter der Grundsätze von Geometrie und Mechanik wirksam, also gerade dasjenige Moment, welches wir als problematisch befunden haben und ferner die Ansicht, daß es eine Erkenntnis a priori von Dingen außer uns, wie sie „an sich“ sind, nicht geben könne, jenes Argument, welches den von Fries so benannten und von ihm kritisierten „formalen Idealismus“ bildet. Diese Friessche Kritik besteht ganz zu Recht. Ihrer ungeachtet hat aber Fries doch die Grundzüge der Kantischen Theorie beibehalten, ja er hat die subjek-

[1] Ein gemäßigter Empirismus wird gegenwärtig von den meisten wissenschaftlich orientierten Philosophen vertreten. Auch Rudolf Carnap, der anfangs einen extremen Empirismus verfocht, hat sich neuerdings einem gemäßigten Empirismus zugewandt.

tive Wendung der Erkenntnistheorie fast noch verstärkt. Ihm war es ebenso wie Kant darum zu tun, den Standpunkt der klassischen Mechanik, den auch er für die endgültige wissenschaftliche Naturansicht nahm, philosophisch als notwendig einzusehen und zugleich auch diese Naturansicht hinsichtlich ihrer Kompetenz gegen die religiöse Weltansicht abzugrenzen. Dieses beides schien durch KantS Verfahren der „kopernikanischen Wendung" der Betrachtungsweise aufs erfolgreichste zur gemeinsamen Verwirklichung gebracht.

Wenn wir nun die Prinzipien der Newtonschen Mechanik nicht mehr als Erkenntnisse a priori in Anspruch nehmen, so fällt für uns jene Kant-Friessche Form der Problemstellung dahin, und wir werden – unter Beibehaltung des Gedankens von dem produktiven Anteil der Geistestätigkeit in der Naturerkenntnis – die extreme Ansicht, wonach „der Verstand der Natur seine Gesetze vorschreibt", durch eine unbefangenere Auffassung ersetzen.

Eine solche unbefangenere Auffassung erscheint zunächst in der Lehre von der mathematischen Erkenntnis und ihrer Beziehung zur Physik geboten:
284 Daß die Gesetze der Geometrie über das hinaus|gehen, was durch Beobachtungen festgestellt oder aus Beobachtungen erschlossen werden kann, ist ersichtlich. Andererseits kann eine Ansicht nicht befriedigen, bei der die wesentliche Rolle, welche unsere Erfahrungen über die Beweglichkeit der festen Körper für die Aufstellung der geometrischen Grundgesetze spielen, – wie sie ja insbesondere von Helmholtz aufgezeigt wurde – gänzlich übergangen wird. Wir können dem besonderen Charakter der in der Geometrie vorliegenden anschaulichen (d. h. von der Anschauung geleiteten) Ideenbildung durchaus gerecht werden, ohne damit die sehr plausible Auffassung auszuschließen, daß diese geometrische Ideenbildung im Zusammenhang mit der geistigen Verarbeitung der grundlegenden Beobachtungen erfolgt, die im Hantieren mit festen Körpern gewonnen werden. Ferner: daß die Raumvorstellung, und erst recht die Zeitvorstellung eine Form unserer Anschauung bildet und sich nicht auf Empfindungen und Begriffsbildungen reduzieren läßt, ist unbedingt zuzugeben. Das Anerkennen dieses Sachverhalts nötigt uns aber keineswegs dazu, anzunehmen, daß die physikalische Räumlichkeit und Zeitlichkeit sich lediglich von unseren Anschauungsformen herschreibt und daß ihre Gesetzlichkeit durch diese Formen der Anschauung bestimmt ist.

Indem wir uns von dieser Voraussetzung losmachen, gewinnt die Physik erheblich an spekulativer Freiheit; an die Stelle des engen Rahmens der Mechanistik tritt derjenige des Mathematischen überhaupt. Wir können danach die Aufgabe der Physik ganz allgemein so fassen, die Naturgegebenheiten daraufhin zu erforschen, wie weit sich in ihnen mathematische Gesetzlichkeiten aufdecken lassen, und inwieweit durch solche ein einheitliches Begreifen der Zusammenhänge möglich wird.

In gewissem Sinne kommen wir damit zurück auf das alte Programm der Pythagoräer. Freilich müssen wir uns davon fernhalten, das Mathematische – wie jene es wohl taten – in mystischer Weise zu hypostasieren. Das Mathematische kann seinem | Charakter nach nicht das Wirkliche selbst, sondern 285
nur etwas *am* Wirklichen sein.

Andererseits sind wir nicht gehindert anzuerkennen, daß das Moment des Mathematischen sich, auch unabhängig von unserer geistigen Veranlagung, in der Wirklichkeit vorfindet. Wir brauchen daher auch der Lehre von der „Spaltung der Wahrheit in verschiedene Weltansichten" (nach dem Ausdruck von Apelt) nicht den Sinn einer Beeinträchtigung der Bedeutung der physikalischen Erkenntnis zu geben. Bei der Zugrundelegung der mechanistischen Physik ist eine solche Einschränkung der Geltung unvermeidlich wegen des Anspruchs auf Ausschließlichkeit und Vollständigkeit, welcher der mechanistischen Naturansicht innewohnt. Für unsere Auffassung der Physik dagegen, bei welcher als generelles Charakteristikum nur die mathematische Form der Begriffsbildung und der Zusammenhänge gilt, nicht aber die Durchführung einer zu Grunde gelegten spezifischen Naturansicht, wird jenes Erfordernis hinfällig.

Als eine weitere Konsequenz dieser Auffassung ergibt sich, daß die naive Ansicht von den Dingen – wir wollen sie kurz als unsere „geläufige Naturansicht"[2] bezeichnen – an Bedeutsamkeit gewinnt. In der Kantischen Philosophie und ebenso bei Fries erscheint diese als eine bloße Vorstufe der naturwissenschaftlichen Ansicht. Mit dem Fallenlassen der Annahme einer spezifisch physikalischen Naturansicht erhält unsere geläufige Naturansicht die Rolle eines festen Ausgangsstandpunktes, auf den auch die theoretische Forschung bei der experimentellen Motivierung ihrer Begriffsbildungen und Annahmen immer wieder rekurrieren muß.

Des näheren ist diese geläufige Naturansicht durch folgende Momente charakterisiert:

1. In ihr ist bereits die volle Konstituierung der Gegenstandsvorstellung vollzogen; sie enthält daher auch das anschauliche | geometrische Vor- 286

[2]Der Ausdruck „morphologische Weltansicht" ist etwas mißverständlich, da er die Meinung erweckt, daß das Charakteristische dieser Einstellung in der Beschrankung auf das Gestaltliche liege.

stellen und die anschauliche „Konstruktion“ der räumlichen Ordnung der Gegenstände, sowie auch all das, was zum Umgehen mit den Dingen beim Experimentieren erfordert wird.

2. Sie schließt alle diejenigen Begriffsbildungen zur Beschreibung und Erklärung der Außen- und Innenwelt in sich, welche in der gewöhnlichen Umgangssprache niedergelegt sind. Insbesondere finden hier fundamentale Begriffe wie Stoff, Lebendiges, Bewußtsein, Ursache, Zufall u. a. eine unproblematische Anwendung.

3. Es finden in ihr keine Reduktionen (z. B. von Qualitativem auf Nicht-Qualitatives) noch auch Isolierungen von Gegenstands-Gebieten statt. Alles Vorhandene wird im Zusammenhang betrachtet. Die Heterogenität von Materiellem und Geistigem führt nicht zu Unzuträglichkeiten, weil die Zusammenhänge nur soweit verfolgt werden, wie sie sich empirisch darbieten. Auch die Bezogenheit der Sinnesqualitäten auf die Wahrnehmung und die daraus entspringenden Täuschungen bereiten dieser Ansicht keine grundsätzlichen Schwierigkeiten; allenthalben paßt sich die Begriffsbildung und die Sprache den vorgefundenen Verhältnissen an. (Wir sagen z. B.: „dieses Kleid sieht bei Tageslicht gelb aus“, oder: „dieses Tuch fühlt sich weich an“.)

Ein erheblicher Teil der Erfahrungswissenschaft, insbesondere der Physik, fügt sich noch ohne weiteres dem Bereich der geläufigen Naturansicht ein. Manche Philosophen wollen überhaupt die Überschreitung unserer geläufigen Naturansicht durch die Physik gar nicht gelten lassen. In diesem Sinne opponierte z. B. Ernst Mach gegen die Atomistik.

Die Tendenz zu einer solchen Beschränkung auf den Rahmen unserer geläufigen Naturansicht ist sehr begreiflich in Anbetracht der Vorzüge der Anschaulichkeit und der inneren Geschlossenheit, welche dieser Naturansicht zukommen. Andererseits müssen wir uns aber doch darüber klar sein, daß
287 jene Geschlossenheit, wie bedeutsam sie auch für | unser handelndes Leben und für unsere gefühlsmäßige Einstellung zur Welt ist, dennoch einen nur perspektivischen Charakter hat, vergleichbar der Einheitlichkeit, welche ein Landschaftsbild besitzt. Und wir müssen ferner anerkennen, daß das Verfahren, welches die über die geläufige Naturansicht hinausgehende spekulative Physik befolgt, eine konsequente Fortführung der Methoden ist, durch die wir auch schon bei der Ausbildung der geläufigen Naturansicht

zum gegenständlichen Erfassen der Umwelt und zur Erkenntnis kausaler Zusammenhänge gelangen. An eine philosophische Auffassung von der Naturerkenntnis werden wir die Anforderung stellen, daß sie dieser grundsätzlichen methodischen Übereinstimmung des Prozesses der Physik in seinen frühen Stadien mit demjenigen in der neueren spekulativen Physik gerecht wird.

Wenn wir im Hinblick auf diese Aufgabe nach einem geeigneten erkenntnistheoretischen Standpunkt suchen, so zeigen sich uns hier auf Grund der vorangegangenen Erwägungen folgende, einander ergänzende Gesichtspunkte:

1. Der Standpunkt muß so gewählt sein, daß er der Forschung die nötige spekulative Freiheit läßt. Die forschende Tätigkeit ist nicht als eine bloße Anwendung eines von vornherein festgelegten Schemas, sondern als eine beständig erneute geistige Produktion anzusehen.

2. Die spekulative Freiheit darf andererseits nicht als Willkür verstanden werden; es muß das rationale Element in der Forschung gewürdigt werden, welches uns insbesondere in den fertigen, völlig ausgereiften Teilen der Physik entgegentritt. Die Bildung einer neuen physikalischen Ansicht ist als eine Deutung zu verstehen, mit welcher die Vernunft auf eine gegebene Erfahrungssituation sozusagen reagiert, – wobei jeweils die auf früheren Stadien der Forschung gewonnenen Deutungen, soweit sie sich bewährt und fixiert haben, als etwas mit zur Situation Gehöriges auftreten.

Gemäß einer solchen Auffassung sind wir freilich nicht in der | Lage, den 288
Vernunftanteil an der Erfahrungserkenntnis in der Gestalt von apriorischen Prinzipien aufzuzeigen. Allenfalls kann es gelingen, ihn durch die Formulierung regulativer Maximen der Forschung zu charakterisieren; doch auch dieses ist zweifelhaft.

Jedenfalls aber finden wir das Moment der rationalen Deutung als einen wesentlichen Bestandteil in der vor uns liegenden Entwicklung der Erfahrungswissenschaft – freilich nicht in jenen im schlechten Sinne rationalistischen, mit Recht von Mach kritisierten Scheinbeweisen, mit denen man Deduktionen zu erschleichen sucht, wo es einer Heranziehung der experimentellen Erfahrung bedarf, wohl aber in den heuristischen Methoden der Überlegung, sowie überall da, wo neue deutende Allgemeinbegriffe eingeführt und damit neue Arten des Begreifens angebahnt werden: wie z. B. in dem Gedanken der Atomistik, in der Methode der Erklärung von Gesetzlichkeiten mit Hilfe des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, in der Modifikation des Materiebegriffs durch den Feldbegriff, in der Einführung und Anwendung des Energiebegriffs, sowie ferner in jenen Gedanken, welche die Zusammenfassung verschiedenartiger Gebiete zu einer einheitlichen Theorie ermöglichen: die Zusammenfassung der Erscheinungen der Schwere mit den astronomischen Bewegungsvorgängen, die Zusammenfassung der Optik mit der Elektrodynamik, die Zusammenfassung der geometrischen Maßverhältnisse und der Trägheitsphänomene mit der Gravitation und endlich die neueste Auffassung von Welle und Korpuskularvorgang als verschiedener Seiten einer und derselben Realität.

Vergleichen wir die dargelegte Auffassung mit den zu Anfang gekennzeichneten, einander entgegenstehenden Ansichten des reinen Apriorismus und des reinen Empirismus, so finden wir, daß sie sich von diesen beiden Ansichten durch das Fallenlassen einer ihnen gemeinsamen Voraussetzung unterscheidet, nämlich der Voraussetzung, daß die Vernunft, sofern sie in der Erfahrungserkenntnis bedeutsam ist, sich durch Erkenntnisse a priori geltend
289 machen müsse. Wir | können den Zusammenhang nach der Art, wie es Leonard Nelson zu tun pflegte, an Hand eines logischen Schemas zur Darstellung bringen:

sschulz

Dogmatische Voraussetzung V: Wenn die Vernunft für die physikalische Erkenntnis wesentlich ist, so muß sie sich durch a priori erkennbare Prinzipien geltend machen.

Feststellung F_1: Das rationale Element ist in der physikalischen Forschung nicht entbehrlich.

Feststellung F_2: Es gibt keine a priori feststehenden Grundsätze der Physik.

Aprioristische Konsequenz aus F_1 und V: Wir besitzen a priori erkennbare Prinzipien der Physik.

Empiristische Konsequenz aus F_2 und V: Das rationale Element ist für die Physik entbehrlich.

Lösung: Die Vernunft macht sich in der physikalischen Forschung nicht durch Prinzipien a priori, sondern im Fortschritt der Begriffsbildung und der Erklärungsmethoden geltend.

Die auf diese Weise sich ergebende Abwendung von dem traditionellen Rationalismus erweist sich bei näherem Zusehen als nicht nur vereinbar mit der Würdigung der Bedeutung des Rationalen, sondern sogar als günstig hierfür. Die Kantische Philosophie hatte durch ihre Begrenzung der Naturforschung hinsichtlich ihrer Methode und ihrer Geltung eine Entwertung der wissenschaftlichen Naturansicht zur Folge.

„Auf theoretischem Felde ist weiter nichts mehr zu finden“, so resümiert scherzweise Schiller die Kantische Ansicht.

Wir werden der Bedeutsamkeit des Rationalen besser gerecht, wenn wir nicht darauf ausgehen, einen zeitlichen Standpunkt der Naturauffassung als endgültig zu sichern, vielmehr dem Charakter der Entwicklung Rechnung tragen, welcher dem Prozeß der geistigen Auseinandersetzung der Kreatur mit der Umwelt ebenso wie allem Lebendigen eigen ist.

Kapitel 14

Bernays Project: Text No. 16

Über die aktuelle Methodenfrage der Hilbertschen Beweistheorie[†] (1938/1941)

On the Current Question of Method in Hilbert's Proof Theory

(Manuscript from the *Nachlass*)

---

1 [1] |Mein Bericht über den gegenwärtigen Stand der Hilbertschen Beweistheorie verbindet sich mit grundsätzlichen Erwägungen. Zum voraus bemerke ich, dass inbetreff der Stellungnahme zu der vorhandenen Situation die hier dargelegten Ansichten nicht beanspruchen können, schlechthin als der Standpunkt der Hilbertschen Schule zu gelten.

[†]A French version, "Sur les questions méthodologiques actuelles de la théorie Hilbertienne de la démonstration," was published in *Les entretiens de Zürich sur le fondements et la méthode des sciences mathématiques, 6–9 décembre 1938*, ed. F. Gonseth, Zürich: Leemann & Co. (1941), pp. 144–152 (*vide* [**?**]). The French text, however, introduced—besides several passages obscured in translation—roughly one hundred changes, apparently none of which was approved by Bernays, that we decided to include the text and a translation of the original German manuscript. The sections of the German text are consecutively numbered "[n]" for easy cross-reference and comparison with the 'official' French version of the text given at the bottom of the pages/at the end of the bi-lingual section.

[2] Die Verknüpfung der grundsätzlichen Erörterungen mit der Darlegung der gegenwärtigen Situation der Beweistheorie wird durch diese Situation selbst herausgefordert. Wie sie wohl wissen, hat die Beweistheorie eine Art von Krise durchgemacht, und von manchen ist das Hilbertsche Unternehmen schon geradezu als gescheitert erklärt worden. Diese Beurteilung der Situation gründet sich darauf, dass dasjenige Programm, wie es Hilbert für die
Beweistheorie in seinen Publikationen von 1922–1927 darlegte, | allem An- 2
schein nach einer Revision bedarf, und zwar in Hinsicht auf den zugrunde zu legenden methodischen Standpunkt.

[3] Technisch betrachtet handelt es sich darum, dass man für die metamathematischen Überlegungen weitergehende Methoden des Schliessens nötig hat als die, auf welche sich Hilbert ursprünglich im Sinne der „finiten Einstellung“ beschränken wollte. Dieses Erfordernis machte sich bereits bei derjenigen Aufgabe geltend, die man zuvor als schon erledigt glaubte, nämlich des Nachweises der Widerspruchsfreiheit für den vollen arithmetischen Formalismus.

[4] Im Zusammenhang damit erwies sich auch, dass der von Hilbert intendierte finite Standpunkt mit dem Brouwerschen Intuitionismus nicht – wie es zuvor den Anschein hatte – gleichwertig ist. Gödel konnte zeigen, dass im Bereich des zahlentheoretischen Formalismus alle Schlussweisen der klassischen Mathematik durch eine verhältnismässig einfache Umdeutung in intuitionistisch zulässige Schlussweisen überführt werden können, sodass sich damit vom Standpunkt des Intuitionismus ohne weiteres die Widerspruchsfreiheit
des zahlentheoretischen Formalismus ergibt. | 3

[5] Unter dem zahlentheoretischen Formalismus soll hier dasjenige formaldeduktive System verstanden werden, welches gebildet wird von dem logischen Kalkul der ersten Stufe („Prädikatenkalkul“ oder auch „engerer Funktionenkalkul“ genannt), den Gleichheitsaxiomen, den zahlentheoretischen Axiomen

$$a' \neq 0, \quad a' = b' \ \rightarrow \ a = b, \quad (a' \text{ stellt die auf } a \text{ folgende Zahl dar})$$

sowie dem Schema der vollst
ändigen Induktion, und den elementaren rekursiven Definitionen. (Der in den zahlentheoretischen Deduktionen auftretende Begriff der kleinsten Zahl von einer gewissen Eigenschaft kann mittels der Methode der Elimination des Begriffs „derjenige, welcher“ für die Untersuchung der Widerspruchsfreiheit ausgeschaltet werden.)

[6] Dieser Formalismus geht schon etwas über dasjenige hinaus, was man unbedingt für die Formalisierung der zahlentheoretischen Beweise braucht. Hierfür kommt man in der Tat, wie zuerst Skolem zeigte, mit einem engeren Formalismus der „rekursiven Zahlentheorie“ aus, welcher noch einer direkten
4 finiten Deutung fähig ist. |

[7] Der hier betrachtete zahlentheoretische Formalismus unterscheidet sich von der rekursiven Zahlentheorie und auch von der intuitionistischen Zahlentheorie durch die unbeschränkte Anwendung der Begriffe „alle“ und „es gibt“.

[8] Es kann aber im Bereich der Schlüsse, die sich durch den zahlentheoretischen Formalismus darstellen lassen, eine Einigung zwischen dem Vertreter des üblichen mathematischen Standpunktes, der jene Schlussweisen sämtlich als berechtigt erachtet, und dem Intuitionisten, der den Satz vom ausgeschlossenen Dritten nicht generell anerkennt, in der Weise erreicht werden, dass der erste erklärt: eine Aussage „es gibt ein x, für welches $\mathfrak{A}(x)$ gilt“ soll nur eine andere Ausdrucksweise dafür sein, dass jedenfalls nicht für alle x das Gegenteil von $\mathfrak{A}(x)$ gilt, und eine Aussage „$\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$“ soll nichts anderes besagen als, dass nicht sowohl das Gegenteil von $\mathfrak{A}$ wie das Gegenteil von $\mathfrak{B}$ gilt. Bei dieser Interpretation des Existentialurteils und der Disjunktion muss der Intuitionist alle Schlussweisen aus dem genannten Bereich der klassischen Mathematik anerkennen, – wenigstens sofern er die von Heyting
5 angegeben Regeln des intuitionistischen Schliessens akzeptiert. |

[9] Diese Feststellung nun, dass die intuitionistischen Schlussweisen der Zahlentheorie zu den „klassischen“ in einer so engen Beziehung stehen, ergibt einerseits ohne weiteres einen Nachweis der Widerspruchsfreiheit des zahlentheoretischen Formalismus vom Standpunkt des Intuitionismus, andrerseits geht aus ihr hervor, dass der intuitionistische Standpunkt sich von dem finiten wesentlich unterscheidet. Insbesondere zeigt sich der folgende Unterschied inbezug auf Allaussagen (Aussagen allgemeiner Form): Während der Intuitionismus nur die Anwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten auf solche Aussagen anficht, vermeidet der finite Standpunkt überhaupt die Bildung der Negation von Allaussagen sowie deren Verwendung als Vorderglieder hypothetischer Sätze.

[10] Eine Negation einer Aussage hat nur dann einen finiten Sinn, wenn sie einer Behauptung positiven Inhalts gleichkommt – so wie z. B. die negative Aussage „die Ziffer $\mathfrak{a}$ ist nicht gleich der Ziffer $\mathfrak{b}$“, dasselbe besagt wie die positive Behauptung, dass die Ziffer $\mathfrak{a}$ von der Ziffer $\mathfrak{b}$ verschieden ist. Und eine Bedingung oder eine Annahme ist nur dann finit, wenn sie eine anschau-

lich bestimmte Konstellation oder Operation bzw. das Ergebnis anschaulich bestimmter Operationen zum Inhalt hat. Hiernach ist z. B. die Annahme, dass der grosse | Fermatsche Satz zutreffe, nicht finit, wohl aber die Annah- 6
me, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{n}$ seien positive ganze Zahlen (Ziffern), $\mathfrak{n} > 2$ und $\mathfrak{a}^{\mathfrak{n}} + \mathfrak{b}^{\mathfrak{n}} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{n}}$, – also die Annahme, dass die Zahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{n}$ ein Gegenbeispiel gegen den grossen Fermatschen Satz bilden. Ferner: die Annahme der Ableitbarkeit dieses Satzes durch den zahlentheoretischen Formalismus ist finit in dem Sinne, dass eine Formelfigur von den Eigenschaften einer Ableitung im zahlentheoretischen Formalismus mit einer den grossen Fermatschen Satz darstellenden Endformel als vorliegend angenommen wird; dagegen die Annahme, dass irgend ein inhaltlich bündiger Beweis des grossen Fermatschen Satzes vorgelegt sei, ist nicht finit.

[11] Beim Intuitionismus lassen sich die Negationen, und damit insbesondere die Negationen von Allaussagen, freilich eliminieren. Man kann, unter Auszeichnung einer bestimmten falschen Aussage von elementarer Form, etwa $0 = 1$, die Negation $\overline{\mathfrak{A}}$ einer Aussage $\mathfrak{A}$ interpretieren durch $\mathfrak{A} \rightarrow 0 = 1$ („die Annahme, dass $\mathfrak{A}$, führt auf $0 = 1$"). Durch diese Interpretation gehen die mit Verwendung der Negation erfolgenden intuitionistischen Schlüsse wieder in intuitionistisch zulässige Schlüsse über. | 7

[12] Die auf diese Art vollziehbare Ausschaltung der Negation ist aber insofern nur eine scheinbare, als wir dadurch genötigt werden, mit irrealen Bedingungssätzen zu operieren. $_a$Das heisst$_a$ es treten Implikationen $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ auf, die in einem irrealen Sinne zu deuten sind: „wäre $\mathfrak{A}$, so würde $\mathfrak{B}$ folgen". Und zwar werden solche indirekten Argumentationen nicht nur für elementare Aussagen $\mathfrak{A}$ gebraucht – für solche sind sie auch im finiten Schliessen zulässig – sondern wesentlich auch für Allsätze sowie für Implikationen mit Allsätzen als Vordergliedern und auch noch logisch komplizierteren Sätzen.[a]

[13] Es bleibt jedenfalls die Anwendung des Begriffs der „Absurdität" auf

[a]This sentence is ambigious, for it it not clear what the phrase "logisch komplizierteren Sätzen" exactly refers to. If the indended meaning was,

> A) it holds for general sentences and for implications with general or logically even more complex sentences as premisses,

then one has to add the words "als Vordergliedern" at the end of the otherwise elliptic sentence. But if the indended meaning was,

> B) it holds for general sentences, for implications with general sentences as premisses, and for sentences logically even more complex than implications,

then one has to correct the grammatical case and read "logisch kompliziertere Sätze." Our translation follows reading A).

beliebige Aussagen als wesentliches Hilfsmittel der intuitionistischen Überlegungen.

[14] Nun erhebt sich, in Anbetracht des Umstandes, dass der finite Standpunkt sich als zu eng für die Beweistheorie erwiesen hat, die Frage: Ist es erforderlich, die gesamte methodische Voraussetzung des Intuitionismus zu übernehmen?

[15] Wir können zurzeit wenigstens eine partielle Antwort auf diese Frage ge-
8 ben. Nämlich für den | zahlentheoretischen Formalismus hat Gentzen einen Nachweis der Widerspruchsfreiheit erbracht, dessen methodische Erfordernisse eine Art von Zwischenglied zwischen dem finiten Standpunkt und dem des Intuitionismus bilden.

[16] Es empfiehlt sich, die neuere von Gentzen gegebene Fassung seines Beweises zugrunde zu legen, die gegenüber der zuerst erschienenen nicht nur den Vorzug hat, dass hier der Beweisgedanke durchsichtig gemacht ist, sondern auch denjenigen, dass gewisse bei dem früheren Beweise noch vorhandene methodische Komplikationen wegfallen.

[17] Kürzlich ist der neuere Gentzensche Beweis von Kalmár noch vereinfacht worden, wobei sich insbesondere zeigte, dass die von Gentzen benutzte Transformation des zahlentheoretischen Formalismus in einen gewissen ihm äquivalenten Kalkul entbehrlich ist.

[18] Es sei hier kurz das logische Schema des Gentzenschen Widerspruchsfreiheitsbeweises, im Hinblick auf die Art der Überschreitung des finiten Standpunktes, skizziert – (mit gewissen unerheblichen Abweichungen von der Gentzenschen Darstellung).

[19] Aufgrund einer schon bei den früheren Widerspruchsfreiheitsbeweisen benutzten Bemerkung ist die Behauptung der Widerspruchsfreiheit des zahlen-
9 theoretischen Formalismus gleichbedeutend mit derjenigen, | dass in diesem Formalismus die Formel $0 = 1$ – bezeichen wir sie mit „$\mathfrak{f}$“ – nicht ableitbar ist, dass also jede Ableitung in diesem Formalismus eine von $\mathfrak{f}$ verschiedene Endformel hat.

[20] Mit Bezug auf solche Ableitungen, in denen weder die vollstndige Induktion noch die Regeln für „alle“ und „es gibt“ angewandt werden, – wir wollen sie kurz „elementare Ableitungen“ nennen – lässt sich unsere Behauptung auf einem direkten Wege als zutreffend erkennen.

[21] Für den allgemeinen Nachweis werden „Ordnungszahlen“ aus einem Bereich von Zahlen der Cantorschen ersten und zweiten Zahlenklasse (es sind diejenigen unterhalb der ersten Cantorschen ϵ-Zahl) verwendet. Die Einführung kann auf independente Art geschehen, d. h. ohne Bezugnahme auf die

Cantorsche Theorie: die betreffenden Ordnungszahlen lassen sich als gewisse (endliche) Figuren charakterisieren, für die sich in anschaulicher Weise eine Beziehung „kleiner“ mit den Eigenschaften einer Ordnungsbeziehung so definieren lässt, dass für zwei verschiedene Ordinalzahlen sich stets entscheiden lässt, welche von beiden die kleinere ist.

[22] Es wird nun jeder Ableitung aus dem zahlentheoretischen Formalismus
durch eine einfache Berechnungsvorschrift | eine Ordnungszahl beigelegt. 10
Aufgrund dieser Zuordnung lässt sich zu jeder nicht elementaren Ableitung eine solche von kleinerer Ordnungszahl bestimmen, welche die gleiche Endformel besitzt. Daraus ergibt sich: wenn jede Ableitung, deren Ordnungszahl kleiner ist als eine gewisse Ordnungszahl α, eine von $\mathfrak{f}$ verschiedene Endformel hat, dann gilt das gleiche für jede Ableitung von der Ordnungszahl α.

[23] Bis hierher erfolgt der Beweis im Rahmen finiter Betrachtungen. Um nun von der erhaltenen Konsequenz zu dem Ergebnis zu gelangen, dass überhaupt jede Ableitung im zahlentheoretischen Formalismus eine von $\mathfrak{f}$ verschiedene Endformel hat – was ja die zu beweisende Behauptung ist –, bedarf es noch der Rechtfertigung der folgenden Schlussweise: „Wenn eine Aussage $\mathfrak{B}(\alpha)$ über eine Ordnungszahl α für 0 (die kleinste der Ordnungszahlen) zutrifft und wenn sich zu jeder Ordnungszahl α eine kleinere Ordnungszahl β so bestimmen lässt, dass, sofern $\mathfrak{B}(\beta)$ zutrifft, auch $\mathfrak{B}(\alpha)$ zutrifft, so trifft $\mathfrak{B}(\alpha)$ für jede Ordnungszahl α zu“. Diese Schlussweise wiederum wird entnommen aus dem Prinzip: „Wenn eine Aussage $\mathfrak{B}(\alpha)$ über eine Ordnungszahl α auf 0 zutrifft und wenn sie auf die Ordnungszahl α zutrifft, sofern sie auf jede
kleinere Ordnungszahl | zutrifft, so trifft sie auf jede Ordnungszahl zu.“ 11

[24] Dieses Schlussprinzip ist eine Art der Verallgemeinerung der vollständigen Induktion. In der Mengenlehre wird eine solche verallgemeinerte Induktion, da sie sich auf transfinite Ordnungszahlen erstreckt, als „transfinite Induktion“ bezeichnet. Diese Bezeichnung ist jedoch für unsere Betrachtung ungeeignet, weil wir ja das Wort „finit“ in einem methodischen Sinne verwenden und der Unterschied von gewöhnlicher Induktion (Schluss von n auf $n+1$) und transfiniter Induktion keineswegs mit demjenigen von finiter und nichtfiniter Schlussweise zusammenfällt. Eine gewöhnliche Induktion ist im allgemeinen nur dann finit, wenn das Prädikat, um dessen Zutreffen auf eine Zahl es sich dabei handelt, ein elementares ist. Andererseits gibt es transfinite Induktionen (im Sinne der üblichen Terminologie) die noch durchaus finiten Charakter haben.

[25] Hier handelt es sich für uns nicht sowohl um eine scharfe Fixierung der Grenze, bis zu der die finiten Induktionen reichen, als vielmehr darum, uns

vom anschaulichen Standpunkt klarzumachen, worauf die Berechtigung des betrachteten Schlussprinzips beruht und inwiefern dieses eine sachgemässe
12 Verallgemeinerung der gewöhnlichen Induktion bildet. | Vergegenwärtigen wir uns, wie die finite Motivierung der gewöhnlichen Induktion erfolgt: Wir haben die Voraussetzung, dass $\mathfrak{A}(0)$ gilt und dass wir von $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ auf $\mathfrak{A}(\mathfrak{n}+1)$ schliessen können. Da wir von 0 aus durch wiederholtes Fortschreiten um 1 zu jeder endlichen Zahl gelangen können, so können wir auch von $\mathfrak{A}(0)$ bis zu jeder endlichen Zahl n hin auf $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ schliessen.

[26] Nun ist die Ordnung der betrachteten Ordnungszahlen derjenigen in der gewöhnlichen Zahlenreihe insofern analog, als sie auch die Eigenschaft der Wohlordnung besitzt, dass auf jedes Anfangsstück ein unmittelbar nächstes Element folgt, und zwar lässt sich der Ordnungstypus dieser Wohlordnung in einer rekursiven Weise auf die natürliche Ordnung der Zahlenreihe zurückführen. Hierdurch wird eine Art von anschaulicher „Durchlaufung" ermöglicht. In der Cantorschen Mengenlehre wird mit Bezug hierauf von einem „Hinüber-
13 zählen über das Unendliche" gesprochen. |

[27] Dieses Hinüberzählen über das Unendliche bedeutet nicht etwa ein Operieren mit der Vorstellung eines Aktual-Unendlichen sondern den Übergang von einem Fortschreitungsprozess zu seiner metamathematischen Betrachtung in der Art, wie er bereits bei der gewöhnlichen Induktion stattfindet, mit der wir über die Gewinnung der einzelnen Aussagen $\mathfrak{A}(0)$, $\mathfrak{A}(1)$, $\mathfrak{A}(2)$, ... hinausgehen durch die generelle metamathematische Feststellung, dass wir für jede Zahl $\mathfrak{n}$ zu der Aussage $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$ gelangen können.

[28] Bei der Durchlaufung des zu betrachtenden Wohlordnungstypus treten Induktionen überlagert auf, das heisst wir gewinnen aus der gewöhnlichen Induktion höhere Induktionen, indem wir auf die Prozesse der Iteration von Induktionen die metamathematische Betrachtung anwenden. Dieser
14 Überlagerung von Induktionen entspricht nun | in der logischen Ausdrucksform eine Überlagerung von hypothetischen Sätzen, in denen Allsätze als Vorderglied auftreten. Dabei handelt es sich jedoch stets um solche Allsätze, die an Hand der Überlegung sich als erfüllt erweisen, sodass die hypothetische Form hier den Sinn der Vorwegnahme einer Etappe in einem progressiven Folgerungsprozess hat.

[29] Die Verwendung des betrachteten Prinzips der transfiniten Induktion bedeutet hiernach eine Erweiterung des methodischen Rahmens der Beweistheorie, wenn auch nicht ein volles Übernehmen der intuitionistischen Schlussweisen. Das Verfahren dieser Erweiterung ist auch verallgemeinerungsfähig; denn es besteht die Möglichkeit, noch für höhere Wohlordnungstypen als

den in dem Gentzenschen Widerspruchsfreiheitsbeweis benutzten (der Ordnungszahlen unterhalb der ersten Cantorschen ϵ-Zahl) die „Durchlaufung“ anschaulich zu beherrschen und damit das auf den Wohlordnungstypus bezügliche Prinzip der transfiniten Induktion anschaulich zu rechtfertigen.

[30] Ob ein derartiges höheres Induktionsprinzip als zusätzliches (d. h. zu den finiten Methoden hinzutretendes) Hilfsmittel für einen Nachweis der Widerspruchsfreiheit[b] der Analysis ausreicht, lässt sich zurzeit noch nicht beurteilen.| 15

[31] Nach dem allgemeinen Gödelschen Theorem über formal unableitbare Sätze müsste das betreffende Induktionsprinzip – welches sich jedenfalls als Satz über eine gewisse Wohlordnung der gewöhnlichen Zahlen aussprechen liesse – so beschaffen sein, dass sein Beweis nicht im Rahmen der Analysis formalisierbar ist. Es scheint zunächst unmöglich, dass dieser Bedingung genügt werden könnte; denn die allgemeine Theorie der Wohlordnungen der Zahlenreihe einschliesslich des allgemeinen Satzes von der transfiniten Induktion lässt sich im Formalismus der Analysis entwickeln. Jedoch ist zu bedenken, dass der allgemeine Satz von der transfiniten Induktion noch nichts darüber besagt, ob eine bestimmte definierte Ordnung der Zahlenreihe eine Wohlordnung ist; und auf eine solche Feststellung könnte das betreffende höhere Induktionsprinzip hinauskommen. –

[32] Jedenfalls erscheint es angesichts dieser Erwägungen nicht als tunlich, den methodischen Rahmen für die beweistheoretischen Untersuchungen von vornherein festzulegen. Die Erwartung, dass der finite Standpunkt (im ursprünglichen Sinn)[c] für die gesamte Beweistheorie ausreichen werde, ist durch den Umstand erweckt worden, dass die Probleme der Beweistheorie | sich 16
von diesem Standpunkt aus schon formulieren lassen. Es besteht jedoch keine einfache Beziehung zwischen der Darstellbarkeit und der Beweisbarkeit von Sätzen und daher auch nicht zwischen der Formulierbarkeit und der Lösbarkeit von Problemen.

[33] Nun erhebt sich aber die Frage, was denn das Charakteristische der methodischen Beschränkung der Beweistheorie sein soll, wenn es nicht in der Forderung jener elementaren Evidenz besteht, durch die der finite Standpunkt gekennzeichnet ist. Hierauf ist zu erwidern, dass die Tendenz der

[b] The qualification „der Widerspruchsfreiheit“ (the consistency) is a later addition to the manuscript in Gabelsberger shorthand.

[c] This remark in parenthesis is a later addition to the manuscript in Gabelsberger shorthand.

methodischen Beschränkung grundsätzlich dieselbe bleibt, nur dass wir – wenn wir uns die Möglichkeit von Erweiterungen des methodischen Rahmens offen halten wollen – vermeiden müssen, die Begriffe der Evidenz und der Sicherheit in einem zu absoluten Sinne zu gebrauchen. Damit gewinnen wir andrerseits den grundsätzlichen Vorteil, dass wir nicht genötigt sind, die üblichen Methoden der Analysis als ungerechtfertigt oder bedenklich zu problematisieren.

[34] Das allgemein Kennzeichnende der methodischen Einstellung der Hilbertschen Beweistheorie ist darin zu erblicken, dass hier auf das Einhalten einer im strengen Sinne arithmetischen Betrachtungsweise Wert gelegt wird,
17 während die üblichen Methoden der Analysis und Mengenlehre zu | einem wesentlichen Teil von geometrischen Vorstellungen, insbesondere der Punkt-Mannigfaltigkeit, inspiriert sind und aus diesen ihre Überzeugungskraft entnehmen. In der Tat kann man sagen – und das ist wohl auch das Hauptsächliche an der finitistischen und intuitionistischen Kritik des üblichen Verfahrens der Mathematik –, dass in der Analysis und Mengenlehre die Arithmetisierung der Geometrie keine restlose ist.

[35] Die methodische Richtung der Hilbertschen Beweistheorie kann dazu beitragen, dass die spezifisch arithmetische Denkweise stärker zur Entwicklung gelangt und dass die Stufen der arithmetischen Begriffsbildung deutlicher hervortreten.

[36] Im übrigen ist inbetreff der Leistungen der Beweistheorie hervorzuheben, dass die Nachweise der Widerspruchsfreiheit für den zahlentheoretischen Formalismus keineswegs die einzigen Fortschritte bilden, welche die metamathematische Untersuchung in den letzten Jahren aufzuweisen hat. Insbesondere sind in den Fragen der Entscheidbarkeit von Problemen und der effektiven Berechenbarkeit von Funktionen durch die Untersuchungen von Gödel, Church, Turing, Kleene und Rosser sehr prägnante Ergebnisse erzielt worden. Die Metamathematik steht heute bereits so da, dass ihre Würdigung unabhängig ist von der Stellungnahme zu den philosophischen Fragen der Grundlagenforschung. –

Kapitel 15

Bernays Project: Text No. 16

Sur les questions méthodologiques actuelles de la théorie hilbertienne de la démonstration (1938/1941)

Über die aktuelle Methodenfrage der Hilbertschen Beweistheorie

(*Les entretiens de Zürich sur le fondements et la méthode des sciences mathématiques, 6–9 décembre 1938*, ed. F. Gonseth, Zürich: Leemann & Co. (1941), S. 144–152)

---

144 [1] | Mon rapport sur la situation actuelle de la théorie hilbertienne de la démonstration s'accompagne de certaines observations de principe. Tout d'abord, il me faut remarquer que les vues exposées ci-dessous ne doivent pas être envisagées comme représentant simplement la position de l'école hilberienne quant à la situation actuelle. [2] La nécessité d'entrer dans certaines considérations méthodologiques en liaison même avec l'éxposé de l'état actuel de la théorie de la démonstration ressort de cet état lui-même.

Comme vous le savez, la théorie de la démonstration vient de passer par une sorte de crise, et plusieurs en ont pris déjà prétexte pour déclarer que l'enterprise hilbertienne avait échouté. Cette opinion s'explique du fait que le programme proposé par Hilbert pour la théorie de la démonstration, et exposé dans ses publications de 1922–1927, a besoin, selon toute apparence,

d'être révisé ; la révision portant avant tout sur les fondements méthodiques.
[3] En termes techniques, il s'agit de ceci : Pour les raisonnements méta-mathématique, on a besoin de moyens plus forts que ceux auxquels Hilbert envisageait tout d'abord de se restreindre, dans le sens de la « finite Einstellung » (pensée finie). Le besoin d'un tel élargissement des méthodes se fit déjà sentir à propos du problème – qu'on croyait avoir déjà élucidé – de la non-contradiction du formalisme arithmétique intégral. [4] A ce propos, il se révéla que le point de vue finitiste de Hilbert n'est pas équivalent, comme il avait paru tout d'abord, au point de vue intuitionniste de Brouwer. Gödel a pu montrer que, dans le domaine de la théorie des nombres entiers, tous les raisonnements classiques peuvent | être transformés en raisonnements 145
admis par l'intuitionnisme, à l'aide d'une nouvelle interprétation relativement simple. Ainsi donc, la non-contradiction de la théorie des nombres entiers résulte sans autre $_a$**condition**$_a$ du point de vue intuitionniste, moyennant cette interprétation.
[5] Par formalisme arithmétique (ou théorie des nombres entiers) nous entendons le système de déduction formelle qu'on obtinent, à partir du calcul logique du 1$^{\text{er}}$ ordre (calcul des prédicats, ou aussi « engerer Funktionenkalkül ») en lui adjoignant :

a) les axioms de l'égalité ;

b) les axiomes arithmétiques

$$a' \neq 0, \quad a' = b' \;\rightarrow\; a = b$$

(où a' représente le nombre venant immédiatement après a)

c) le schéma de l'induction complète ;

d) les définitions récurrentes élémentaires.

(La notion du « plus petit nombre ayant une certaine propriété », qui intervient dans les déductions arithmétiques peut être écartée des recherches sur la non-contradiction, par le procédé de l'élimination des termes tels que : celui qui ...)
[6] Ce calcul dépasse déjà les moyens absolument nécessaires pour formaliser l'arithmétique des entiers. En effect, il suffit, dans ce but, comme Skolem l'a montré le premier, d'un formalisme plus restreint de l'« arithmétique récurrente », qui est encore susceptible d'une interprétation directe finiste.
[7] Le formalisme dont nous parlons ici se distingue de l'arithmétique récurrente et aussi de l'arithmetique intuitionniste par l'emploi inconditionnel des notions « tous » et « il existe ».
[8] Cependant, dans le domaine des raisonnements qui se laissent représenter dans le formalisme arithmétique, l'accord peut s'établir entre les partisans

des mathématiques classiques, qui considèrent tous ces raisonnements comme légitimes, et les intuitionnistes qui ne reconnaissent pas généralement le principe du tiers exclu : Les premiers n'auront qu'à déclarer : Une proposition telle que « Il y a un x possédant la propriété A » ne doit être qu'une variante de la seconde proposition que voici : « La négation de A ne vaut certainement
146 pas pour tous les x« . Et de même, une pro|position de la forme « A ou B » ne doit être qu'une variante de la proposition « non-A et non-B ne subsistent pas simultanément ».

Avec cette interprétation du jugement existentiel et de la disjonction, l'intuitionniste doit admettre comme légitimes tous les raisonnements du domaine sus-indiqué des mathématiques classiques, tout au moins s'il accepte les régles systématiques du raisonnement intuitionniste indiquées par Heyting.

[9] La constatation d'un rapport aussi intime entre les raisonnements de l'arithmétique intuitionniste et ceux de l'arithmétique classique permet d'abord de conclure immédiatement à la non-contradiction du formalisme arithmétique ordinaire du point de vue de l'intuitionnisme. On voit en même temps qu'il existe une différence essentielle entre les points de vue intuitionniste et finitiste. En particulier, on remarquera la différence suivante concernant les propositions générales : Tandis que l'intuitionnisme se borne à contester l'application du teirs exclu à de pareilles propositions, la méthode finitiste évite par principe la négation de toute proposition générale, de même que son emploi comme antécédent dans une proposition hypothétique.

[10] Du point de vue finiste, la négation d'une proposition n'a de sens que si elle équivaut à une proposition affirmative. Ainsi par exemple, la proposition négative que voici : Le chiffre a n'est pas identique au chiffre b, signifie la même chose que la proposition affirmative : « Le chiffre a est différent du chiffre b ». Et de même, une condition ou une hypothèse n'est à considérer comme finie que si elle est relative à une configuration ou à une opération intuitivement données ou aussi au résultat d'une opération de ce genre. Ainsi par exemple, la supposition que le (grand) théorème de Fermat est vrai, n'est pas finie ; en revanche, la supposition que a, b, c, n soient quatre chiffres tels que $n > 2$ et $a^n + b^n = c^n$ – en un mot, la supposition que les quatre chiffres, a, b, c, n fournissent un contre-exemple pour le théorème de Fermat – est finie. Ou bien encore : L'hypothèse de la déductibilité de ce même théorème au moyen du formalisme arithmétique est finie en ce sens que l'on imaginerait donnée une figure de formules ayant les propriétés d'une déduction formelle dans le formalisme arithmétique dont la formule terminale représenterait le

théorème de Fermat. En re|vanche, la supposition que l'on aurait simplement 147
donné quelque démonstration convaincante du grand théorème der Fermat n'est pas finie.

[11] Il est vrai que les négations et par conséquent les négations de propositions générales peuvent être éliminées des raisonnements intuitionnistes. En distinguant arbitrairement une proposition élémentaire fausse, par exemple $0 = 1$, on peut interpréter la négation $\overline{A}$ d'une proposition A par l'implication $A \rightarrow 0 = 1$. (L'hypothèse A a pour conséquence $0 = 1$.)

Moyennant cette interprétation, les raisonnements intuitionnistes employant la négation se transforment en de nouveaux raisonnements égalment recevables du point de vue intuitionniste et ne contenant plus de négation. [12] Mais l'élimination de la négation ainsi obtenue n'est qu'apparente, car on se voit obligé d'introduire des hypothèses irréelles. En d'autres termes, il s'introduit des implications $A \rightarrow B$, qui sont à interpréter dans un sens irréel imaginaire : à supposer que A fût, B s'ensuivrait.

Il est à remarquer que cette argumentation indirecte s'impose non seulement pour des propositions élémentaires A, auquel cas cette argumentation serait aussi admissible du point de vue intuituionniste, elle s'introduit au contraire aussi pour des propositions générales, pour des implications avec des propositions générales comme antécédents, et même pour des propositions de forme encore plus compliquée.

[13] En tous cas, l'usage de la notion d'« absurdité » relativement à des propositions de forme quelconque subsiste comme moyen spécifique des raisonnements intuitionnistes.

[14] Considération prise du fait que le point de vue finiste s'est révélé trop étroit pour les besoins de la métamathématique, la question suivante se poserait maintenant : Est-il nécessaire de reprendre toutes les suppositions méthodiques de l'intuitionnisme au compte de la théorie de la démonstration ?

[15] Pour l'instant, nous répondrons au moins partiellement à cette question. En effet, pour le formalisme arithmétique, Gentzen a fourni une démonstration de non-contradiction dont les suppositions méthodiques représentent un terme intermédiaire entre le | point de vue finitiste et l'intuitionnisme. [16] Il est 148
bon de se rapporter ici à la seconde démonstration de Gentzen, qui se recommande non seulement par la mise en évidence de l'idée directrice, mais aussi par l'exclusion de certains moyens méthodiques compliqués. [17] Récemment cette deuxième demonstration de Gentzen a encore été simplifiée par Kalmár qui montra en même temps que la transformation du formalisme arithmétique auquel Gentzen avait eu recours n'est pas nécessaire pour ce but. [18] Pour

faire voir de quelle façon Gentzen dépasse les méthodes finies, nous allons indiquer le schéma logique de sa démonstration (avec quelques petites variations).

[19] En vertu d'une remarque déjà employée dans les démonstrations antérieures de non-contradiction, affirmer la non-contradiction du formalisme arithmétique revient à affirmer la non-déductibilité de la formule $0 = 1$, – désignons-la par F –, c'est-à-dire à affirmer que toute déduction dans ce formalisme a une formule terminale différente de F. [20] Si l'on se borne à des déductions où n'interviennent ni l'induction complète, ni les règles relatives à « tous » et « il existe », – nous les nommerons des déductions élémentaires, – on peut s'en rendre compte de façon directe.

[21] Pour la démonstration générale, Gentzen fait intervenir des nombres ordinaux appartenant à un certain segment des deux premières classes cantoriennes (plus précisément le segment antérieur au premier ϵ de Cantor). L'introduction de ces nombres peut d'ailleurs se faire de façon indépendante, sans avoir recours à la théorie de Cantor : ils peuvent être caratérisés comme étant certaines figures (finies) pour lesquelles une relation « plus petit » ou « plus grand », ayant les propriétés d'une relation d'ordre, peut être intuitivement définie, – et de telle façon que pour deux nombres ordinaux différents on puisse toujours décider lequel des deux est le plus grand.

[22] On assigne alors, par un simple procédé progressif, à chaque déduction appartenant au formalisme arithmétique un de ces nombres ordinaux, et l'on peut maintenant, pour toute déduction non-élémentaire, passer à une déduction possédant la même formule terminale et à laquelle est attribuée un nombre ordinal plus petit. La conséquence en est la suivante : Si
149 toute déduction possé|dant un ordinal inférieur à α a une formule terminale différente de F, il en est de même pour toute déduction d'ordinal α.

[23] Jusqu'ici, la démonstration ne sort pas des limites du point de vue finitiste.

Pour parvenir maintenant de cette conséquence au résultat que toute déduction du formalisme arithmétique possède une formule terminale différente de F – ce qui est précisément le fait à démontrer – il est encore nécessaire de justifier le principe de raisonnement suivant :

« Si une propriété $B(\alpha)$ relative à un ordinal α est d'abord valable pour 0 (le plus petit des α) et si elle est valable pour α pourvu qu'elle le soit pour les ordininaux antérieurs, alors elle est valable pour tous les α. »

[24] Ce principe est une sorte de généralisation de l'induction complète. Dans la théorie des ensembles, un principe d'induction de ce genre est appelé prin-

cipe d'induction transfinie puisqu'il s'étend à des nombres transfinis. Cependant pour nos besoins, cette expression n'est pas appropriée, car nous employons le mot « fini » dans un certain sens méthodique qui est tel que la différence entre induction ordinaire (passage de n à $n+1$) et induction transfinie ne coïncide aucunement avec la différence entre raisonnement fini et non-fini.

D'une part, il se peut qu'une induction complète ordinaire ne soit pas finie dans notre sens, si la propriété dont il est question pour un n a une structure logique compliquée. Et d'autre part, il existe des inductions transfinies au sens usuel qui ont encore le caractère d'un raisonnement fini.

[25] Il s'agit ici pour nous moins de fixer les limites exactes jusqu'où l'induction possède un caractère fini que de nous rendre compte intuitivement, en quoi consiste la légimitité du principe de raisonnement énoncé plus haut, et pourquoi il représente une généralisation appropriée de l'induction ordinaire.

Rappelons-nous comment on justifie l'induction ordinaire, du point de vue intuitif : On fait la supposition que A vaut pour 0, et que nous pouvons conclure de n à $n+1$. Alors, de la même | façon que nous pouvons parvenir 150
à un entier n quelconque par une simple répétition de la progression d'une unité, nous pouvons conclure de $A(0)$ à $A(n)$.

[26] Or le type d'ordre des ordinaux considérés est analogue à celui de la suite naturelle des entiers en ce qu'il possède aussi la propriété du bon ordre : après chaque segment vient un élément qui le suit immédiatement. De plus le type de ce bon ordre peut être réduit de manière récurrente au type de la suite naturelle des entiers. De cette façon il devient possible de « parcourir » en quelque sorte tout segment du type d'ordre considéré. C'est dans ce sens qu'on parle, dans la théorie cantorienne des ensembles, d'une numérotation au delà de l'infini.

[27] Cette numérotation transfinie ne doit pas être comprise comme exigeant, pour être effectuable, une représentation intuitive d'un infini actuel. Ce dont il s'agit, c'est du passage d'un processus progressif à sa conception métamathématique, de façon analogue à ce qui passe déjà dans l'induction complète, lorsque nous dépassons la constatation progressive des propositions particulières $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$, ... par la constatation générale métamathématique que nous pouvons parvenir à $A(n)$ pour tout n.

[28] La différence avec l'induction complète ordinaire consiste, dans le cas du type d'ordre envisagé, dans le fait que des induction superposées interviennent, c'est-à-dire que l'on obtient des inductions supérieures à partir de l'induction ordinaire en appliquant les considérations métamathémati-

ques susindiquées même aux procédés d'iteration des inductions. En termes de logique, cette superposition d'inductions s'exprime par une superposition de propositions hypothétiques dans lesquelles des propositions générales (Allsätze) interviennent comme antécédents. Ces propositions générales – remarquons-le – sont toujours des propositions qui trouvent leur confirmation dans l'aboutissement même du raisonnement ; la forme hypothétique de ces propositions a donc la signification de l'anticipation d'une étape dans un processus progressif.

[29] En définitive, l'emploi de l'induction transfinie revient à un certain élar-
151 gissement du cadre méthodique de la théorie de la | démonstration, mais non à une acceptation entière des raisonnement intuitionnistes.

Ce procédé d'élargissement est lui-même, en principe, susceptible d'être généralisé, car il est possible de s'élever aussi à la conception intuitive de types ordinaux plus élevés que celui dont Gentzen se sert (le premier ϵ de Cantor) et de justifier intuitivement le principe correspondant d'induction transfinie.

[30] Pour l'instant, il est impossible de juger si l'adjonction d'un principe d'induction supérieur de ce genre aux méthodes finitistes pourra fournir les moyens suffisants pour une démonstration de non-contradiction de l'analyse. [31] D'après le théorème général de Gödel sur les propositions non formellement déductibles, le principe d'induction en question – qui, dans tous les cas pourrait être formulé comme un théorème sur un certain bon ordre de la suite naturelle des entiers – devrait être tel que sa déduction ne pût être effectuée dans le cadre de l'analyse formalisée.

Tout d'abord il semble impossible de satisfaire à cette exigence : car la théorie générale du bon ordre de la suite naturelle, y compris le théorème général de l'induction transfinie, peut être établie au sein d'un formalisme assez naturel de l'analyse. Cependant, il faut se rappeler que le théorème général de l'induction transfinie ne décide pas encore si un ordre proposé de la suite des entiers est aussi un bon ordre ; or le principe d'induction supérieur en question pourrait justement revenir à une telle affirmation.

[32] De toutes façons, et compte tenu des considérations précédentes, il ne paraît pas indiqué de délimiter *a priori* le cadre méthodique pour les recherches métamathématiques. L'espoir que le point de vue finitiste (dans son sens originel) pourrait suffir pour tout la théorie de la démonstration, fut suscité par le fait que les problèmes relatifs à cette théorie peuvent être énoncés déjà de ce point de vue. Mais il n'y a pas de relation générale simple entre la possibilité d'énoncer et celle de démontrer une proposition, et par conséquent

non plus entre la formulation et la résolution d'un problème. | 152

[33] Maintenant la question se pose de savoir quel est le caractère de la limitation méthodique des moyens de la théorie de la démonstration, si cette dernière ne consiste pas dans l'exigence de l'évidence élémentaire, qui distingue le point de vue finitiste. La réponse est la suivante: La tendance de la limitation méthodique reste au fond la même ; cependant il ne faut pas concevoir l'évidence et la sûreté de façon trop absolue, si l'on veut conserver ouverte la possibilité d'élargir le cadre méthodique. D'autre part, en procédant ainsi, on s'assure l'avantage de ne pas être obligé de déclarer illégitimes ou douteuses les méthodes traditionelles de l'analyse.

[34] Le caractère spécifique du point de vue hilbertienne doit être aperçu en ceci: on s'attache à ne pas sortir d'un mode de raisonnement arithmétique au sens strict, tandis que les méthodes habituelles de l'analyse et de la théorie des ensembles s'inspirent pour une part essentielle, d'idées géométriques et en tirent leur force d'évidence. En effet, on peut dire – et c'est sûrement l'essentiel des critiques finitistes et intuitionnistes des méthodes usuelles en mathématiques – que l'arithmétisation de la géometrie, dans l'analyse et la théorie des ensembles, n'est pas intégrale.

[35] La tendance méthodique de la théorie hilbertienne de la démonstration peut contribuer à développer et à mieux faire valoir la pensée spécifiquement arithmétique et à faire mieux apparaître les étapes des démarches arithmétiques.

[36] Par ailleurs, dans le jugement porté sur les résultats de la théorie de la démonstration, il faut relever que les démonstrations de la non-contradiction du formalisme arithmétique ne représentent aucunement les seuls progrès réalisés par les recherches métamathématiques dans les dernières années. En particulier, dans les problèmes de la décidabilité et de la caculabilité effective, des résultats très remarquables ont été obtenus par les travaux de Gödel, Church, Turing, Kleene et Rosser.

La métamathématique a d'ores et déjà une signification telle que son importance peut être appréciée indépendamment de toute doctrine philosophique sur les fondements.

Chapter 16

Bernays Project: Text No. 17

Zur Einführung†
(1939)

Introduction

(*Grundlagen der Mathematik*, Bd. 2, Berlin: Springer, S. vi–ix)

---

vi | Das vorliegende Buch soll einer eingehenden Orientierung über den gegenwärtigen Stoff der Hilbertschen Beweistheorie dienen. Wenngleich das bisher hier Erreichte gemessen an den Zielen der Theorie sehr bescheiden ist, so liegt doch ein reichlicher Stoff an prägnanten Ergebnissen, an Gesichtspunkten und Beweisgedanken vor, die zur Kenntnis zu bringen als lohnend erscheint.

Für die inhaltliche Gestaltung dieses zweiten Bandes waren durch den Zweck des Buches zwei Hauptthemata vorgezeichnet. – Es handelte sich einmal darum, die hauptsächlichen, an das ε-Symbol sich knüpfenden beweistheoretischen Ansätze Hilberts und ihre Durchführung zur eingehenden Darstellung zu bringen.

Die hier vorliegenden Untersuchungen haben zum erheblichen Teil bisher überhaupt noch keine über bloße Andeutungen hinausgehende Publikation

†Two lines at the end of the text date the text and identify its author:
Zürich, im Februar 1939 Paul Bernays

gefunden, und es besteht daher abgesehen von dem gegenständlichen Interesse auch eine wissenschaftliche Verpflichtung von Seiten der Hilbertschen Schule, die verschiedenen erfolgten Ankündigungen über das Vorhandensein von Beweisen durch das wirkliche Vorführen dieser Beweise zu rechtfertigen – ein Erfordernis, welches in diesem Fall um so dringlicher ist, als man sich anfangs (noch bis zum Jahre 1930) über die Tragweite der Beweise Ackermanns und v. Neumanns, die aus dem einen der genannten Hilbertschen Ansätze hervorgingen, getäuscht hat.

In den §§ 1 und 2 werden nun jene bisher unpublizierten Beweise ausführlich dargelegt, wobei insbesondere auch die Einschränkung, welche hier noch für den Nachweis der Widerspruchsfreiheit des zahlentheoretischen Formalismus besteht, deutlich ersichtlich gemacht wird.

Mit Hilfe der einen von den hier dargelegten Methoden ergibt sich zugleich auch ein einfacher Zugang zu einer Reihe von Theoremen, durch welche die beweistheoretische Untersuchung des Prädikatenkalkuls eine befriedigende Abrundung erhält, und die auch bemerkenswerte Anwendungen auf die Axiomatik gestatten. Im Mittelpunkt dieser Betrachtungen steht ein von J. Herbrand zuerst ausgesprochener und bewiesener Satz der theoretischen Logik, für den wir auf dem genannten Wege einen natürlichen und einfachen Beweis erhalten.

Die Erörterung der Anwendungen dieses Satzes gibt zugleich Gelegenheit zu einigen Ausführungen über das Entscheidungsproblem, und | anknüpfend vii
hieran wird im § 4 eine (bereits im Band I angekündigte) beweistheoretische Verschärfung des Gödelschen Vollständigkeitssatzes bewiesen.

Das zweite Hauptthema bildet die Auseinandersetzung des Sachverhalts, auf Grund dessen sich die Notwendigkeit ergeben hat, den Rahmen der für die Beweistheorie zugelassenen inhaltlichen Schlußweisen gegenüber der vorherigen Abgrenzung des „finiten Standpunktes" zu erweitern. Bei diesen Betrachtungen steht die Gödelsche Entdeckung der deduktiven Unabgeschlossenheit eines jeden scharf abgegrenzten und hinlänglich ausdruckfähigen Formalismus im Mittelpunkt. Die beiden Gödelschen Theoreme, in denen sich dieser Tatbestand ausspricht, werden eingehend erörtert, sowohl was ihre Beziehung zu den semantischen Paradoxien sowie was die Bedingungen ihrer Gültigkeit und die Durchführung des Nachweises – der für das zweite dieser Theoreme bei Gödel nur angedeutet ist – und auch was ihre Anwendbarkeit auf den vollen zahlentheoretischen Formalismus betrifft.

Die Diskussion der Erweiterung des finiten Standpunktes mündet in die Betrachtung des neueren Gentzenschen Widerspruchsfreiheitsbeweises für den zahlentheoretischen Formalismus. Von diesem Beweis ist hier freilich nur das methodisch Neuartige, nämlich die Anwendung einer speziellen Art der Cantorschen „transfiniten Induktion“, zur genaueren Darstellung und Erörterung gebracht.

Daß nicht der ganze Beweis zur Darstellung gelangte, hatte vor allem den äußeren Grund, daß die neuere, erst wirklich durchsichtige Fassung des Gentzenschen Beweises zu Beginn der Drucklegung dieses Bandes noch nicht erschienen war. Der Gentzensche Beweis bezieht sich übrigens nicht unmittelbar auf die in dem Buche behandelte Form des zahlentheoretischen Formalismus. Kürzlich ist es L. Kalmár gelungen, diesen Beweis so zu modifizieren, daß er direkt auf den in unserem Buch (im § 8 des ersten Bandes) entwickelten zahlentheoretischen Formalismus anwendbar ist, wobei sich auch noch gewisse Vereinfachungen ergeben.

Gegenwärtig ist W. Ackermann dabei, seinen früheren (im § 2 des vorliegenden Bandes dargestellten) Widerspruchsfreiheitsbeweis durch Anwendung einer transfiniten Induktion in der Art, wie sie von Gentzen benutzt wird, so auszugestalten, daß er für den vollen zahlentheoretischen Formalismus Gültigkeit erhält.

Wenn dieses gelingt – wofür alle Aussicht besteht –, so wird damit jener ursprüngliche Hilbertsche Ansatz hinsichtlich seiner Wirksamkeit rehabilitiert sein. Jedenfalls kann schon auf Grund des Gentzenschen Beweises die Auffassung vertreten werden, daß das zeitweilige Fiasko der Beweistheorie lediglich durch eine Überspannung der methodischen Anforderung verschuldet war, die man an die Theorie gestellt hat. Freilich die ausschlaggebende
viii Entscheidung über das Schicksal der | Beweistheorie wird erst an Hand der Aufgabe des Nachweises der Widerspruchsfreiheit für die Analysis erfolgen.

Zu dem in den §§ 1–5 des vorliegenden Bandes entwickelten Gedankengang sind noch einige abgesonderte Betrachtungen als „Supplemente“ beigefügt. Zwei von diesen bilden Ergänzungen zu den Ausführungen des § 5: das Supplement II, welches von der Präzisierung des Begriffs der berechenbaren Funktion handelt (die in neuerer Zeit nach verschiedenen Methoden erfolgreich ausgeführt worden ist) und diejenigen Tatsachen aus diesem Fragenkreis vorführt, die sich leicht im Anschluß an die übrigen Ausführungen des Buches entwickeln lassen, wobei als Anwendung auch der Satz von A. Church über die Unmöglichkeit einer allgemeinen Lösung des Entscheidungsproblems für den Prädikatenkalkul gebracht wird; ferner das Supplement III, in welchem einige Fragen der deduktiven Aussagenlogik behandelt werden und das insbesondere auch Ergänzungen zu den im § 3 des ersten Bandes sich finden-den Ausführungen über die „positive Logik“ enthält.

Im Supplement IV werden verschiedene deduktive Formalismen für die Analysis aufgestellt und es wird gezeigt, wie man aus diesen die Theorie der reellen Zahlen und auch die der Zahlen der zweiten Zahlenklasse gewinnt.

Das Supplement I enthält einen Überblick über die Regeln des Prädikatenkalkuls und seiner Anwendung auf formalisierte Axiomensysteme, sowie Bemerkungen über mögliche Modifikationen des Prädikatenkalkuls, ferner auch eine Zusammenstellung verschiedener Begriffsbildungen und Ergebnisse aus dem ersten Band.

In Anbetracht des schon sehr stark angeschwollenen Stoffes sind verschiedene beweistheoretische Themata leider nicht mehr in dem Buch zur Sprache gekommen, so insbesondere das zuerst von Herbrand in seiner Th$_a\underline{\grave{\text{e}}}_a$se[a] und neuerdings eingehender von Arnold Schmidt (*vide* [**?**]) behandelte Thema des mehrsortigen Prädikatenkalkuls.

Auch gewisse von den Betrachtungen, die in den Hilbertschen Vorlesungen und den Besprechungen mit Hilbert vorkamen, die jedoch teils vereinzelte Bemerkungen geblieben sind, teils noch keine hinlängliche Abklärung erfahren haben, sind nicht zur Darstellung gelangt, so insbesondere die Ansätze betreffend die Definitionen von Zahlen der zweiten Zahlenklasse durch gewöhnliche (d. h. nicht transfinite) Rekursionen, sowie diejenigen betreffend die Verwendung von Gattungssymbolen, insbesondere auch von solchen, die durch explizite oder rekursive Definitionen eingeführt werden.

Der vorliegende Band ist in engem Anschluß an den ersten Band abgefaßt worden; auch ist der Zusammenhang mit diesem durch häufige verweisende Seitenangaben verstärkt. Andererseits soll die im Supple|ment I gegebene Zu- ix
sammenstellung von Termini und Sätzen aus dem ersten Band sowie die Rekapitulation im Teil b) aus § 4, Abschnitt 1 dazu dienen, die Lektüre des zweiten Bandes weitgehend von der des ersten Bandes unabhängig zu machen. Ein Leser, der schon etwas mit logischer Formalisierung und mit der Problemstellung der Beweistheorie vertraut ist, wird jedenfalls die Ausführungen des zweiten Bandes auch ohne Kenntnis des ersten verfolgen können.

Jedenfalls sei dem Leser des vorliegenden Bandes empfohlen, daß er vor dem § 1 zuerst das Supplement I ansehe. Ferner möge er von den Seitenverweisungen stets nur dann Gebrauch machen, wenn es ihm in dem betreffenden Zusammenhang ein Bedürfnis ist.

[a] *Vide* [**?**].

Zu dem im § 2 gegebenen Hinweis auf eine mögliche Auslassung bei der Lektüre sei hier noch der weitere hinzugefügt, daß der ziemlich mühsame Abschnitt 2 des § 4 überschlagen werden kann.

Was die Paragraphenangaben betrifft, so beziehen sich die Paragraphennummern 1 bis 5, wenn nichts Besonderes angegeben ist, auf den vorliegenden zweiten Band, während die Paragraphennummern 6 bis 8 nur beim ersten Band vorkommen.

Kapitel 17

Bernays Project: Text No. 18

Gesichtspunkte zum Problem der Evidenz (1946)

Some perspectives on the problem of the evident

(*Synthese* 5, S. 321–326;
repr. in *Abhandlungen*, S. 85–91)

A85 | Die Bedeutsamkeit der Frage der Evidenz für die Philosophie wird kaum bezweifelt. Aber man vergegenwärtigt sich nicht immer die Kompliziertheit der Frage. Die Evidenz wird oft wie eine Eigenschaft betrachtet, die man einfach einem Axiom, einem Prinzip, einer Schlußweise beilegen oder absprechen kann, und das Problem der Evidenz scheint dann lediglich darin zu bestehen, zu entscheiden, wo sich tatsächlich Evidenz vorfindet.

Dieser einfache Aspekt des Problems wird insbesondere hervorgerufen durch die Idee der absoluten Evidenz, zu welcher der empirische Begriff der faktischen Evidenz gesteigert wird.

Da wir uns hier der Einführung einer derartigen Voraussetzung enthalten wollen, so werden wir uns auf die tatsächliche Evidenz beschränken, – mit anderen Worten, wir werden nicht ausgehen von der Idee einer absoluten Wahrheitsgarantie, vielmehr werden wir uns begnügen festzustellen, daß es uns in unseren Urteilen und Überlegungen begegnet, daß wir in einer Überzeugung oder einem Augenschein eine befriedigende Stütze finden oder daß wir einen Ausgangspunkt erhalten durch ein unmittelbares Vorstellen (welches sich manchmal spontan einstellt, in anderen Fällen einer Anstrengung unserer Einbildungskraft bedarf). Der Gegenstand einer derartigen Evidenz kann ein Existenz-Sachverhalt oder eine Beziehung sein. Bekannt sind ja die Unterscheidungen, welche in dieser Hinsicht von Leibniz, Hume und anderen vorgenommen worden sind.

Indem wir dem konkreten Charakter der Evidenz Rechnung tragen, finden wir uns genötigt anzuerkennen, daß die Evidenz, die sich uns in einer geistigen Situation bietet, in Abhängigkeit steht von den impliziten Voraussetzungen, die in einer solchen Situation enthalten sind. Wohlgemerkt: Hiermit soll nicht gesagt sein, daß der Standpunkt beliebig gewählt werden könne. Die geistigen Situationen, um die es sich hier handelt, sind diejenigen, welche die menschliche Erkenntnis durchläuft; und es kann sehr wohl geschehen, daß wir bei der Gewinnung eines Standpunktes, der einem früheren überlegen ist, eine implizite Voraussetzung entdecken, und daß wir uns zugleich genötigt finden, diese fallenzulassen. Auf diese Weise kann eine Evidenz, welche in | einem A86
Stadium der geistigen Entwicklung besteht, in einem weiter fortgeschrittenen Stadium verlorengehen.

Dieses trifft insbesondere bei der Evidenz der äußeren Wahrnehmung zu, wie sie sich in der Einstellung des naiven Realismus vorfindet. In einem fortgeschrittenen Stadium entdecken wir, daß diese Einstellung auf Voraussetzungen beruht, die wir fallenlassen müssen, da es sich zeigt, daß:

1. die Wahrnehmungsqualitäten nicht direkt dem Wirklichen zukommen;

2. die Information, welche die äußere Wahrnehmung uns von den Dingen liefert, nicht den Charakter eines unmittelbaren Gewahrwerdens besitzt.

Wie man weiß, war die erste Theorie, welche dieser Entdeckung Rechnung trug, diejenige von Demokrit, die später von John Locke erneuert wurde, worin die Unterscheidung gemacht wurde zwischen wirklichen und scheinbaren Qualitäten. Auf diesem Stadium blieb noch ein großer Teil der Evidenzen des naiven Realismus erhalten. Man kann sagen, daß die Erkenntnistheorie von Kant darauf angelegt war, der Situation, wie sie sich auf jene Weise darstellte, eine umfassende, philosophische Deutung zu geben.

Wie bekannt, gibt es Theorien, welche sich in radikalerer Weise dem naiven Realismus entgegenstellen: diejenige des Phänomenalismus von Mach und Avenarius, und diejenige der Philosophen der Schule von Brentano, welche die Evidenz der äußeren Wahrnehmung bestreiten und nur diejenige der inneren Wahrnehmung anerkennen. Wie es scheint, geht diese Opposition gegen den naiven Realismus zu weit; in der Tat ist es gewiß keine adäquate Beschreibung der Tatsachen, wenn man schlechtweg die evidente Erfahrung einer uns umgebenden Wirklichkeit bestreitet – „Wirklichkeit" hier zu verstehen in einem noch unanalysierten Sinne –, und man muß anerkennen, daß diese primitive Evidenz keineswegs erschüttert wird durch die Kritik, welcher der naive Realismus ausgesetzt ist.

Es scheint sogar bei näherem Zusehen, daß die Überlegenheit der inneren Wahrnehmung über die äußere nicht in bezug auf das Moment der Existenz besteht: von der Existenz unseres Ich haben wir ursprünglich kaum eine größere Gewißheit und Evidenz als von derjenigen einer Außenwelt. Was die Überlegenheit der inneren Wahrnehmung ausmacht, ist der Umstand, daß die Begriffskategorien, die sie hervorruft, unmittelbar auf die Wirklichkeit anwendbar sind, was nicht zutrifft für diejenigen Begriffsbildungen, die aus der äußeren Wahrnehmung entspringen. In der Tat ist es ersichtlich,
A87 daß Fühlen, Sehen, Überlegen, | Zweifel, Freude, Furcht, Stolz, Eifersucht mögliche Zustände eines psychischen Wesens sind; indem die innere Wahrnehmung uns solche Begriffskategorien verschafft, hat sie weniger einen Charakter von Empfindung als einen solchen des Rationalen. (Daher ist es auch fast unmöglich, in den Feststellungen der inneren Wahrnehmung den Anteil der Deutung vom Perzeptiven zu trennen.)

Andererseits weiß man, daß die innere Wahrnehmung neben ihren Eigenschaften der Evidenz und der Rationalität auch ihre Schwächen hat:

1. es gibt auch bei der psychischen Erfahrung Fälle, wo wir durch den unmittelbaren Eindruck getäuscht werden,

2. es gibt auch hier eine Art von Perspektive, welche die quantitativen Beziehungen entstellt und wichtige Bestandteile der psychischen Zustände verdeckt,

3. schließlich hat speziell die innere Wahrnehmung den Mangel, daß die psychologischen Prädikate sich nicht in anschaulicher Weise an dem Subjekt (d. h. an dem Ich) vorfinden.

Kommen wir auf den Hauptpunkt zurück: es handelte sich darum, den Standpunkt zu bestimmen, der sich aus der Kritik an dem naiven Realismus ergibt. Obwohl fast alles von der realistischen Evidenz der äußeren Wahrnehmung aufgegeben werden muß, so bleibt gleichwohl doch etwas bestehen: das Gewahrwerden einer Wirklichkeit, die uns umgibt und welche die Mannigfaltigkeit ihres Inhalts in den Formen des Kontaktes kundgibt, der sich in unseren Wahrnehmungen bietet.

Wir haben hier ein wichtiges Beispiel einer Einbuße an Evidenz. Aber im Verlaufe des Entwicklungsprozesses unserer Erkenntnis gibt es auch Gewinne an Evidenz. Zunächst einmal bildet schon die Evidenz des naiven Realismus ein Beispiel dafür, da ja die Einstellung dieses Realismus ihrerseits eine Etappe in der Erkenntnisgewinnung darstellt. Aber wir brauchen nicht soweit zurückzugehen: in der Tat sind ja die Evidenzen, die in der Mathematik eine Rolle spielen, gewiß fast alle erworbene Evidenzen.

Hierbei handelt es sich um Evidenzen von Beziehungen, und die Art, wie diese sich einstellen, ist ein spezieller Fall des allgemeinen Prozesses des Entstehens einer Dialektik, in dem Sinne, den Ferdinand Gonseth diesem Terminus gibt. [1]

Dieser Fall ist dadurch ausgezeichnet, daß die Dialektik so sehr in | un- A88
seren Geist eindringt, daß sie unsere anschauliche Einbildungskraft dirigiert, d. h. daß sie die Art beeinflußt, wie wir uns gewisse Gattungen von Objekten anschaulich vorstellen. Auf diese Weise finden die begrifflichen Intentionen der Dialektik eine Art von anschaulicher Verwirklichung durch spontane Deutungen. Hierdurch erklärt sich auch, daß aus der Anschauung Begriffe hervorgehen können, welche die Möglichkeiten einer effektiven Kontrolle übersteigen und deren Entfaltung den Ansatz unendlicher Strukturen ergibt. Dieses gilt insbesondere für die geometrische Anschauung, welche Begriffe wie den der Symmetrie erzeugt, der denjenigen der Mittte in sich schließt; sowie auch die Unterscheidung zwischen geraden und gekrümmten Linien. Ich glaube, daß diese Ansicht im Einklang steht mit den Ergebnissen, zu denen Gerrit Mannoury gelangt ist, indem er seine Unterscheidung zwischen Wahlnegation und ausschließender Negation verfolgte: Man muß wohl zugeben, daß es geometrische Begriffe gibt, die nicht unmittelbar anschaulich sind, wie derjenige von Geraden, die sich niemals schneiden – was ja die übliche Definition der Parallelen ist. Allgemein scheint es, daß wir in geometrischer Anschauung nur Konfigurationen von endlicher Ausdehnung erfassen. (Wie man weiß, sind in den „Elementen" von Euklid die Axiome so formuliert, daß sie sich immer nur auf endliche Figuren beziehen; in dem Axiomensy-

[1]Nachträgliche Bemerkung: Dieser Gebrauch des Terminus ist inzwischen in Gonseths Philosophie durch eine anderweitige Verwendung zurückgedrängt worden.

stem von Pasch wird die Beschränkung auf endliche Figuren ausdrücklich zur Regel gemacht.)

Bezüglich der Theorie der Parallelen ist jedoch zu bemerken, daß die charakteristischen Eigenschaften der Euklidischen Geometrie sich zum Ausdruck bringen lassen, ohne daß man den erwähnten negativen Begriff des Parallelismus einführt. Zum Beispiel erhalten wir eine Möglichkeit der Formulierung durch die Aussage der Möglichkeit des Aneinanderstellens von Würfeln (derart, daß sie lückenlos einen Raumteil ausfüllen), wie es uns von Kinderspielen her vertraut ist.

Somit ermöglicht es unsere Ansicht anzuerkennen, daß die Dialektik der Euklidischen Geometrie eine Art von anschaulicher Evidenz hat, wie sie sich nicht in einer anderen der metrischen Geometrien findet. Es ist jedoch das folgende zu bemerken:

1. Es muß zugestanden werden, daß die geometrische Evidenz nicht mehr – wie es beim Standpunkt der Philosophie von Locke der Fall war – als unmittelbar auf die physikalische Wirklichkeit sich beziehend betrachtet werden kann (d. h. nicht so, daß wir in ihr Eigenschaften des physikalisch wirklichen Raumes erfassen); die Evidenz ist vielmehr eine phänomenologische – (deren Entstehen wir uns freilich verursacht
A89 denken können durch die physikalische Struktur des Raumes). |

2. Es scheint, daß ein Bereich der geometrischen Evidenz durch einen Charakter größerer Ursprünglichkeit ausgezeichnet ist, nämlich die Evidenz der topologischen Beziehungen. Beachten wir insbesondere, daß man bei der Ausführung der Überlegungen in der elementaren axiomatischen Geometrie im allgemeinen mehr oder minder grobe Figuren-Skizzen benutzt; was hierbei für das intuitive Erfassen zur Darstellung kommt, sind nur die topologischen Eigenschaften der Figuren, während man im übrigen nach begrifflichen Schlußregeln verfährt. Es ist klar, daß für diese nur halb-anschauliche Art des Überlegens die Euklidische Geometrie nicht bevorzugt ist gegenüber der Geometrie von Lobatschefskij.

3. Man muß zugeben, daß man für die Konstruktion der mathematischen Theorien, in ihrer heutigen Form, die geometrische Evidenz entbehren kann; in der Tat ist diese aus der heutigen Mathematik eliminiert, soweit es sich um die Begründung handelt; die Rolle, die ihr noch verbleibt, ist einerseits diejenige einer sehr wertvollen Interpretation, und andererseits besteht sie für die topologische Evidenz darin, daß

> sie Direktiven liefert für die Begriffsbildungen der allgemeinen Theorie der Räume. Aber die Tendenzen der Anschauung können hier, wie es scheint, nur näherungsweise, im Sinne eines Kompromisses, befriedigt werden – und zwar gleichviel, welches System der Arithmetik man auch benutzt. –

Wir haben uns mit der geometrischen Evidenz befaßt als einem Beispiel einer erworbenen Evidenz. Das gleiche gilt von den Evidenzen, durch welche die arithmetischen Methoden geleitet werden: sie sind erworben in einem Stadium der geistigen Entwicklung.

Im Gebiete der rein formalen Beziehungen gibt es ganz primitive Feststellungen, wie z. B. diese, daß man gemäß den gebräuchlichen Regeln der elementaren Algebra von dem Ausdruck $(a + b) \cdot (a - b)$ zu dem Ausdruck $(a.a) - (b.b)$ gelangt. (Diese Feststellung ist nicht etwa eine Tautologie; in der Tat enthält ja die Angabe einer auszuführenden Operation nicht die Angabe des Ergebnisses als Bestandteil.)

Wir haben hier die reinsten Formen von Evidenz, über die wir verfügen. Bereits die elementare Zahlentheorie geht wesentlich über solche primitive Feststellungen hinaus. Wir verwenden hier den Allgemeinbegriff der natürlichen Zahl sowie die Schlußweise der vollständigen Induktion und die rekursiven Definitionen, die beide sich an jenen Zahlbegriff knüpfen. Hier haben wir bereits eine volle Dialektik, die gewiß nicht von vornherein für das Denken bestanden hat, die man vielmehr in einem gewissen Stadium hat ansetzen und wagen müssen. | A90

Sicherlich ist noch ein großer Abstand zwischen dieser Dialektik der natürlichen Zahlen und derjenigen, welche wir in den Überlegungen der Analysis üblicherweise verwenden. Man muß Brouwer zugestehen, daß diese letztere Dialektik nicht eine so ursprüngliche Evidenz besitzt wie jene der Zahlentheorie; überdies muß man auch zugeben, daß sie nicht einen völlig arithmetischen Charakter hat. Gleichwohl können wir geltend machen, daß sie sehr erfolgreich ist, daß sie eine befriedigende Lösung der Probleme liefert, für die sie ausgebildet wurde, und daß sie auch eine Evidenz sui generis erlangt hat. Was ihr fehlt, ist nur, in Hinsicht auf die möglichen methodischen Erweiterungen, ein geeigneter Leitgedanke, um eine Abgrenzung zu erhalten, die nicht nur konventionell ist.

Die Philosophie des Intuitionismus will uns suggerieren, daß wir die gebräuchliche Dialektik der Analysis zugunsten einer Methodik eliminieren, welche strikt arithmetisch ist, entsprechend wie man die geometrische Evidenz eliminiert hat. Damit aber dieser Vorschlag akzeptiert werden sollte, würde, nach den Regeln des Erkennens, erfordert, daß die intuitionistische Methode sich in jeder Hinsicht der üblichen als überlegen erweise.

Jedenfalls ist die Möglichkeit, eine Evidenz für die Begründung einer Wissenschaft zu eliminieren, eine bemerkenswerte Tatsache. – Aus unserer Analyse der erworbenen Evidenzen ergibt sich im übrigen, daß für die Verwendbarkeit einer Dialektik kein wesentliches Erfordernis darin besteht, daß ihr eine spezifische Evidenz eigen ist.

Man könnte auf den Gedanken kommen, die Evidenz vollständig aus der Begründung der Wissenschaften auszuschalten und ihr nur die Rolle zu überlassen, die sie für die Heuristik, die Analogien und die Interpretationen besitzt. Jedoch man bemerkt sogleich, daß man jedenfalls (für die Grundlegungen) die primitiven Evidenzen von formalen Beziehungen nicht entbehren kann, weil diese ja nötig sind, um das Funktionieren einer Dialektik zu kontrollieren sowie für die Feststellung von Widersprüchen. Ferner ist sicher, daß für die experimentellen Wissenschaften gewisse Evidenzen von Beobachtungen, also gewisse psychologische Evidenzen, erfordert werden; aber es ist zu betonen, daß diese Evidenzen keine unmittelbare Verwendung gestatten, daß sie vielmehr auf eine komplizierte Weise in den Gesamtprozeß der empirischen Forschung eingeschaltet sind.

Wie Sie wissen, begegnet man in den neueren Gesellschaftswissenschaften der „behavioristischen" Tendenz, die Evidenz der inneren Wahrnehmung nach Möglichkeit zu eliminieren. Man macht geltend, daß für die Unter-
A91 suchung der psychologischen Tatsachen die indirekte | Feststellung verläßlicher ist als die direkte der inneren Wahrnehmung. Gewiß, man kann dieses vernünftigerweise nicht bestreiten; aber dieser Vorzug der außenweltlichen Feststellungen geht sicher nur bis zu einem gewissen Punkt, und eine Psychologie, die nur von äußeren Gegenständen und Beziehungen handelt, wie es die extremen Verfechter der behavioristischen Tendenz befürworten, dürfte schwerlich ausreichend sein.

In der Mathematik hatte Hilbert bei der ursprünglichen Fassung seiner Beweistheorie das Bestreben, alle mathematische Erkenntnis auf primitive formale Evidenz zu reduzieren. Es bedeutete bereits einen Kompromiß, daß er sich dann der vollen finiten Dialektik bedienen mußte (welche den Allgemeinbegriff der Ziffer enthält), und wie man weiß, erwies sich auch diese methodische Grundlage als unzureichend. Dennoch ist es möglich, daß es gelingen wird, eine Dialektik der konstruktiven Mathematik aufzustellen, die den Anforderungen der Beweistheorie gewachsen ist. –

Doch, welches auch das Schicksal dieser verschiedenen Unternehmungen sein mag, jedenfalls sehen wir uns veranlaßt, die Möglichkeit von Arten einer Dialektik zu diskutieren, die nicht eigentlich einen Charakter der Evidenz haben. Um eine solche Dialektik zu handhaben, bedarf es eines gewissen Verstehens; wir müssen imstande sein, gewissen Termen einen Sinn beizulegen und Beziehungen aufzufassen, die sich aus dem Sinn der Terme ergeben. (Dabei sind die Erfordernisse der Handhabung der Dialektik gewiß nicht die einzigen!)

Wir erkennen so die Notwendigkeit von etwas wie Intelligenz oder Vernunft, die man nicht anzusehen hat als Behältnis von Erkenntnissen a priori, sondern als eine geistige Tätigkeit, die darin besteht, auf gegebene Situationen mit der Bildung von versuchsweise angesetzten Kategorien zu reagieren.

Es sei hier erinnert an die philosophische Denkrichtung von Leonard Nelson, der (dem Beispiel von Kant und noch mehr dem von Fries folgend) dagegen opponierte, daß man die Evidenz zur einzigen Instanz für die Erkenntnis mache. Es galt, diesen Gedanken von seiner Verkettung mit dem traditionellen Apriorismus zu lösen. Dieses wurde im Vorangehenden versucht, im Einklang mit den Gedanken des Gonsethschen Idoneismus. Diese idoneistische Philosophie führt uns auch dazu anzuerkennen, daß Evidenzen allein nicht genügen, daß es vielmehr der Totalität des Geistigen bedarf.

Kapitel 18

Bernays Project: Text No. 19

Mathematische Existenz und Widerspruchsfreiheit (1950)

Mathematical Existence and Consistency

(*Etudes de Philosophie des sciences en hommage à Ferdinand Gonseth*, Neuchatel: Editions du Griffon, pp. 11–25;
repr. in *Abhandlungen*, 92–106)

11/A92 | In der Philosophie der Mathematik ist es eine geläufige These, durch die man das Spezifische der Sachlage in der Mathematik zu kennzeichnen pflegt, daß Existenz im mathematischen Sinne nichts anderes bedeute als Widerspruchsfreiheit. Hiermit ist gemeint, daß für die Mathematik keine philosophische Existenzfrage bestehe. Jene These ist jedoch ihrem Inhalt nach nicht so einfach und auch nicht so selbstverständlich, wie es scheinen kann, und eine Betrachtung über sie mag geeignet sein, auf manche in der philosophischen Diskussion aktuellen Fragen ein Licht zu werfen.

Beginnen wir mit dem, wogegen sich die These richtet; sie steht ja offensichtlich in Opposition gegen die Ansicht, wonach den mathematischen Gegenständen ein ideales Sein zuzuschreiben ist (das heißt eine Existenzweise unabhängig einerseits vom Gedacht- oder Vorgestelltwerden, und andererseits auch von dem Auftreten als Bestimmungsstück von etwas Wirkli-

chem), und wonach ferner die Existenzaussagen der Mathematik mit Bezug auf dieses ideale Sein zu verstehen sind. Gegen diese Auffassung spricht von vornherein der Umstand, daß hier ohne ersichtliche Notwendigkeit eine Voraussetzung eingeführt wird, die methodisch nichts leistet. Zur Verdeutlichung dessen mag es vorteilhaft sein, den Vergleich mit den Daseinsbehauptungen im naturwissenschaftlichen Gebiet heranzuziehen. Wie bekannt, hat man vom Standpunkt einer extrem phänomenalistischen Philosophie versucht, auch aus der Darstellung der Naturzusammenhänge die Annahme von Gegenständen, die unabhängig vom Wahrnehmen existieren, auszuschalten. Jedoch genügt bereits eine rohe Orientierung über unsere Erfahrung, um ersichtlich zu machen, daß ein solches Beginnen – abgesehen von den mannigfachen Hindernissen, die sich seiner Durchführung entgegenstellen – auch vom Standpunkt des wissenschaftlichen Anliegens unangemessen ist. In terminis der Wahrnehmung allein gewinnen wir keine übersichtlichen Gesetzlichkeiten. Unsere Erlebniswelt müßte eine total andere sein, damit eine auf Begriffe des
rein Wahrnehmungsmäßigen | gegründete Theorie erfolgreich sein könnte. So 12
ist also das Ansetzen objektiv existierender Naturgegenständlichkeiten nicht etwa nur eine Auswirkung unserer instinktiven Einstellung, sondern vom
Stand|punkt der wissenschaftlichen Methodik sachgemäß. (Das gilt auch A93
noch für die heutige Quantenphysik, wenngleich nach dieser eine völlig genaue Fixierbarkeit der Zustände nicht besteht.)

Stellen wir nun hiermit den Fall mathematischer Gegenständlichkeiten in Vergleich, so besteht da der offenkundige Unterschied, daß für die Verwendung der mathematischen Objekte im theoretischen und im konkreten Gebrauch eine losgelöste Existenz dieser Objekte (unabhängig von ihrem jeweiligen Auftreten als Bestimmungsstücke von etwas anderweit Gegenständlichem) keine Rolle spielt, während doch die Annahme objektiv physikalischer Gegenständlichkeiten nur dadurch ihren Erklärungswert besitzt, daß die betreffenden Gegenstände und Zustände als zu gewisser Zeit und an gewissem Ort vorhanden gesetzt werden.

Was wir hier bezüglich der mathematischen Objekte feststellen, gilt allgemein von allen den Gegenständen, die man als „ideelle Gegenstände“ bezeichnen kann. Gemeint sind solche Gegenstände der Betrachtung, denen jedenfalls nicht direkt der Charakter des Wirklichen, genauer des selbständig Wirklichen, zuzuschreiben ist, wie zum Beispiel Gattungen, Gesamtheiten, Qualitäten, Formgestalten, Normen, Beziehungen, Begriffe. Die mathematischen Gegenstände gehören alle hierzu.

Man kann der Ansicht sein – und diese Ansicht ist ja von manchen Philosophen vertreten worden – daß alle Aussagen über ideelle Gegenstände bei genauer Ausdrucksweise auf Aussagen über Wirkliches zurückzuführen seien. Mit der Durchführung einer solchen Reduktion würde insbesondere auch eine Deutung der mathematischen Existenz-Aussagen geliefert. Hier erheben sich aber grundsätzliche Schwierigkeiten. Die Aufgabe der Reduktion erweist sich zunächst schon bei etwas genauerem Zusehen als gar nicht eindeutig bestimmt, da verschiedene Begriffe des Wirklichen auseinandertreten: mit dem „Wirklichen" kann etwa gemeint sein das objektiv Reale oder das erlebnismäßig Gegebene oder das konkret Dingliche. Je nach der Auffassung vom Wirklichen gestaltet sich die Aufgabe der Zurückführung völlig verschieden. Überdies aber hat es nicht den Anschein, als ob auf irgendeine dieser Arten die gewünschte Zurückführung in befriedigender Weise gelingen könne.

Was in dieser Beziehung insbesondere die Bemühungen der Schule des logischen Empirismus um eine „Einheitssprache" der Wissenschaft anbelangt, so ist bemerkenswert, daß man neuerdings bewußtermaßen von dem Versuch der Reduktion aller Aussagen auf solche über Konkretes Abstand nimmt,
13/A94 wozu wohl besonders die Erfordernisse im $|_A$ Gebiet der Semantik (einer | Sinnesanalyse der syntaktischen Formen der Sprache) Anlaß gegeben haben.

Für unsere Erörterung werden wir hinsichtlich der Frage, ob sich die Einführung ideeller Gegenstände in der Wissenschaftssprache grundsätzlich vermeiden läßt, keine Voraussetzung zu$_a\,\underline{\mathrm{G}}_a$runde legen. Die bestehende Situation ist jedenfalls die, daß wir in den Gebieten der Forschung (und sogar in der Betrachtungsweise des täglichen Lebens) allenthalben mit ideellen Gegenständen zu tun haben; und wir übernehmen hier diese geläufige Art der Betrachtung.

In dieser Einstellung ist noch keineswegs eine Annahme über eine selbständige Existenz ideeller Gegenstände enthalten. Es ist aber begreiflich, daß tatsächlich eine derartige Annahme oft an die ideellen Gegenstände geknüpft worden ist – zumal wenn wir uns der Ansicht von Ferdinand Gonseth anschließen, wonach der allgemeinere Gegenstandsbegriff aus einer primären gröberen Gegenstandsvorstellung erwächst, die in einer „physique de l'objet quelconque" ihren Ausdruck findet. In $_a\underline{\mathrm{B}}_a$ezug auf die gröbere Dinglichkeit ist ja der Charakter des Objektiven aufs Engste verknüpft mit der Existenz unabhängig von unserem Wahrnehmen und Vorstellen, und so ist es leicht zu verstehen, daß wir $_{a_1}$**auch**$_{a_1}$ bei den Gegenständen allgemeiner Art geneigt sind, den objektiven Charakter einem unabhängigen Existieren zuzuschreiben. Eine Nötigung hierzu besteht jedoch keineswegs. Insbesondere ist in dieser Hinsicht von Bedeutung, daß wenn wir uns einer Annahme über ideale Existenz enthalten, dieses uns nicht hindert, Existenzaussagen über ideelle Gegenstände zu verwenden, die ohne eine solche besondere Annahme interpretierbar sind. Wir wollen uns die wohl hauptsächlich in Betracht kommenden Fälle solcher Interpretationen vergegenwärtigen:

a) Mit Existenz eines ideellen Gegenstandes kann die deutliche und vollständige Vorstellbarkeit des Gegenstandes gemeint sein.

b) Existenz eines ideellen Gegenstandes von bestimmter Art kann besagen, daß dieser an etwas naturgegenständlich Gegebenem verwirklicht ist. So zum Beispiel besagt die Feststellung, daß ein gewisses Wort in einer Sprache verschiedene Bedeutungen besitzt, daß im Gebrauch dieser Sprache Verwendungen des Wortes in verschiedener Bedeutung vorkommen.

c) Eine Existenzbehauptung betreffend ideelle Gegenstände kann gemeint sein mit Bezug auf ein strukturiertes Gebilde, in welches jener Gegenstand als Bestandsstück eingeht. Beispiele hierfür sind Aussagen über Bestandteile einer Figur, etwa wenn wir sagen „die Konfiguration des Würfels enthält 12 Kanten", oder Aussagen über etwas, das in einem bestimmten Drama vorkommt, oder etwa über Bestimmungen, die im | römischen Recht enthalten 14/A95
sind. Wir wollen Existenz in diesem Sinne, das heißt Existenz im Rahmen einer umfassenden Struktur, „bezogene Existenz“ nennen.

d) Existenz von ideellen Gegenständen kann besagen, daß man bei gewissen Betrachtungen auf solche Gegenstände geführt wird. Zum Beispiel die Aussage, daß es Urteile gibt, in welchen Beziehungen als Subjekte auftreten, bringt zum Ausdruck, daß wir in der Bildung von Urteilen auch zu solchen Urteilen „zweiter Stufe“ (wie man sie nennt) geführt werden.

Im Fall *a)* ist die Existenz des ideellen Gegenstandes nichts anderes als die Vorstellungs-Gegenständlichkeit (im Sinne des eigentlichen Vorstellens); im Fall *b)* kommt die Existenz auf eine Naturwirklichkeit hinaus; im Falle *c)* handelt es sich um einen immanenten Sachverhalt $_{a_1}$**innerhalb**$_{a_1}$ einer betrachteten Gesamtstruktur.

In diesen drei Fällen wird durch die Interpretation der Existenzaussage unmittelbar eine Art von inhaltlicher Reduktion gegeben. Beim Fall *d)* verhält es sich insofern anders, als das „$_{d_2}\underline{\mathrm{G}/}_{d_2 a_1}\underline{\mathrm{g}}_{a_1}$eführt werden“ auf Gegenstände nicht im Sinne einer bloßen psychologischen Tatsächlichkeit, sondern im Sinne des objektiv Sachgemäßen zu verstehen ist. Hier wird Bezug genommen auf die Entwicklung der geistigen Situationen, mit den in ihr wirksamen Momenten der Freiheit und Verbindlichkeit, – Freiheit in dem Sinne, in welchem Gonseth von einer „charte de nos libertés“ spricht (zum Beispiel die Freiheit, zu einer als überblickbar vorgestellten Gesamtheit von Elementen ein weiteres Element hinzuzudenken), andererseits Verbindlichkeit, wie sie zum Beispiel darin besteht, daß die Mittel, die wir zur Beschreibung und zur geistigen Beherrschung von Gegenständlichkeiten verwenden, ihrerseits neue, und sogar eventuell komplexere Gegenständlichkeiten ergeben.

Doch auch bei dieser Deutung der Existenzaussagen wird nicht eine Annahme eines unabhängigen Existierens von idealen[a] Gegenständen eingeführt. Die Existenzaussage hält sich an den jeweiligen konzeptionellen Zusammenhang, und auf eine über diesen hinausgehende philosophische (ontologische) Modalitätsfrage wird nicht ei$_{a_2}\underline{\text{n}}_{a_2}$getreten. Ob eine solche überhaupt sinnvoll ist, bleibt dahingestellt.

Diese Überlegungen beziehen sich auf ideelle Gegenstände im allgemeinen. Wie steht es nun speziell mit den mathematischen Gegenständen, die ja, wie schon bemerkt, zu den ideellen Gegenständen gehören? Indem wir auf diese unsere eben angestellte Betrachtung zur Anwendung bringen, bemerken wir, daß wir schon eine Art der Antwort auf die Frage haben, was Existenz in der Mathematik bedeuten kann. Jedoch eine einfachere Antwort will ja A96 die zur Erörterung stehende | These bieten, daß Existenz in $_{a}\underline{\text{B}}_{a}$ezug auf mathematische Gegenstände gleichbedeutend ist mit Wider|spruchsfreiheit. Für die Diskussion dieser Behauptung haben wir nun schon verschiedene klärende Gesichtspunkte gewonnen. Wenden wir uns jetzt dieser Diskussion zu.

Hierfür möge zunächst die offensichtlich etwas abgekürzte Formulierung der Behauptung durch eine ausführlichere ersetzt werden. Gemeint ist gewiß: Existenz eines Gegenstandes (eines Gebildes, einer Struktur) mit gewissen geforderten Eigenschaften bedeutet im mathematischen Sinne nichts anderes als die Widerspruchsfreiheit jener geforderten Eigenschaften. Als einfaches Beispiel zur Erläuterung mag das folgende dienen. Es gibt eine gerade Primzahl, dagegen gibt es keine durch 6 teilbare Primzahl. In der Tat: die Eigenschaften „Primzahl" und „geradzahlig" sind vereinbar, dagegen die Eigenschaften „Primzahl" und „durch 6 teilbar" widersprechen sich. Beispiele wie dieses erwecken den Eindruck, daß die Erklärung der mathematischen Existenz durch Widerspruchsfreiheit völlig befriedigend sei. Es ist aber zu beachten, daß auch hier nicht eine Leistungsfähigkeit der Erklärung aufgezeigt wird; nämlich es wird nur vorgeführt, wie man aus dem Vorhandensein eines Beispiels auf die Widerspruchsfreiheit und andererseits

[a]The text has "ideal" here, but "ideell" seems to be intended.

aus einem Widerspruch auf die Nicht-Existenz schließt, aber nicht, wie man aus einer zuerst festgestellten Widerspruchsfreiheit auf Existenz schließt; und das wäre doch gerade der entscheidende Fall.

Diese eine Bemerkung genügt nun schon, um uns stutzig zu machen; denn wir werden darauf aufmerksam, daß ja in der Mathematik üblichermaßen die Existenzbehauptungen nicht aus Nachweisen von Widerspruchsfreiheit gefolgert werden, sondern daß umgekehrt die Nachweise von Widerspruchsfreiheit durch Aufweisungen von Modellen geliefert werden, wobei die Erfüllung der geforderten Eigenschaften jeweils im Sinne einer positiven Feststellung verifiziert wird. Mit anderen Worten: die üblichen Beweise für Widerspruchsfreiheit sind Nachweise der *Erfüllbarkeit* von Bedingungen, genauer: der Erfüllung von Bedingungen an einer ideellen Gegenständlichkeit.

Es war eine ungewohnte Neuerung, welche die Hilbertsche Beweistheorie dadurch brachte, daß hier Nachweise der Widerspruchsfreiheit in dem Sinne verlangt werden, daß die Unmöglichkeit des deduktiven Zustandekommens eines Widerspruchs gezeigt wird. Ein solcher Nachweis hat zur Voraussetzung, daß die in Betracht kommenden Verfahren des Deduzierens sich deutlich abgrenzen lassen. Die Technik für eine solche Präzisierung der Verfahren des logischen Schließens wird durch die Methoden der symbolischen Logik geliefert. Wir sind dadurch in der Lage, die in den mathe-
matischen Theorien, insbesondere der Zah|lentheorie und der Theorie der A97
Funktionen$_{a_2}$,$_{a_2}$ gebrauchten Schlußweisen durch ein genau festgelegtes System von Regeln zu umgrenzen. Das ist jedoch nur eine Abgrenzung der
| *de facto* in den Theorien verwendeten Schlüsse. Zur Präzisierung eines 16
uneingeschränkten Begriffes der Widerspruchsfreiheit gelangt man aber so im allgemeinen nicht; eine solche wird vielmehr nur für einen gewissen, verhältnismäßig elementaren Bereich der logisch-mathematischen Begriffsbildung erreicht. Für diesen läßt sich der Begriff des mathematischen Beweises so umgrenzen, daß man zeigen kann: jede Forderung, die nicht deduktiv auf einen Widerspruch führt, läßt sich (in einem genauer bestimmten Sinne) erfüllen. Bei diesem Gödelschen Vollständigkeitssatz wird besonders ersichtlich, daß das hier konstatierte Zusammenfallen von Widerspruchsfreiheit und Erfüllbarkeit nichts weniger als eine Selbstverständlichkeit, sondern wesentlich durch die Beschaffenheit des betrachteten Bereiches von Aussagen und Schlüssen bedingt ist. Geht man über den genannten Bereich hinaus, so führt die Präzisierung der Beweismethoden nicht mehr zur Übereinstimmung von Widerspruchsfreiheit und Erfüllbarkeit; diese Übereinstimmung läßt sich – wie wiederum von Gödel gezeigt wurde – im allgemeinen (bei naturgemäßen

an den Begriff der Beweisbarkeit gestellten Anforderungen) nicht erreichen.

Freilich besteht hier die Möglichkeit, den Begriff des Beweises – gemäß einem von Carnap und von Tarski ausgebildeten Verfahren – durch einen allgemeineren Begriff der „Folgerung“ so zu erweitern, daß für die sich daran knüpfenden Begriffe der logischen Gültigkeit und des Kontradiktorischen (zum Widerspruch führenden) die Alternative resultiert, daß jeder rein mathematische Satz entweder logisch gültig oder kontradiktorisch ist$_{a_2},_{a_2}$ und daß daher auch jede Anforderung an einen mathematischen Gegenstand entweder widerspruchsvoll oder durch einen Gegenstand erfüllt ist.

Hiermit scheint nun die Gleichsetzung von Existenz und Widerspruchsfreiheit ihre exakte Bestätigung zu finden. Sieht man aber genauer zu, so bemerkt man, daß hier das Entscheidende durch die Definitionen sozusagen vorweggenommen wird. Nämlich auf$_a$ G$_a$rund der Definitionen gilt hier, daß eine mathematische Anforderung an einen mathematischen Gegenstand stets schon dann kontradiktorisch ist, wenn sie für keinen Gegenstand erfüllt ist. Die Übereinstimmung zwischen Widerspruchsfreiheit einer Anforderung und Erfüllung durch einen Gegenstand besagt hiernach im mathematischen Gebiet nicht mehr, als daß in einer Gattung G ein Gegenstand, welcher einer Bedingung B Genüge leistet, dann und nur dann existiert, wenn nicht jeder Gegenstand der Gattung G gegen die Bedingung B verstößt.

A98 | Das ist allerdings – vom Standpunkt der klassischen Mathematik und Logik – eine gültige Gleichwertigkeits-Beziehung. Doch die Verwendung dieser Äquivalenz zur Deutung der Existenzaussagen ist sicherlich unbefriedigend:
17 Wenn mit Bezug auf einen allgemeinen Satz die Behauptung, | daß dieser eine Ausnahme erleidet, als eine existentiale Aussage der inhaltlichen Erklärung als bedürftig erachtet wird, so ist die Negation jenes allgemeinen Satzes gewiß nicht inhaltlich deutlicher. Die Gleichwertigkeit der Negation eines allgemeinen Satzes mit einem Existenzsatz hat ja (in der klassischen Mathematik) unter anderem gerade die Rolle, daß durch sie der Sinn der Negation eines allgemeinen Satzes deutlicher expliziert wird. Kennzeichnend für diesen Umstand ist auch, daß der Brouwersche Intuitionismus, welcher jene Gleichwertigkeit nicht anerkennt, zugleich auch der schlichten Negation eines allgemeinen mathematischen Satzes überhaupt einen Sinn abspricht und an ihrer Stelle eine verschärfte Negation, die Absurdität, einführt, welche wiederum ein existentiales Moment in sich schließt (da „Absurdität“ zu verstehen ist als effektive Möglichkeit der Widerlegung).

Die Schwierigkeiten, auf die wir hier geführt worden sind, rühren letzten Endes davon her, daß der Begriff der Widerspruchsfreiheit seinerseits gar nicht unproblematisch ist. Bei der Zustimmung, welche die Erklärung von mathematischer Existenz durch Widerspruchsfreiheit so weitgehend findet, spricht gewiß zu einem erheblichen Teil der Umstand mit, daß man sich auf$_a$ $\underline{\mathrm{G}}_a$rund von einfachen Fällen, die man im Sinne hat, eine zu simple Vorstellung von dem macht, was Widerspruchsfreiheit (Verträglichkeit) von Bedingungen ist. Man stellt sich die Vereinbarkeit der Bedingungen als etwas dem Komplex der Bedingungen gleichsam direkt Anhaftendes vor, derart, daß man nur den Inhalt der Bedingungen deutlich auseinanderzulegen brauche, um zu sehen, ob sie miteinander einhellig sind oder nicht. Tatsächlich ist aber die Rolle der Bedingungen die, daß sie sich in funktionaler Verwendung und durch Kombination miteinander auswirken. Das, was auf solche Weise sich ergibt, ist nicht als Bestandteil in dem Gegebenen der Bedingungen enthalten. Die irrtümliche Vorstellung von einer solchen Inhärenz ist es wohl auch, aus welcher die Meinung von dem tautologischen Charakter der mathematischen Sätze hervorgegangen ist.

Doch abgesehen von den Schwierigkeiten, die mit dem Begriff der Widerspruchsfreiheit und mit dem Verhältnis von Widerspruchsfreiheit und Erfüllbarkeit zusammenhängen, ist noch ein ganz anderer Gesichtspunkt, der uns darauf hinweist, daß es jedenfalls nicht durchweg in der Mathematik angemessen ist, Existenz als Widerspruchsfreiheit zu interpretieren.
Betrachten wir den Fall von Existenz-Axiomen einer axio|matisch aufgebau- A99
ten mathematischen Theorie. Wird hier die Existenzaussage als Behauptung von Widerspruchsfreiheit gedeutet, so ergibt sich insofern eine Verwirrung, als ja Widerspruchsfreiheit bei einer axiomatischen Theorie sich auf das Gesamtsystem der Axiome bezieht. Eine Anforderung, welche Widerspruchs-
freiheit betrifft, kann wohl als vorgängiges Postulat | für die Gestaltung eines 18
Axiomen$_{d_2}$-$\mathbf{S}_{d_2}$systems fungieren. Dagegen haben die aufgestellten Axiome – jedenfalls bei der gebräuchlichen Form der Axiomatik – stets den Sinn, Bindungen zu stiften. So besagt ein Existenz-Axiom nicht, daß wir einen gewissen Gegenstand unter bestimmten Bedingungen ansetzen *können*, sondern vielmehr, daß wir unter diesen Bedingungen gebunden sind, ihn anzusetzen.

Wir haben andrerseits auch, auf$_a$$\underline{\mathrm{G}}_a$rund unserer eingangs angestellten Betrachtungen, eine angemessene Auffassung der axiomatischen Existenz-Aussagen in Bereitschaft. Bedenken wir nämlich, daß ein Axiomensystem im Ganzen als eine Beschreibung eines gewissen Strukturgebildes sich betrachten läßt, zum Beispiel ein Axiomensystem der euklidischen Geometrie als Beschreibung der Struktur einer euklidischen Mannigfaltigkeit, so erkennen wir, daß die Existenz-Behauptungen innerhalb einer axiomatischen Theorie als Aussagen über *bezogene Existenz* aufgefaßt werden können: So wie in der Konfiguration eines Würfels von jeder Ecke drei Kanten ausgehen, so geht in der Mannigfaltigkeit des euklidischen Raumes durch je zwei verschiedene Punkte eine Gerade; und der Satz der euklidischen Geometrie, daß zu je zwei Punkten eine durch sie beide gehende Gerade existiert, bringt jenen Sachverhalt von bezogener Existenz zum Ausdruck.[1]

Freilich ist zuzugeben, daß mit dem Gesichtspunkt der bezogenen Existenz, so angemessen er für die faktische Handhabung des Existenzbegriffes in der Mathematik ist, die philosophische Frage bezüglich der mathematischen Existenz gleichsam nur verschoben wird. Denn die bezogene Existenz
A100 ist ja wissenschaftlich bedeutungsvoll nur, sofern die | betreffende Gesamtstruktur, auf welche die Bezogenheit besteht, als mathematisch existent anzusehen ist. Es erhebt sich somit die Frage, wie es sich mit der Existenz jener Gesamt-Strukturen verhält, also etwa mit der Existenz der Zahlenreihe, der Existenz des Kontinuums, der Existenz der euklidischen Raum-Struktur und auch anderer Raum-Strukturen.

Hier treffen wir nun Beispiele, bei denen die Gleichsetzung von Existenz und Widerspruchsfreiheit ihre Berechtigung hat. So ist es berechtigt, wenn
19 wir sagen, die Existenz der nichteuklidischen (Bolyai-Lobatschefskijschen) | Geometrie besteht in ihrer Widerspruchsfreiheit. Aber selbst in einem solchen Falle verhält es sich doch so, daß der Nachweis der Widerspruchsfreiheit durch eine Aufweisung erfolgt, und daß hierbei die Behauptung der Widerspruchsfreiheit verschärft wird zur Feststellung der Existenz eines die Axiome erfüllenden Modells, – „Existenz“ hier bezogen auf den Rahmen der Arithmetik der reellen und komplexen Zahlen. Auf analoge Art lassen sich mannigfache Nachweise von Widerspruchsfreiheit im Sinne der Erfüllbarkeit erbringen, so der Nachweis der Widerspruchsfreiheit einer nichtarchimedischen Geometrie (das heißt einer Geometrie mit unendlich kleinen Strecken), ferner die Widerspruchsfreiheit des Rechnens mit den imaginären Größen, un-

[1] Das sozusagen Unproblematische der bezogenen Existenz ist von Bruno von Freytag-Löringhoff in seiner Schrift *Die ontologischen Grundlagen der Mathematik* (*vide* [**?**]) hervorgehoben worden, der die vorliegende Untersuchung manche Anregungen verdankt. Der Verfasser spricht in diesem Sinne von dem „kleinen Existenzproblem“. Seine Ansicht unterscheidet sich jedoch von der hier dargelegten insofern, als er die Gleichsetzung von Existenz und Widerspruchsfreiheit als dem kleinen Existenzproblem angemessen erachtet, während im Vorliegenden der Gesichtspunkt der bezogenen Existenz gerade dem der Gleichsetzung von Existenz und Widerspruchsfreiheit als eine berichtigende Auffassung entgegengestellt wird.

ter Zugrundelegung der Theorie der reellen Zahlen. Die meisten derartigen Modell-Konstruktionen erfolgen im Rahmen der Theorie des mathematischen Kontinuums (Theorie der reellen Zahlen). Für die Axiome des Kontinuums ihrerseits läßt sich wiederum, ausgehend von der Zahlenreihe, unter wesentlicher Hinzunahme mengentheoretischer Bildungsprozesse, die Erfüllbarkeit erkennen.

Wohin aber führen alle diese Reduktionen? Wir gelangen schließlich zur Bezugnahme auf einen ideellen Rahmen. Es ist ein Gedankensystem, das eine Art der methodischen Einstellung involviert, auf welches letzten Endes die mathematischen Existenz-Setzungen bezogen werden.

Beschreibend können wir feststellen, daß der Mathematiker sich in diesem ideellen Rahmen mit Sicherheit bewegt und daß er hier über eine Art erworbener Evidenz verfügt (für welche sich Bildungen auch von komplizierterer Art, wie unendliche Zahlenfolgen, als etwas Gegenständliches darstellen). Die Widerspruchsfreiheit dieser Methodik ist in den mannigfachsten kombinierten Formen der Verwendung erprobt, so daß an ihrem Bestehen *de facto* nicht gezweifelt wird; sie bildet selbstverständlich die Vorbedingung dafür, daß die in dem ideellen Rahmen vollzogenen Existenzsetzungen Geltung haben. Wir bemerken aber hier wiederum, daß wir die Existenz nicht einfach mit der Widerspruchs|freiheit identifizieren können. Denn die Widerspruchsfreiheit A101
bezieht sich auf den Rahmen als Ganzes, nicht auf das Einzelne als existierend Gesetzte.

Überlegen wir uns den Sachverhalt des Näheren am Beispiel der Zahlenreihe. Die Setzung der Zahlenreihe ist in dem Rahmen unseres mathematischen Operierens inbegriffen. Was aber bedeutet Widerspruchsfreiheit der Zahlenreihe? Wenn wir uns zur Beantwortung dieser Frage begnügen, daran zu appellieren, daß eine unbegrenzte Fortsetzung des Zählprozesses in einer idealisierenden Vorstellungsart auffaßbar ist, dann verstehen wir die Existenz als Gegenständlichkeit, – sei es nun, daß wir die Zahlenreihe bloß als einen Bereich von ideellen Gegenständen oder, gemäß einer verstärkten Idealisierung, selbst als ein Strukturgebilde auffassen, – und | entnehmen erst aus 20
der Gegenständlichkeit die Widerspruchsfreiheit. Soll aber Widerspruchsfreiheit von der logischen Seite her eingesehen werden, so müssen einerseits die in der Vorstellung der Zahlenreihe enthaltenen Bedingungen begrifflich gefaßt werden, und wir müssen andererseits eine genauere Vorstellung von dem, was logische Folgerung ist, zu$_a$ $\underline{\text{G}}_a$runde legen.

Wir werden dabei auch gewahr, daß der Begriff der logischen Folgerung durch die Möglichkeit der Zusammensetzung der Folgerungs-Prozesse zu einer ähnlichen Art einer unbegrenzten Mannigfaltigkeit wie derjenigen der Zahlenreihe Anlaß gibt. Ferner zeigt sich, daß der Bereich des Logischen in engerem oder weiterem Sinne gefaßt werden kann und dadurch hinsichtlich seiner angemessenen Abgrenzung einer Problematik unterliegt.

Wir kommen hiermit in das Fragengebiet der mathematisch-logischen Grundlagen-Forschung, dessen Umstrittenheit in einem starken Kontrast steht zu der erwähnten Sicherheit des mathematischen Operierens im Rahmen der üblichen Methoden.

Mit den hier vorliegenden Schwierigkeiten hat es folgende Bewandtnis: Der übliche Rahmen des mathematischen Operierens ist zwar für den Gebrauch in den klassischen Theorien hinlänglich bestimmt; es bleiben aber dabei doch hinsichtlich der Abgrenzung und Art der Fundamentierung gewisse Unbestimmtheiten. Wenn man diese zu beheben trachtet, so sieht man sich vor Alternativen gestellt, und in der Entscheidung über diese treten verschiedene Auffassungen auseinander. Die Verschiedenheit der Ansichten macht sich insbesondere geltend bei dem Bestreben, die Fundamentierung der Mathematik von einem Standpunkt der Voraussetzungslosigkeit zu gewinnen, derart, daß man sich nur auf das absolut Selbstverständliche bzw. das absolut Evidente stützt. Es zeigt sich da, daß über die Frage, was als
A102 selbstverständlich | bzw. als völlig evident anzusehen ist, durchaus keine Einhelligkeit besteht.

Diese Meinungsverschiedenheit ist nun freilich weniger irritierend, wenn man sich von dem Gedanken des Erfordernisses einer voraussetzungslosen, von einem völlig *a priori* bestimmten Ausgangspunkt zu gewinnenden Begründung frei macht und dafür jenen erkenntnistheoretischen Gesichtspunkt der Philosophie Gonseths übernimmt, wonach der Charakter einer Dualität, durch das Zusammenwirken rationaler und erfahrungsmäßiger Momente, nicht auf die naturwissenschaftliche Erkenntnis beschränkt ist, sondern sich in allen Erkenntnisgebieten findet. Speziell für die abstrakten Gebiete des Mathematischen und Logischen bedeutet dieses, daß auch hier die Gedankenbildungen nicht rein *a priori* festgelegt sind, sondern vielmehr aus einer Art des geistigen Experimentierens erwachsen. Diese Auffassung finden wir bei der Betrachtung der mathematischen Grundlagen-Forschung bestätigt. Es zeigt
21 sich hier in der Tat, daß man sich genötigt | sieht, den methodischen Rahmen durch Probieren den Erfordernissen der Aufgabe anzupassen. Ein solches Experimentieren, das vom Standpunkt der traditionellen Auffassung als Ausdruck des Mißlingens beurteilt werden muß, erscheint unter dem Gesichtspunkt der geistigen Erfahrung als durchaus sachgemäß. Insbesondere sind

von diesem Standpunkt die Versuche, die sich als nicht durchführbar erwiesen haben, nicht *eo ipso* als methodische Fehler anzusprechen, sondern können (wenn sie sinngemäß angesetzt und konsequent ausgeführt sind) als Etappen des geistigen Experimentierens Würdigung verdienen. Auch die Mehrheit der konkurrierenden Grundlegungs-Unternehmungen hat bei dieser Auffassung nichts Anstößiges, sondern erscheint in Analogie zu der Vielheit konkurrierender Theorien, wie wir sie in etlichen Entwicklungsstadien naturwissenschaftlicher Forschung antreffen.

Wenn wir nun die sich hier bietende, mindestens partielle methodische Analogie der Grundlagen-Spekulationen zur theoretischen Naturforschung näher ins Auge fassen, so bringt uns das auf den Gedanken, daß mit jeder genaueren Abgrenzung eines methodischen Rahmens für die Mathematik (bzw. für ein Gebiet der Mathematik) ein gewisser Bereich von mathematischer Tatsächlichkeit intendiert wird, und daß diese Tatsächlichkeit in gewissem Maße von der besonderen Gestaltung jenes Rahmens unabhängig ist. Wir können uns das an der geometrischen Axiomatik klarmachen. Die euklidische Geometrie läßt sich, wie man weiß, auf mannigfache Arten axiomatisch entwickeln. Von der besonderen Art aber, wie das geschieht, ist die resultierende Struktur-Gesetzlichkeit der euklidischen Geometrie unabhängig.
In | einem ähnlichen Sinne sind die Beziehungen in der Theorie des math- A103
ematischen Kontinuums und der sich an sie schließenden Disziplinen unabhängig von der besonderen Art, wie die reellen Zahlen eingeführt werden, und erst recht von der besonderen Methode einer grundlagentheoretischen Fundierung. Jene Beziehungen, auf die wir sozusagen zwangsmäßig geführt werden, sobald wir uns auf gewisse Arten des Kalkuls und des mathematischen Operierens einlassen, haben für eine grundlagentheoretische Untersuchung die Rolle des Gegebenen, dessen genauere theoretische Fixierung zur Aufgabe steht. Die Art dieser Fixierung kann Momente der Problematik enthalten, von denen jenes gleichsam Gegebene nicht betroffen wird.

Der so gewonnene Gesichtspunkt der Gegenüberstellung einer mathematischen Tatsächlichkeit und eines zur Fixierung dieser Tatsächlichkeit gestalteten methodischen Rahmens vereinigt sich auch gut mit den Ergebnissen der beschreibenden Analyse, welcher Rolin Wavre das Verhältnis von Erfindung und Entdeckung in der mathematischen Forschung unterworfen hat. Worauf
hier hingewiesen wird, das ist die Verflochtenheit | der beiden Momente: ein- 22
erseits der Erfindung von Begriffsbildungen, andererseits der Entdeckung von gesetzlichen Beziehungen zwischen den konzipierten Gegenständlichkeiten, sowie ferner der Umstand, daß die begriffliche Erfindung ausgerichtet ist auf

das Entdecken.

Was das Letztere betrifft, so verhält es sich ja vielfach so, daß die Erfindung gelenkt wird von einer mehr oder minder deutlich schon vorhandenen Entdeckung, und daß sie dazu dient, diese zur begrifflichen Bestimmtheit zu führen und dadurch auch der Mitteilung zugänglich zu machen. Die Nötigung zur Anpassung der Begriffe an die Erfordernisse des Ausdrucks für etwas Objektives besteht dabei ebenso wie bei entsprechenden Situationen in der theoretischen Naturwissenschaft. So sind die Begriffe des Differentialquotienten und des Rationalitätsbereiches ebenso im Hinblick auf etwas auszudrückendes Objektives eingeführt worden wie die Begriffe der Entropie und des elektrischen Feldes.

Einen Fall von methodisch gleicher Art nehmen wir für die Konstituierung eines Rahmens der mathematischen Deduktion an, wenn wir von einer durch jenen Rahmen zu explizierenden mathematischen Tatsächlichkeit sprechen.

Machen wir nun von dieser Betrachtungsweise Anwendung auf unsere Frage der mathematischen Existenz, so ergibt sich daraus eine wesentliche Ergänzung unserer früheren Feststellung, daß die Existenz-Aussagen in un-
A104 seren mathematischen Theorien letzten Endes auf ein | Gedankensystem
bezogen sind, das als methodischer Rahmen fungiert. Diese Bezogenheit der Existenzaussagen erscheint nunmehr weitgehend dadurch kompensiert, daß die wesentlichen Eigenschaften der durch den methodischen Rahmen intendierten Tatsächlichkeit sozusagen invariant sind gegenüber den Besonderheiten (dem Erfindungsmäßigen) jenes Rahmens.

Hier ist ferner noch zu bemerken, daß die mathematische Tatsächlichkeit sich auch insofern von jedwedem abgegrenzten methodischen Rahmen abhebt, als sie durch einen solchen niemals ganz erschöpft wird. Es erwachsen vielmehr aus der Konzeption eines deduktiven Rahmens jeweils weitere mathematische Beziehungen, die ihn überschreiten.

Doch – so mag man fragen – kommen wir mit einer solchen Auffassung von mathematischer Tatsächlichkeit nicht zurück auf die Annahme einer idealen Existenz der mathematischen Gegenstände, die wir doch im Eingang unserer Betrachtung als unmotiviert abgelehnt haben? Um auf diese Frage zu erwidern, müssen wir uns auf die Grenzen der Analogie zwischen mathematischer und physikalischer Tatsächlichkeit besinnen. Hier handelt es sich um etwas sehr Elementares.

In der Zweckbestimmung der naturwissenschaftlichen Begriffsbildung liegt
23 es, daß sie uns eine orientierende Deutung der Umwelt liefern will. | Es spielt
daher in der Naturwissenschaft die Modalität des faktisch Wirklichen eine

ausgezeichnete Rolle, und im Vergleich mit dieser Wirklichkeit stellt sich alle sonstige Existenz, von der die Rede sein kann, als nur uneigentliche Existenz dar, – so wenn wir von dem Bestehen naturgesetzlicher Beziehungen sprechen. Und zwar gilt das, obwohl ja die Aussagen betreffend das Bestehen von Naturgesetzen inhaltlich über das im Bereich des Faktischen Feststellbare hinausgehen.

In der Mathematik haben wir keinen so prägnanten Modalitäts-Unterschied. Für die Betrachtungsweise des Mathematikers stellt sich das einzelne mathematische Gegenständliche nicht als etwas in eminenterem Sinne Existierendes dar als die gesetzlichen Beziehungen. Ja, man kann sagen, daß hier ein Unterschied zwischen einem direkt Gegenständlichen und einer Gesetzlichkeit, der jenes unterliegt, überhaupt nicht in deutlichem Sinne besteht, da sich etliche Gesetzlichkeiten durch formale Entwicklungen darstellen, die ihrerseits den Charakter des direkt Gegenständlichen besitzen. Sogar Axiomensysteme lassen sich als strukturelle Gebilde betrachten. Wir haben daher in der Mathematik keinen Anlaß, Existenz in einem grundsätzlich anderen Sinne anzunehmen, als wir das Bestehen von gesetzlichen Beziehungen annehmen.

So werden die verschiedenen Bedenken behoben, welche unserer Auffassung von der Bezogenheit der mathematischen Existenz-Aussagen | auf A105
ein System der Begrifflichkeit (einen deduktiven Rahmen) entgegenzustehen scheinen: Ungeachtet der verschiedenen Möglichkeiten der Anlage eines solchen Systems der Begrifflichkeit bedeutet diese Auffassung keinen Relativismus. Wir können vielmehr die Idee einer mathematischen Tatsächlichkeit uns bilden, die von dem jeweils Besonderen der Anlage des deduktiven Rahmens unabhängig ist. Der Gedanke einer solchen mathematischen Tatsächlichkeit bedeutet andrerseits nicht ein Zurückkommen auf die Ansicht von einer selbständigen Existenz der mathematischen Gegenstände. Es handelt sich dabei nicht um ein Dasein, sondern um beziehungsmäßige, strukturelle Bindungen und um das Hervorgehen (Induziert-werden) von ideellen Gegenständen aus anderen solchen Gegenständen.

Unsere Betrachtung der mathematischen Existenz erfordert aber doch, um nicht einseitig zu sein, noch einen ergänzenden Gesichtspunkt. Wir haben diese Betrachtung im Sinne der Einstellung des rein auf die Gegenständlichkeit gerichteten Mathematikers ausgeführt. Gedenken wir aber unseres methodischen Vergleiches zwischen den mathematischen (grundlagentheoretischen) Ansätzen und denen der Physik, so kann uns das darauf aufmerksam machen, daß jene Analogie auch noch in einem Punkte besteht, den wir noch nicht

vermerkt haben: So wie die theoretische Sprache und die theoretische Ein-
24 stellung der Physik als wesentliche Ergänzung die | Einstellung und Sprache des Experimentators hat, so wird auch in der Mathematik die theoretische Einstellung ergänzt durch eine Betrachtungsweise, die auf das Prozeßhafte der mathematischen Betätigung gerichtet ist. Hier haben wir mit Existenzaussagen zu tun, die sich nicht auf abstrakte Entitäten beziehen, sondern auf Rechenausdrücke, auf formale Entwicklungen, Operationen, Definitionen, Lösungsverfahren usw. Die Bedeutsamkeit einer solchen konstruktiven Betrachtungsweise und Ausdrucksweise – wie sie insbesondere bei dem Brouwerschen Intuitionismus und für die Methode der Hilbertschen Beweistheorie zur Anwendung kommt – wird auch derjenige Mathematiker anerkennen, der nicht gewillt ist, sich mit einer ausschließlich konstruktiven Mathematik, und daher ebensowenig mit einer Tätigkeits-Sprache der Mathematik als alleiniger mathematischer Ausdrucksform zu begnügen.

In diesem Sinne sei noch in ${}_a\underline{\mathrm{B}}_a$ezug auf das Hilbertsche Unternehmen einer vom operativen (konstruktiven) Standpunkt verfahrenden Beweistheorie hervorgehoben, daß das wissenschaftstheoretische Interesse an diesem keineswegs an jene philosophische Lehrmeinung des „Formalismus“ gebunden ist, welche aus der ursprünglichen Fassung der Aufgabe${}_a\mathbf{n}_a$stellung der Be-
A106 weistheorie erwachsen ist. Insbesondere | brauchen wir, um die methodische Fruchtbarkeit der Beweistheorie zu würdigen, nicht die Auffassung, daß die Theorien, welche (für den beweistheoretischen Zweck) der symbolischen Formalisierung unterworfen werden, von da ab mit dem Schema ihres symbolischen Formalismus schlechtweg gleichzusetzen und somit bloß noch als ein technischer Apparat zu betrachten seien.

Auch ist zu beachten, daß durch die beweistheoretische Untersuchung der Widerspruchsfreiheit jene Art der Motivierung des Begriffssystems unserer heutigen Mathematik nicht ihre Bedeutung verliert, welche durch die Anknüpfung an die Probleme erfolgt, aus denen (in mehreren Etappen) das Begriffssystem erwachsen ist. Eine solche Motivierung wird vielmehr bei der Inangriffnahme der beweistheoretischen Untersuchung als schon geleistet angenommen.[2]

Schließlich sei noch bezüglich der Methoden der konstruktiven Beweis-

[2][1] Was die Aufgabe einer *systematischen* Motivierung der Begriffsbildungen der klassischen Mathematik betrifft, so kommen wir damit auf das bereits erwähnte Problem der Gewinnung eines möglichst geeigneten und befriedigenden deduktiven Rahmens, welches ein Hauptthema der heutigen mathematischen Grundlagen-Forschung bildet.

theorie, und auch derjenigen des Brouwerschen Intuitionismus, daran erinnert, daß man mit diesen nicht etwa im Bereich des eigentlich Vorstellungs-Gegenständlichen verbleibt. Der Begriff des Effektiven wird hier im Sinne einer Anpassung an die theoretischen Erfordernisse idealisiert und | erwei- 25
tert, – freilich auf eine grundsätzlich elementarere Art, als es in der üblichen Mathematik geschieht. Der methodische Standpunkt ist daher auch hier nicht ein solcher der Voraussetzungslosigkeit, sondern wir haben es wiederum mit einem ideellen Rahmen zu tun, der generelle Arten der Setzung in sich schließt. Unsere vorherigen Betrachtungen finden darum auch auf diese konstruktive Mathematik Anwendung.

Im ganzen weisen unsere Überlegungen darauf hin, daß es nicht angezeigt ist, den methodischen Unterschied zwischen der Mathematik und den Wissenschaften vom Faktischen, der unleugbar besteht, zu übertreiben, noch auch, die philosophischen Probleme, die sich an die Mathematik knüpfen, zu unterschätzen.

Kapitel 19

Bernays Project: Text No. 20

Zur Beurteilung der Situation in der beweistheoretischen Forschung[†] (1950)

On judging the situation in proof theoretical research

(*Revue Internationale de Philosophie* 27/28, S. 9–13)

---

9 | Wenn ich hier in Kürze über die Situation in der beweistheoretischen Forschung spreche, so erscheint es als angezeigt, dass wir uns vergegenwärtigen, was das Kennzeichnende dieser Forschung ist: Es handelt sich um die systematische Untersuchung der Anwendungsweise und der Auswirkung des logischen Schliessens in den mathematischen Disciplinen, in denen die Begriffsbildungen und Voraussetzungen in solcher Weise fixiert sind, dass mit Hilfe der Ausdrucksmittel der symbolischen Logik eine strikte Formalisierung der Beweise möglich wird.

Wie Sie wissen, hat Hilbert diese Art der Untersuchung vor allem im Hinblick auf die Fragen der Widerspruchsfreiheit angeregt. Er hat aber von vornherein auch die Behandlung von Fragen der Vollständigkeit und der Entscheidbarkeit im Rahmen dieser Untersuchungen ins Auge gefasst, so bereits in dem Vortrag „Axiomatisches Denken" (1917, *vide* [**?**]). In dem Vortrag

[†]An additional last line of the article reads "Technische Hochschule, Zurich."

„Probleme der Grundlegung der Mathematik“ in Bologna (1928, *vide* [**?**]) hat er bestimmte Fragen der Vollständigkeit ausführlicher formuliert.

Freilich hat dabei Hilbert sich Vieles sowohl hinsichtlich der zu gewinnenden Ergebnisse wie hinsichtlich der Methode einfacher vorgestellt, als es sich nachher erwies. Die Erkenntnis dieser grösseren Schwierigkeiten hat bei vielen die Vorstellung erweckt, als habe die beweistheoretische Forschung zu einem definitiven Misserfolg geführt. Ein Blick auf den tatsächlichen Stand der Dinge zeigt aber, dass davon keine Rede ist: die Methoden der beweistheoretischen Betrachtung befin|den sich in reichhaltiger Entwicklung, und 10
in verschiedener Richtung sind erhebliche Resultate erreicht worden. Einige markante Erfolge in Richtung der Hilbert'schen Problemstellungen mögen hier aufgezählt werden.

1. Der Gödel$_{d}$'$_{d}$sche Vollständigkeitssatz (Nachweis der Vollständigkeit des Prädikatenkalkuls der ersten Stufe) nebst den daran geknüpften Erweiterungen.

2. Es gelang, den Begriff der Entscheidbarkeit in solcher Weise zu präzisieren, dass auf Grund dieser Definition systematische Resultate ermöglicht wurden, so insbesondere der Nachweis der Unlösbarkeit des Entscheidungsproblems für den Prädikatenkalkul durch Church, und auf einem zweiten Wege durch Turing.

3. Während durch die letztgenannten Methoden nur Feststellungen von Unentscheidbarkeiten resultierten, gelang es andererseits Tarski, für bestimmte mathematisch nicht triviale Bereiche Entscheidungsverfahren anzugeben. Sowohl in Anknüpfung an diese Resultate wie auch durch die Ergänzungssätze zum Gödel$_{d}$'$_{d}$schen Vollständigkeitssatz haben sich Anwendungen auf die Mathematik ergeben, welche auch für den nicht grundlagentheoretisch interessierten Mathematiker lohnend sind.

4. Was die Fragen der Widerspruchsfreiheit betrifft, so ist zwar nicht ein Widerspruchsfreiheitsbeweis der vollen Analysis vom finiten Standpunkt, wohl aber ein solcher für die beschränkte Analysis (etwa im Sinne von Weyl oder im Sinne der verzweigten Stufentheorie) von einem konstruktiven Standpunkt gelungen. Zuerst wurde ein solcher Nachweis für den zahlentheoretischen Formalismus von Gentzen erbracht; Gentzen hatte aber auch schon die Ausdehnung seiner Methode auf die verzweigte Analysis in Aussicht genommen. Diese wurde dann von Lorenzen, Schütte und Ackermann durchgeführt, wobei auch die Beweismethode durchsichtiger wurde. Zu erwähnen ist auch ein neuer durchsichtiger Widerspruchsfreiheitsbeweis für die Zahlentheorie von Stenius. Bemerkenswert ist ferner, dass die Erweiterung des

finiten Standpunktes zu dem im freieren Sinne konstruktiven Standpunkt es ermöglicht, Beweise zu betrachten, die nicht in vollem Sinne formalisiert zu sein brauchen, sondern Teile enthalten können, in denen metamathema-
11 tisch Herleitungen angegeben werden, | die jeweils von einem syntaktischen Zahlparameter abhängen. Dadurch kommt man über den Bereich derjenigen Systeme hinaus, auf welche das Unvollständigkeitstheorem von Gödel Anwendung findet.

Dieses bedeutende Theorem ist übrigens keineswegs bloss als ein negatives Ergebnis zu beurteilen, vielmehr hat es im Bereich der Beweistheorie eine ähnliche Rolle wie etwa die Entdeckung der Irrationalzahlen im Bereich der Arithmetik.

5. Schliesslich hat man sich auch darum bemüht, die Feststellung der Widerspruchsfreiheit zu ergänzen im Sinne der allgemeineren Fragestellung: was kann aus der formalen Beweisbarkeit eines Satzes vom konstruktiven Standpunkt entnommen werden? In diese Richtung gehen die Untersuchungen von Kreisel.

Nach alledem wäre es offensichtlich ganz unangemessen, von einem allgemeinen Fiasko der Beweistheorie zu sprechen. Andererseits aber muss anerkannt werden, dass nicht nur das Wesentlichste auf diesem Gebiete zu tun bleibt, sondern dass bezüglich des Methodischen keine klare Entschiedenheit und keine Einhelligkeit besteht. Ich möchte in$_a$ $\underline{\mathrm{B}}_a$ezug hierauf einige Punkte hervorheben.

Man spricht heute vielfach in einem etwas herablassenden Ton von der „naiven Mengenlehre“. Wir müssen uns aber vergegenwärtigen, dass es jedenfalls naiv ist zu meinen, dass wir bei dem Rückzug auf den axiomatischen Standpunkt, wenn dieser nicht durch irgendeine inhaltliche Einstellung unterbaut ist, noch etwas Gleichwertiges wie vordem zur Verfügung haben. Der Rückzug auf die Axiomatik ist beim Falle der nichteuklidischen Geometrie deshalb weniger problematisch, weil wir da die Arithmetik und Mengenlehre als gegebene Erkenntnis zu$_a$ $\underline{\mathrm{Gr}}_a$unde legen. Im Rahmen der Arithmetik (Analysis) finden die Erörterungen über die möglichen Geometrien, insbesondere die modelltheoretischen Betrachtungen, statt. Indem dieser Rahmen angefochten wird und die Mengenlehre ihrerseits nur die Rolle einer axiomatischen Theorie erhält, wird es notwendig, einen anderen Rahmen zu$_a$ $\underline{\mathrm{G}}_a$runde zu legen, der als die eigentliche Arithmetik zu fungieren hat. In Hinsicht auf die Wahl dieses methodischen Rahmens sind verschiedene Auffassungen möglich.

12 Die Mindest-Anforderung an eine verschärfte Axiomati|sierung ist die,

dass die Gegenstände nicht einem als vorgängig gedachten Bereich entnommen werden, sondern durch Erzeugungsprozesse konstituiert werden. Es kann aber dabei die Meinung sein, dass durch diese Erzeugungsprozesse der Umkreis der Gegenstände determiniert ist; bei dieser Auffassung erhält das *tertium non datur* seine Motivierung. In der Tat kann Offenheit eines Bereiches in zweierlei Sinn verstanden werden, einmal nur so, dass die Konstruktionsprozesse über jeden einzelnen Gegenstand hinausführen, und andererseits in dem Sinne, dass der resultierende Bereich überhaupt nicht eine mathematisch bestimmte Mannigfaltigkeit darstellt. Je nachdem die Zahlenreihe in dem erstgenannten oder in dem zweiten Sinne aufgefasst wird, hat man die Anerkennung des *tertium non datur* in$_a$ B$_a$ezug auf die Zahlen oder den intuitionistischen Standpunkt. Bei dem finiten Standpunkt kommt noch die Anforderung hinzu, dass die Überlegungen an Hand der Betrachtung von endlichen Konfigurationen verlaufen, somit insbesondere Annahmen in der Form allgemeiner Sätze ausgeschlossen werden.

Die maximale Anforderung an den methodischen Rahmen geht noch über die des finiten Standpunktes hinaus. Tatsächlich enthält dieser, zum Zweck der Möglichkeit systematischer Betrachtung, Existenzannahmen, die vom Standpunkt des eigentlich Konkreten nicht selbstverständlich sind. Die Anwendung solcher Existenzannahmen ist z. B. notwendig, wenn wir die Eliminierbarkeit der vollständigen Induktion, im Sinne von Lorenzen zeigen wollen. Ursprünglich wollte auch Hilbert den engeren Standpunkt einnehmen, der nicht den anschaulichen Allgemeinbegriff der Ziffer voraussetzt. Das ist unter anderem aus seinem Heidelberger Vortrag (1904, *vide* [**?**]) zu ersehen. Es war schon eine Art von Kompromiss, dass er sich zu dem in seinen Publikationen eingenommenen finiten Standpunkt entschloss. Wenn wir uns dieses klarmachen, dann erscheint die Nötigung, von dem finiten Standpunkt zu einem erweiterten konstruktiven Standpunkt überzugehen, nicht als so katastrophal.

Freilich wird eine philosophische Umstellung erfordert. Man meint vielfach, man müsse entweder eine absolute Evidenz annehmen, oder das Moment der Evidenz für die Wissenschaften überhaupt preisgeben. Anstelle
dieses „Alles oder Nichts“ | erscheint es als sachgemässer, dass wir uns die 13
Auffassung von der Evidenz als etwas Erworbenem bilden. Der Mensch gewinnt Evidenzen, wie er das Gehen oder wie der Vogel das Fliegen lernt. Hiermit kommt man zu der sokratischen Anerkennung unseres grundsätzlichen Nicht-Vorauswissens. Wir können im Theoretischen nur Auffassungen und Standpunkte versuchen und eventuell mit ihnen geistigen Erfolg haben.

Es ist nicht die Meinung, dass mit diesen Auffassungen schon die Grundlagenproblematik im Prinzip überwunden sei. Aber wenigstens wird durch eine solche Bescheidung erreicht, dass wir durch Entdeckung von Antinomien nicht jeweils völlig aus dem Konzept gebracht werden. Solche Antinomien erscheinen dann vielmehr als lehrreiche Anhaltspunkte für die richtige Wahl unserer Ansätze und Methoden.

Die noch nicht überwundene Problematik in der Grundlagenforschung besteht in verschiedener Hinsicht: einmal in Hinsicht auf die Wahl des methodischen Standpunktes in der Grundlagenforschung, sowie auch auf die Wahl des deduktiven Rahmens, andererseits in$_a$ Be$_a$zug auf die Auffassung von der Mathematik. In betreff dieses zweiten Punktes ist eine Entscheidung an Hand der Grundlagenforschung selbst vielleicht nicht zu erwarten, jedoch in Hinsicht auf die ersten Fragen ist es wohl nicht zu unbescheiden, zu hoffen, dass die Gegenüberstellung der Ergebnisse der verschiedenen Forschungsrichtungen in absehbarer Zeit einer der Verfahrensweisen ein deutliches Übergewicht verleihen wird.[a]

15 | DISCUSSION

Arnold Schmidt. — Meine Einführung von Widerspruchsfreiheitsgraden, die Herr Bernays erwähnte, sollte lediglich dazu dienen, die Problematik der Rolle, die die Widerspruchsfreiheit erkenntnistheoretisch zu spielen vermag, zu unterstreichen. [...]

Zu den Erweiterungen, die der finite Standpunkt im Laufe seiner Entwicklung erfahren hat, möchte ich anmerken, dass das Tertium non datur bei allen Stufen dieser Entwicklung ausgeschlossen bleibt.

Was das Evidenzproblem angeht, so wird man in einer gewissen Analogie zur Interpetation des Kantischen Apriori sagen dürfen, dass der Einzelne zwar Evidenzen durch Nachdenken erlernen kann, dass aber die Kriterien für Evidenz von solcher Erfahrung unabhängig sein müssen, um trügerische Evidenz, die durch Gewöhnung entstehen kann, auszuschliessen. So sehr ich anerkenne, dass uns Sachverhalte, die nicht auf den ersten Blick evident sind,

[a]The next page (p. 14) contains an abstract of Tarski's lecture on decision problems at the same meeting, followed by a discussion of both talks that covers the remaining pages (pp. 15–21); participants of the discussion, besides those mentioned below, were Quine, Dingler, Bar-Hillel, and Perelmann. The excerpt below includes all those remarks and replies that are related to Bernays' talk.

durch eine gründliche Klärung evident werden können, möchte ich doch andererseits betonen, dass es meines Erachtens nur *einerlei* Evidenz, also keine relative, gestufte geben kann. Die Aufgabe des Beweises besteht, von hier aus gesehen, darin, Nichtevidentes auf Evidentes zurückzuführen.
Paul Bernays. — Was den ersten Punkt betrifft, so besteht keine Meinungsverschiedenheit. Was die zweite Bemerkung | angeht, so mache ich darauf 16
aufmerksam, dass ich keine Geschichte habe schreiben wollen. Wäre dies der Fall gewesen, so würde ich fünf Stufen der Meta-Mathematik unterschieden haben: 1. finiten Standpunkt, 2. definiten Standpunkt (${}_a\underline{(}{}_a1_a\underline{)}_a$ mit Existenzannahmen), 3. Intuitionismus, 4. tertium non datur, 5. imprädikative Begriffsbildung. Diese Ordnung gibt mehr und mehr Freiheit. Während es möglich gewesen ist, intime Übereinstimmungen anzuweisen zwischen Intuitionismus (3) und klassischem Standpunkt (4), ist dies nicht gelungen für (4) und (5), obwohl Gentzen darum gerungen hatte. Der entscheidende Punkt liegt also jenseits der Einführung des tertium non datur. Ich möchte endlich sagen, dass man Evidenz nicht bloss objektiv konstruieren, und subjektive Bestimmtheiten nicht vergessen darf.
[...|... In Erwiderung auf Behmann, der das Helmholtz-Argument für die 18
Evidenz nicht-euklidischer Geometrien heranzog, fügte Bernays hinzu:] Obwohl es für anders gebildete Wesen eine andere Evidenz geben könnte, so ist jedoch unser Anliegen festzustellen, was Evidenz für uns ist. [...]
Alfred Tarski. — [... | ...] Furthermore I should like to remark that the- 19
re seems to be a tendency among mathematical logicians to overemphasize the importance of consistency problems [...]. Gentzen's proof of the consistency of arithmetic is undoubtedly a very interesting metamathematical result, which may prove very stimulating and fruitful. I cannot say, however, that the consistency of arithmetic is now much more evident to me (at any rate, perhaps, to use the terminology of the differential calculus, more ${}_d$**evident**${}_d$than by ${}_a$**an**${}_a$ epsilon) than it was before the proof was given.
Paul Bernays. — My thought has not been rightly interpreted. I did not wish to say that Gentzen's proof made arithmetic or truths about arithmetic more evident. But I tried to stress that some mathematical methods ${}_d$**allow**${}_d$simultaneously ${}_d$**to**${}_d$show ${}_a$**deducibility**${}_a$ and validity. [...]

Kapitel 20

Bernays Project: Text No. 21

Die Mathematik als ein zugleich Vertrautes und Unbekanntes† (1954)

Mathematics as both familiar and unknown

(*Synthese* IX (1953–55), S. 465–471;
repr. in *Abhandlungen*, S. 107–112)

465/A107 | Wenn der Menschengeist sich beschwert oder herabgedrückt fühlt durch das viele Rätselhafte im Dasein, durch den Eindruck unserer weitgehenden Unwissenheit in so vielen Bereichen, der Mangelhaftigkeiten der sprachlichen Wiedergabe und Verständigung, dann wendet er sich wohl gern dem Gebiet der Mathematik zu, in welchem ein deutliches und genaues Erfassen von Gegenständlichkeiten sich findet und Gewinnung von Einsicht durch angemessene Begriffe in so befriedigender Weise erreicht wird. Hier fühlt der menschliche Geist sich heimisch, hier erlebt er den Triumph, daß die Verwendung und Verbindung von ganz elementaren Vorstellungen, wie sie uns aus dem Kinderspiel vertraut sind, bedeutsame, überraschende und weittragende Resultate zu$_{a}\underline{\ \mathrm{T}}_{a}$age bringt. An Konkretes als Ausgangspunkt anknüpfend$_{d_1}\underline{,}_{d_1}$ betätigt sich das mathematische Denken in anschaulicher Fixierung und Vergegenwärtigung seiner Gegenstände$_{d_1}\underline{,}_{d_1}$ und von da führt es

†The subtitle reads, "Vortrag zur Gedächtnisfeier für B. Nieuwentijt in Purmerend."

durch Begriffsbildungen und gedankliche Verflechtung von Feststellungen zu Ergebnissen, die wiederum sich auf das Konkrete anwenden lassen und sich hier in imponierender Weise als erfolgreich erweisen.

In dreifacher Art also zeigt sich die mathematische Tätigkeit als potent und leistungskräftig: einmal haben wir hier ein originäres Vorstellen in ausgeprägter Form als Quelle des Erkennens und auch als Quelle einer sich an dieses Vorstellen knüpfenden Begriffsbildung. Wir haben ferner hier das logische Schließen als ein mächtiges Erkenntnismittel, welches eigentlich nur in diesem Gebiet auf wirklich wesentliche Art fungiert. Es kommt aber noch ein Drittes hinzu: wir haben in der Mathematik nicht nur die Betätigung der Anschauung und des logischen Denkens, in welcher diese in unserer inneren Natur beheimateten Kräfte zur freien und ergiebigen Entfaltung gelangen, sondern auch die Anknüpfung an vertraute Gegenständlichkeiten der
alltäglichen Wahrneh|mung und überdies noch jene erstaunliche Bewährung, 466
welche die Mathematik in dem erweiterten Bereich der Erfahrung findet, in welchem unsere gewöhnliche Wahrnehmung nicht mehr zur Orientierung ausreicht.

Diese drei Arten des Erfolges und des Befriedigenden der Mathematik
entsprechen etwa den drei von F. Gonseth unterschiedenen | Aspekten: dem A108
intuitiven, dem theoretischen und dem experimentellen Aspekt.

Bei der näheren Betrachtung der Entwicklung der Mathematik und ihrer Anwendungen kommen wir freilich bald zu Momenten des Problematischen. Beginnen wir mit der Anwendung der Mathematik auf die Naturerklärung, so zeigt uns hier die historische Entwicklung eine zweimalige Enttäuschung in dem Sinne, daß man durch die Mathematik eine Vertrautheit mit der Wirklichkeit zu erlangen glaubte, welche sie in solcher Art de facto nicht liefert.

Das erstemal geschah dieses bei der Lehre der Pythagoräer, welche die Möglichkeit jener Zurückführung von qualitativen Unterschieden in den Wahrnehmungsobjekten auf Zahlenverhältnisse entdeckten, wie sie in der theoretischen Physik vollzogen wird. In der Verfolgung dieser Entdeckung entstand die Hoffnung, an Hand des Zahlbegriffes ein letztes eindringendes Verstehen der Wirklichkeit und somit eine geistige Vertrautheit mit dem Wirklichen zu gewinnen. Wie bekannt, erlitt diese Lehre eine grundsätzliche Anfechtung durch die Entdeckung der irrationalen Größen. Freilich lernten die Griechen bald auch mit den irrationalen Größen korrekt deduktiv umzugehen, aber dieses Verfahren des Eudoxos war doch recht abstrakt, und die an sie anknüpfende Geometrie Euklid$_{d_2}$'$_{d_2}$s war in ihrer ganzen axiomatischen Haltung viel zurückhaltender als die pythagoräische Lehre. Hier wurde auch bereits einmal eine strikte Absonderung des rein Mathematischen von der Naturwissenschaft vollzogen.

Die zweitmalige Erweckung der Hoffnung auf mathematisches Verstehen der Wirklichkeit war die, welche sich mit dem Beginn der Neuzeit einstellte. Unter dem Einfluß der mächtigen Entwicklung, welche damals die theoretische Naturwissenschaft, vor allem aber auch die Mathematik selbst nahm, entstand jene mechanistische Naturansicht, die so viele Geister gefangennahm. Diese war zwar von vornherein paradox, aber die Kantische Philosophie lieferte einen Modus, durch die Gegenüberstellung des An-sich-wirklichen und der Erscheinungen, die mechanistische Ansicht für den Bereich der Erscheinungen durchzuführen und diesen Bereich als etwas anzusehen,
467 was durch die Art unseres anschaulichen Vorstel|lens beherrscht ist. Die
durch unsere Anschauungsformen beherrschte, mathematisch strukturierte Natur erhielt damit den Charakter des uns Vertrauten.

Daß die heutige Entwicklung der theoretischen Physik sich von dieser Auffassung grundsätzlich entfernt hat, davon ist so oft und so viel die Rede, daß ich hierüber nicht näher zu sprechen brauche. Mathematik wird frei-
A109 lich heute in der theoretischen Physik in großem Ausmaße | und auch mit
großem Erfolge verwendet. Aber von einem Standpunkt der anschaulichen Vertrautheit ist keine Rede mehr.

Doch diese Schwierigkeiten betreffen die theoretische Naturwissenschaft, nicht die Mathematik selbst. Wenn wir für diese die Entwicklung kurz überblicken, so ist das Bild, das sich uns zeigt, zunächst das eines imposanten Siegeszuges. Dieser hebt an mit der formalen Entfaltung der Infinitesimalrechnung, durch welche insbesondere auch das dem Namen nach Irrationale in der Größenlehre seinen Charakter als Apeiron verlor. Die mannigfachen schönen und gesetzlich einfachen Darstellungen irrationaler Größen versetzten solche Größen in den Bereich des uns Vertrauten. Allerdings entbehrte anfangs das Verfahren der Infinitesimalrechnung einer hinlänglichen methodischen Präzision, aber diese wurde ja dann im 19. Jahrhundert erreicht.

In diese Zeit fällt zugleich jener gewaltige Ausbau der Mathematik, welcher um so mehr verdient hervorgehoben zu werden, als er in der gebildeten Menschheit nicht hinlänglich zum Bewußtsein gelangt ist. Es entwickelte sich eine freiere Abstraktion und eine verstärkte Begriffsbildung. So wurden neue Methoden ausgebildet$_{d_1,d_1}$ und es entstanden eine ganze Reihe von neuen mathematischen Disziplinen, in denen das mathematisch begriffliche Operieren sich zu großer Kraft und Schönheit und einem großen Reichtum der Gedankenbildung entfaltete. Ein hohes Niveau des rationalen Verstehens ist hier erreicht und eine neue Art der geistigen Vertrautheit mit Gegenständlichkeiten gewonnen.

Im Zusammenhange dieser Entwicklung erfolgten auch zwei geistesgeschichtlich bedeutsame Ereignisse: Die Entdeckung der nicht-euklidischen Geometrie und ferner die Erfüllung des Leibniz$_{d_2}$'$_{d_2}$schen Programmes im Gebiete der Logik durch die Aufstellung des logischen Kalkuls, der zwar in seiner anfänglichen Form als spielerisch erscheinen konnte, dann aber so ausgebaut wurde, daß er die kalkulmäßige Gestaltung der mathematischen Beweisführungen ermöglichte.

Während nun so die Mathematik sich zu immer neuen Formen | und 468
Bereichen des Verstehens aufschwang, verlor sich gleichwohl in mancher Hinsicht der Charakter des Vertrauten, insbesondere dadurch, daß dasjenige, was anfänglich den Ausgangspunkt und das Zentrale bildete, diese Stellung einbüßte: Nicht nur, daß die Euklidische Geometrie ihre ausgezeichnete Stellung und damit ihre Rolle als evidente Raumlehre verlor, auch die arithmetische Größenlehre erscheint jetzt mehr nur als die Lehre von einer Struktur unter anderen. Der beherrschende Gesichtspunkt ist jetzt der einer allgemeinen formalen Strukturlehre. Dieser aber führte in zweifacher Weise auf Schwierigkeiten: einerseits durch Antinomien, welche sich daraus
ergeben, daß Inbegriffe möglicher | Strukturen, die sich in analoger Weise A110
wie die Zahlenreihe als mathematische Gegenständlichkeiten präsentieren, gleichwohl nicht ohne Widerspruch so aufgefaßt werden können, andererseits in dem befremdlichen Aspekt, welcher sich in der Cantor$_{d_2}$'$_{d_2}$schen Mengenlehre darbot, indem hier ein ungeheurer Aufstieg unendlicher Kardinalzahlen hervortrat, angesichts dessen die unendliche Zahlenreihe und die Mannigfaltigkeit des mathematischen Kontinuums zu einer Winzigkeit herabsinken, noch in einem grundsätzlich stärkeren Ausmaß, als es für die Größe unserer Erde im Vergleich mit astronomischen Ausdehnungen der Fall ist. Man wurde so vielerseits an der Berechtigung und Sinnhaftigkeit der angewandten Methoden irre, und es ertönte der Ruf „Zurück zum Konkreten$_d$"$_d$!“ Vorher anerkannte und gebräuchliche Begriffsbildungen und Schlußweisen wurden nicht mehr gebilligt. Man unternahm Gestaltungen der Mathematik in neuem Rahmen. Ein solcher ist ja insbesondere der des Brouwer$_{d_2}$'$_{d_2}$schen Intuitionismus. Andererseits faßte Hilbert den Gedanken, durch Verwertung der Formalisierung des mathematischen Schließens eine stärkere Anknüpfung der Mathematik an das konkrete Vorstellen zu gewinnen.

Kürzlich hat Herr Heyting in seinem Vortrag auf dem Brüsseler Kon-

greß die Sachlage in der mathematischen Grundlagenforschung erörtert. Er kommt hier auf die Frage nach dem Gegenstand der Mathematik zu sprechen und findet, daß sie für die klassische Mathematik (d. h. die im 19. Jahrhundert ausgebildete Mathematik) nicht befriedigend beantwortbar sei. Den Grund hierfür erblickt er in dem Umstande, daß in der klassischen Mathematik intuitive und formale Elemente ohne deutliche Unterscheidung kombiniert sind. Andererseits erscheint ihm auch die schärfere Herausarbeitung der beide$_{a_1}$n$_{a_1}$ Momente, wie sie für das intuitive Moment durch Brouwer$_{d_2}$'$_{d_2}$s Intuitionismus, für das formale durch Hilbert$_{d_2}$'$_{d_2}$s Beweistheorie erfolgt, für
469 eine erschöpfende Auseinandersetzung mit der | hier vorliegenden erkenntnistheoretischen Problematik nicht als zulänglich, und er sieht hierin ein Anzeichen dafür, daß die Frage nach dem Objekt schlecht formuliert ist und durch eine adäquatere Fragestellung ersetzt werden muß.

Diesem Fazit können wir sicherlich zustimmen. Tatsächlich knüpft sich an die Frage nach dem Gegenstand leicht eine Voraussetzung, die keineswegs selbstverständlich ist, nämlich, daß in der wissenschaftlichen Forschung der Gegenstand uns allenthalben vorgängig gegeben sein müsse, während doch die Betrachtung der Wissenschaften zeigt, daß die Gegenstände theoretischer Disziplinen in genauerer Bestimmtheit meist erst aus den begrifflichen Konzeptionen erwachsen. Auch brauchen wir die von Herrn Heyting an der
A111 klassischen Mathematik vermerkte | Mischung intuitiver und formaler Elemente nicht als etwas Mangelhaftes anzusehen, oft besteht die Rolle wichtiger begrifflicher und methodischer Konzeptionen gerade darin, daß sie eine Art von Ausgleich zwischen anschaulichen und theoretisch-formalen Intentionen liefern.

Ein solcher Ausgleich liegt bereits in der Grundeinstellung der Zahlentheorie vor, und zwar auch schon bei ihrer elementaren („finiten“) Behandlung. Wir müssen uns darüber klar sein, daß wir uns bereits bei der finiten Zahlentheorie nicht mehr im Bereich des eigentlich Konkreten befinden; die großen Zahlen können ja nicht mehr in der Vorstellung oder in der Wahrnehmung vorgeführt werden. Insbesondere ist vom Standpunkt einer im eigentlich Konkreten verbleibenden Betrachtung nicht ersichtlich, was eine auf beliebige Zahlen sich erstreckende Allaussage bedeuten soll. Der Versuch, eine solche Allaussage durch das Vorhandensein eines Beweises zu deuten, führt nicht zum Ziel. Nämlich, wenn ein inhaltlicher Beweis, etwa im Sinne des Intuitionismus, gemeint ist, so besteht ja ein solcher in einem gewissen Verfahren, welches aufgezeigt wird. Es muß dann aber ersichtlich sein, daß dieses Verfahren in jedem Einzelfall das Gewünschte liefert; eine solche Feststellung ist jedoch wieder eine zahlentheoretische Allaussage. Meint man aber eine formale Herleitung im Rahmen eines deduktiven Systems, so muß man sich doch von dem sachgemäßen Funktionieren des deduktiven Formalismus überzeugen, und damit kommt man wiederum auf eine Feststellung von der Form einer zahlentheoretischen Allgemeinheit.

Wir können den geistigen Schritt, der zu der spezifisch zahlentheoretischen Betrachtung führt, uns etwa so vergegenwärtigen: Zunächst sind wir uns der Freiheit bewußt, von einer erreichten Stelle im Zählprozeß jeweils noch um Eins fortzuschreiten; nun | aber machen wir den Ansatz einer Bin- 470
dung, wodurch eine Funktion gesetzt ist, die jedweder Zahl einen Nachfolger zuordnet; damit tritt an die Stelle eines progressus in indefinitum ein progressus in infinitum. Daß diese Vorstellung von der unendlichen Zahlenreihe durchführbar ist, ist von vornherein gar nicht selbstverständlich, und erst auf Grund der geistigen Erfahrung des Gelingens bildet sich hier ein Gefühl der Vertrautheit, ja der Selbstverständlichkeit$_{a_2}\underline{,}_{a_2}$ als eine erworbene Evidenz.

Die Philosophie der Mathematik tendiert zumeist dahin, anstelle solcher erworbener Evidenz eine Evidenz ab ovo zu setzen. Dadurch wird man entweder verleitet, die Evidenz ihrem Umfange nach zu überspannen, da man alle eventuell erreichbaren Stufen einbegreifen will, was zu den Antinomien führt, oder aber eine bestimmte Stufe der | Evidenz als absolut zu setzen, A112
woraus sich dann ein Erfordernis zur Einschränkung der Mathematik ergibt, und zwar in einer Weise, bei der wir die Freiheit der geistigen Entscheidung unnötigerweise einbüßen.

Diesen Unzuträglichkeiten können wir entgehen, wenn wir darauf verzichten, die Mathematik als etwas ihrerseits Selbstverständliches anzusehen. Das Moment des Vertrauten, das$_{a_1}\underline{\mathrm{s}}_{a_1}$ wir in mathematischen Bereichen, besonders in der elementaren Mathematik finden, ist eine erworbene Vertrautheit. Wohl ist Mathematik vornehmlich ein Begreifen, aber nicht etwas Begriffenes. Die Möglichkeit, die in der Vorstellung verfolgbaren Beziehungen von Zahlen und Figuren durch strenge mathematische Gesetze mit Erfolg zu extrapolieren, ist im Grunde ebensowenig selbstverständlich wie die Möglichkeit der Auffindung physikalischer Naturgesetze. Wir müssen wohl diesbezüglich auf die sokratische Weisheit, d. h. das Erkennen unseres Nichtwissens, zurückkommen. Die Kantische Meinung, daß die Struktur unseres eigenen Erkennens für uns a priori bestimmbar sein müsse, beruht offensichtlich auf einer Täuschung. Die Struktur unserer geistigen Organisation ist ja für unser Bewußtsein gleichermaßen transzendent wie die Beschaffenheit der äußeren Natur.

Auch ist es wohl schwerlich zutreffend, daß das Moment des Mathematischen nur durch die Art unseres anschaulichen Vorstellens in die Naturbetrachtung hineinkommt. Freilich können wir anerkennen, daß die Welt des Mathematischen uns als ein Gebiet des Phänomenalen entgegentritt, so daß man mit Bezug auf die Mathematik, in einem gegenüber Hegel abgewandelten Sinne, von einer Phänomenologie des Geistes sprechen kann. Dieses Phänomenale geht aber gewiß über das hinaus, was wir im Individuum als von vornherein angelegt annehmen können, schon darum, weil es seiner Struktur nach etwas Offenes ist. Wenn man aber von „Geist$_{d_2}$”$_{d_2}$“, „Verstand$_{d_2}$”$_{d_2}$“ oder „Form der Anschauung$_{d_2}$”$_{d_2}$“ im Sinne von etwas spricht, das über die konkrete psychische Konstitution hinausgeht, dann gibt es keinen ersichtlichen Unterschied mehr zwischen dem, was zum Subjekt gehört, und irgendeinem Element der Weltordnung.

Tatsächlich führt die philosophische Spekulation über die Mathematik in so hohe Regionen. Wenn wir die Mathematik nicht vom Standpunkt des unmittelbaren Gebrauchs ansehen, wo sie uns das Erlebnis des Vertrauten und der Evidenz verschafft, sondern philosophisch ihren Gründen nachgehen wollen, so dürfen wir uns von der Mathematik wahrlich keine zu einfache Vorstellung machen.

Kapitel 21

Bernays Project: Text No. 22

Betrachtungen zum Paradoxon von Thoralf Skolem† (1957)

Considerations regarding the paradox of Thoralf Skolem

(*Avhandlinger utgitt av Det Norske Videnskaps-Akademie i Oslo*, S. 3-9; repr. in *Abhandlungen*, S. 113–118)

3/A113 | Vor jetzt etwa 35 Jahren, anläßlich eines Kongresses in Helsingfors, machte Th. Skolem zuerst auf eine paradoxe Konsequenz eines Theorems von Löwenheim aufmerksam, für welches er zwei Jahre vorher mittels der nach ihm benannten logischen Normalform einen vereinfachten Beweis gegeben hatte. Dieses bekannte Löwenheim$_{d_2}$'$_{d_2}$sche Theorem besagt, daß für eine jede mathematische Theorie, die im Rahmen der elementaren Prädikatenlogik – d. h. ohne gebundene Prädikatenvariablen – axiomatisiert ist, sofern sie

†The facing page of the original text reads,

> Der Norwegischen Akademie der Wissenschaften zum 100-jährigen Jubiläum dargebracht.
>
> Dedicated to the Norwegian Academy of Science on occasion of its centennary.

überhaupt ein erfüllendes Modell hat, dann auch ein solches Modell existiert, bei welchem die Individuen natürliche Zahlen sind. Der Satz läßt sich auf den Fall ausdehnen, daß in dem Axiomensystem außer eigentlichen Axiomen auch ein oder mehrere Axiomen*schemata* auftreten, worin als Parameter ein beliebig nach den formativen Regeln des Axiomensystems bildbares Prädikat$_{d_2,d_2}$ bzw. eine im gleichen Sinne beliebige Menge oder Funktion vorkommt.

Skolem bemerkte nun, daß sich dieses Theorem auf die axiomatische Mengenlehre anwenden läßt, sofern diese gegenüber der ursprünglichen Zermelo$_{d_2}$'$_{d_2}$schen Fassung durch die Präzisierung des Begriffs der definiten Eigenschaft verschärft ist. Die Möglichkeit einer solchen Verschärfung, wodurch sich das Axiomensystem kalkülmäßig durch eigentliche Axiome und Schemata darstellen läßt, war kurz zuvor von Skolem und auf andere Weise von A. Fraenkel erkannt worden. Übrigens gelang es J. v. Neumann sogar, ein System von endlich vielen Axiomen (ohne Schemata) für die Mengenlehre aufzustellen.

Dadurch ergab sich die Möglichkeit solcher Modelle der Mengenlehre, worin die Mengen durch natürliche Zahlen repräsentiert werden. Diese Möglichkeit ist darum sehr paradox, weil gerade nach den Sätzen der Mengenlehre die Kardinalzahlen der vorkommenden Mengen in | schwindelhafte Höhe stei- 4
gen, so daß man jedenfalls weit über die Unendlichkeit der Zahlenreihe (das Abzählbar-Unendliche) hinauskommt.

Daß ein eigentlicher Widerspruch hier nicht vorliegt, ergibt sich, wie man weiß, aus dem Umstand, daß die Abzählungen, die im axiomatischen Rahmen als solche fungieren, noch nicht alle Möglichkeiten von Abzählungen erschöpfen. Der Mengenbegriff erfährt durch die | axiomatische Festlegung A114
eine Einschränkung, derart, daß man, wenn man generell auf der Forderung axiomatischer Präzisierung besteht, von „Menge" nur relativ zu einem jeweils festgelegten Rahmen sprechen kann, und diese Relativierung erstreckt sich auf eine Reihe weiterer Begriffe, die eng mit dem Mengenbegriff verbunden sind, so insbesondere den Begriff der umkehrbar eindeutigen Abbildbarkeit zweier Gesamtheiten, und damit auch auf den Begriff der Mächtigkeit (verallgemeinerter Anzahlbegriff), sowie speziell den der Abzählbarkeit.

Man hat zunächst den Eindruck, daß das vorgefundene Paradoxon vor allem die Scheinbarkeit der Mächtigkeitsunterschiede und speziell das Illusorische eines eigentlich Überabzählbaren erweise. Zugleich auch wird der Gedanke angeregt, ob nicht, angesichts der festgestellten Relativität, einer axiomatischen Anlage der Mathematik und insbesondere der Analysis ein operativer Aufbau vorzuziehen sei.

Eine operative Auffassung der Mathematik wird von vielen verfochten.

Für diese ist charakteristisch, daß sie den Gegenstand der Mathematik nicht in etwas vorgängig Vorliegendem erblickt, das durch die Begriffsbildungen und axiomatischen Beschreibungen für unser Erkennen zugänglich gemacht werden soll, sondern das mathematische Operieren selbst und die Gegenständlichkeiten, die darin zustande kommen, als das Thema der Mathematik ansieht. Die Mathematik soll hiernach ihre Gegenstände gewissermaßen selbst erzeugen. Damit ist eo ipso der Charakter des Arithmetischen vorgezeichnet, da ja die Strukturen des operativen Erzeugens nicht wesentlich allgemeiner sind als die der Zahlenreihe.

Hierin liegt einerseits eine Stärke, andererseits eine Schwäche dieses Standpunktes. Eine Stärke besitzt er insofern, als ja das arithmetische (konstruktive, kombinatorische) Denken methodisch durch seine Elementarität und Anschaulichkeit ausgezeichnet ist. Dennoch mag es bezweifelt werden, ob wir mit diesem für die Mathematik auskommen und ob eine im Sinne des
5 Operativen sozusagen monistische | Konzeption von der Mathematik ihrem Gehalt – auch nur soweit er schon besteht – voll gerecht werden kann.

Dieser Gedanke wird insbesondere bestärkt, wenn wir die Unternehmungen eines operativen Aufbaus der Analysis betrachten, wie sie in neuerer Zeit unter verschiedenen programmatischen Einstellungen erfolgt sind. Gemeinsam zeigt sich bei allen diesen Arten des Aufbaus, daß wir hier durch Unterscheidungen beschwert werden, welche für die geometrische Idee des Kontinuums von keiner Relevanz und andererseits für das widerspruchslose Funktionieren der Begriffsbildungen nicht erforderlich sind. Das übliche
A115 Verfahren der klassischen Analysis | erweist sich in dieser Beziehung als weit überlegen; und wenn geschichtlich die Behandlung der Analysis mit einem operativen Verfahren begonnen hätte, so wäre die Auffindung der Möglichkeit der soviel einfacheren klassischen Methoden eine eminente Entdeckung gewesen, kaum weniger, als sie ja nach anderer Richtung, nämlich gegenüber der Unschärfe des vorherigen Operierens in der Analysis, de facto einen eminenten Fortschritt bedeutete.

Der Sinn einer angemessenen Begriffsbildung für die Analysis liegt allem Anschein nach in einem geeigneten Kompromiß. Wir können uns das etwa folgendermaßen plausibel machen. Die widerstrebenden Momente für die zu wählende Begriffsbildung sind diejenigen der in der Idee des Konti$_{d_2}\underline{\mathrm{m}}_{d_2 a_2}\underline{\mathrm{n}}_{a_2}$uums intendierten Homogenität einerseits und des Erfordernisses der begrifflichen Unterscheidungen für die Maßbestimmung der Größen andererseits. In der Zahlenreihe ist arithmetisch betrachtet jedes Element ein Individuum mit seinen ganz besonderen Eigenschaften; geometrisch angesehen haben wir hier bloß die Aufeinanderfolge von sich wiederholendem Gleichartigen. Die Aufgabe bei der Bildung einer Theorie des Kontinuums ist nicht einfach ein Beschreiben, sondern eine Versöhnung zweier auseinanderstrebender Tendenzen. Bei der operativen Behandlung erhält die eine so sehr das Übergewicht, daß dabei die Homogenität zu kurz kommt.

Die Untersuchungen über das Effektive und über die Feinstruktur in den Bildungen von Zahlenfolgen und Zahlenmengen haben ihre unstreitige Bedeutung für die ihnen spezifische Richtung der Fragestellung. Die hier gewonnenen Einsichten enthalten jedoch keinen eindeutigen Hinweis darauf, daß das gebräuchliche Verfahren der Analysis durch die stärker arithmetischen Methoden ersetzt werden sollte.

| Die Methode, auf welcher das Vorgehen in der klassischen Analysis be- 6
ruht, besteht ihren logischen Mitteln nach in der Anwendung einer inhaltlichen Logik der „zweiten Stufe“, bei welcher Allgemeinbegriffe wie „Aussage“, „Menge“, „Folge“, „Funktion“ usw. in einer ungebundenen, nicht näher spezifizierten Weise verwendet werden. Diese Logik der zweiten Stufe zeigt ihre Stärke nicht nur in ihrer Anwendung für die Theorie des Kontinuums, sondern allgemein darin, daß sie die Kennzeichnung mathematischer Strukturen, die eventuell auch überabzählbar sein können, durch explizite Definitionen erlaubt. Nämlich dem, was man „implizite Definitionen“ von mathematischen Gegenständen zu nennen pflegt, entspricht eine explizite Definition eines Strukturganzen, worin jene Gegenstände als unselbständige Bestandteile auftreten. Auch die modelltheoretischen Begriffe der Erfüllbarkeit und der Kategorizität finden hier ihre unproblematische Anwendung.

| Freilich besteht gegenüber dieser Logik der zweiten Stufe der Vorwurf A116
einer gewissen Unschärfe in den Begriffen, und es ist die Absicht der neueren verschärften Form der Axiomatik, diesem Mangel abzuhelfen. Die Methoden hierfür sind durch die Logistik und die axiomatische Mengenlehre ausgebildet worden. Daß jedoch damit die Präzisierung nicht in einer völlig adäquaten Weise gelingt, wird durch das Phänomen der besprochenen Relativität der höheren Allgemeinbegriffe zur Evidenz gebracht.

Vergegenwärtigen wir uns diese noch einmal anhand eines Beispieles. Die Eigenschaft der Lückenlosigkeit einer Ordnung drückt sich in der Logik der zweiten Stufe durch die Bedingung aus, daß jedes echte Anfangsstück der Ordnung, das kein letztes Element hat, ein unmittelbar folgendes besitzt. Hier tritt der allgemeine Mengenbegriff vermittels des echten Anfangsstückes auf. Wird nun dieser präzisiert, indem gewisse Anweisungen für die Gewinnung von Mengen gegeben werden, so wird dadurch die Mannigfaltigkeit der in Betracht kommenden Anfangsstücke eingeengt und dadurch die Bedingung abgeschwächt. Das bedeutet, daß Ordnungen als lückenlos zugelassen werden, die bei einer hinlänglichen Erweiterung des Mengenbegriffes (d. h. bei der Zulassung weiterer Prozesse für die Bildung von Mengen) nicht mehr als lückenlos gelten können.

7 | Die hier betrachtete, mit der formalen Präzisierung verbundene Schwierigkeit kommt übrigens nicht nur bei der Charakterisierung überabzählbarer Strukturen, sondern speziell auch bei derjenigen der Struktur der Zahlenreihe zur Geltung. Im Sinne von Dedekind können wir erklären, daß eine Menge M die Struktur der Zahlenreihe mit Bezug auf eine Abbildung φ (von M in sich) besitzt, wenn φ umkehrbar eindeutig ist und M ein Element a hat, das nicht als φ-Bild auftritt, und von der Eigenschaft, daß keine echte Teilmenge von M existiert, welche a enthält, und zugleich mit einem Element c auch $\varphi(c)$ enthält. Hier kann wiederum eine engere Festlegung des auftretenden Begriffes der Teilmenge bewirken, daß die aufgestellte Bedingung durch Modelle erfüllt wird, denen wir auf$_a$ G$_a$rund der unbeschränkten Bedingung die Struktur der Zahlenreihe absprechen. Der Sachverhalt stellt sich gleichermaßen ein, wenn wir anstelle der expliziten Strukturdefinition ein Axiomensystem zur Kennzeichnung der Zahlenreihe verwenden. In der gebräuchlichen Form eines solchen Axiomensystems hat man das Axiom der vollständigen Induktion, in dem der Allgemeinbegriff der Aussage (des Prädikates) auftritt. Bei der formalen Verschärfung der Axiomatik tritt anstelle dieses Axioms ein formales Schlußprinzip, bei welchem der Umkreis der zugelassenen Prädikate
A117 durch eine Einsetzungsregel formal | abgegrenzt wird. Auch durch diese Einengung entsteht die Möglichkeit von Modellen der Zahlentheorie, welche alle in dem formalen Rahmen beweisbaren Sätze erfüllen, aber, losgelöst von diesen betrachtet, sich als abweichend von der Struktur der Zahlenreihe erweisen. Es war wiederum Skolem, der diesen Sachverhalt der „Nichtcharakterisierbarkeit" der Zahlenreihe durch ein formalisiertes Axiomensystem an drastischen Beispielen aufzeigte.

Im Ganzen könnte hiernach der Erfolg der verschärften axiomatischen Präzisierung als höchst fragwürdig erscheinen$_{d_1 , d_1 a_1 . a_1}$ Dabei wird aber der Umstand nicht berücksichtigt, daß es Rahmensysteme gibt, für welche – wie sich durch die axiomatische und logistische Analyse der mathematischen Theorien gezeigt hat – innerhalb der klassischen Mathematik kein Erfordernis zu ihrer Überschreitung besteht. Der Bereich der Mengen und Funktionen, wie er z. B. durch die Axiomatik der Mengenlehre geliefert wird, besitzt eine solche Geschlossenheit, daß bei den Begriffsbildungen und Beweisführungen die formal axiomatische Beschränkung kaum fühlbar wird.

| Es kommt noch der Umstand hinzu, daß von der für die Allgemeinbe- 8
griffe bestehenden Relativität die mengentheoretischen Sätze nicht betroffen werden. Der Relativismus bedeutet ja nicht etwa, daß in *einem* Rahmen der Mengenlehre das Kontinuum als überabzählbar, in einem *anderen* als abzählbar erwiesen würde. Die Diskrepanz besteht vielmehr nur darin, daß die Gesamtheit von Dingen, die in einem mengentheoretischen System z. B. die Menge der Teilmengen der Zahlenreihe repräsentiert, in einem umfassenderen System abzählbar sein kann; dort aber fungiert sie dann auch nicht als Repräsentation jener Menge von Teilmengen, und es verbleibt somit die Unmöglichkeit, die Zahlen auf die Zahlenmengen eindeutig abzubilden. Solchermaßen sind trotz der Relativität der Mengenbegriffe die Mächtigkeitssätze der Cantor$_{d_2}$'$_{d_2}$schen Mengenlehre invariant gegenüber dem axiomatischen Rahmen.

Freilich muß zugestanden werden, daß durch diese Relativität der Umstand uns stärker zum Bewußtsein kommt, daß die höheren Mächtigkeiten in der Mengenlehre sozusagen nur intendiert, nicht eigentlich aufgebaut sind. In diesem Sinne kommt den Abstufungen der Mächtigkeiten eine gewisse Uneigentlichkeit zu.

Öfters wird dem Gewahrwerden dieses Sachverhaltes dadurch Ausdruck gegeben, daß man erklärt, in „Wirklichkeit“ sei alles in der Mathematik abzählbar. Diese Formulierung ist jedoch insofern irreführend, als sie der wesentlichen, sowohl in der operativen Mathematik wie in der Betrachtung
der formalen Axiomensysteme sich äußernden | Tatsache nicht Rechnung A118
trägt, daß das mathematische Denken grundsätzlich über jedes abzählbare System hinausgeht. Die mathematische Begriffsbildung hat sowohl bei einem konstruktiven Vorgehen wie auch bei einer Stufentheorie, wenn diese nicht willkürlich begrenzt wird, oder auch in der Reihe der aufsteigenden Systeme axiomatischer Mengenlehren, als Rahmen die offene, inhaltliche zweite Zahlenklasse. Diese stellt etwas im eigentlichen Sinne Überabzählbares dar, freilich kann sie auch nicht als eine bestimmte mathematische Struktur angesprochen werden.

Hier werden wir daran erinnert, daß auch die Zahlenreihe uns ursprünglich bloß als ein offener Bereich vorliegt, im Vergleich mit dem die Zahlenreihe, wie wir sie als Struktur ansprechen, eine Art der Uneigentlichkeit hat.
Gegenüber der zweiten Zahlenklasse ist hier | der Unterschied, daß es sich 9
bei der Offenheit der Zahlenreihe um eine Unabgeschlossenheit blo$_{d_2}$$\underline{\text{sz}}$$_{d_2a_2}$$\underline{\text{ß}}$$_{a_2}$ der Iterationen ein und desselben Prozesses handelt, dagegen bei der offenen

zweiten Zahlenklasse um die Unabgeschlossenheit von Begriffsbildungen.

Daß die Uneigentlichkeit bestimmter Strukturen des Überabzählbaren uns soviel merklicher ist als jene schon in der Konzeption der Zahlenreihe als Struktur liegende Uneigentlichkeit, beruht wohl darauf, daß unser Begriff einer formalen Theorie gerade die gleiche Art der Unendlichkeit intendiert wie diejenige der Zahlenreihe.

Kapitel 22

Bernays Project: Text No. 23

Betrachtungen zu Ludwig Wittgensteins *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* (1959)

Comments on Ludwig Wittgenstein's *Remarks on the Foundations of Mathematics*

(*Ratio* 2, S. 1–18; repr. in [?], S. ■ –■
repr. in *Abhandlungen*, S. 119–141)

I

1/A119 | Das Buch, an welches sich die folgenden Betrachtungen knüpfen, bildet den zweiten Teil der postumen Veröffentlichungen von ausgewählten Publikationsfragmenten Wittgensteins, in denen er seine spätere Philosophie zur Darstellung bringt.[a] Die Notwendigkeit einer Auswahl und der stellenweise spürbare Fragmentcharakter sind insofern nicht sehr störend, als Wittgenstein ohnehin in seinen Publikationen auf eine geschlossene Abhandlungsform verzichtet und seine Gedanken absatzweise – öfters von einem Thema

[a]All Wittgenstein references were updated and now refer to [?].

zu einem anderen überspringend – äußert. Andererseits muß man dem Autor zugute halten, daß er gewiß vieles in der Anordnung und Zusammenstellung noch umgestaltet hätte, wenn er selbst noch hätte das Werk fertigstellen können. Die Herausgeber des Buches haben übrigens durch ein sehr eingehendes Inhaltsverzeichnis sowie auch ein Sachverzeichnis das Ihrige getan, um die Übersicht über den Inhalt zu erleichtern. Über die Entstehung der verschiedenen Teile I–V gibt das Vorwort Auskunft.

Gegenüber dem Standpunkt des *Tractatus*, der ja die anfänglich sehr extreme Doktrin der Wiener Schule wesentlich beeinflußte, bedeutet Wittgensteins spätere Philosophie eine Korrektur und Abklärung in wesentlichen Momenten. Vor allem ist hier die sehr schematische Vorstellung von der Struktur der Wissenschaftssprache – insbesondere von dem Aufbau der Aussagen aus Atomsätzen – fallengelassen. Geblieben ist aber die ablehnende Haltung gegenüber dem spekulativen Denken sowie auch die ständige Tendenz zum Desillusionieren.

So sagt Wittgenstein auch selbst, offensichtlich mit Bezug auf seine eigene Philosophie (S. 63, Nr. 18): „Finitismus und Behaviorismus sind ganz ähnliche Richtungen. Beide sagen: hier ist doch nur.... Beide leugnen die Existenz von etwas, beide zu dem Zweck, um aus einer Verwirrung zu entkommen. – Was ich tue, ist nicht, Rechnungen als falsch zu erweisen, sondern das *Interesse* von Rechnungen einer Prüfung zu unterziehen.“ Und an späterer Stelle erklärt er (S. 174, Nr. 16): „Meine Aufgabe ist es nicht,
Russells Logik von *innen* anzugreifen, sondern | von außen. Das heißt: nicht, A120
sie mathematisch anzugreifen – sonst triebe ich Mathematik –, sondern ihre Stellung, ihr Amt. Meine Aufgabe ist es nicht, über den Gödelschen Beweis, zum Beispiel, zu reden, sondern an ihm vorbeizureden.“

Wie man sieht, fehlt bei Wittgenstein nicht das Spaßhafte im Ausdruck, und in den mannigfachen dialoghaft gestalteten Partien liebt er es oft, sich als Schelm zu gebärden.

Andererseits mangelt es ihm nicht am esprit de finesse, und seine Ausführungen enthalten neben dem ausdrücklich Gesagten auch vielerlei implizite Anregungen.

| Durchgehend aber machen sich zwei problematische Tendenzen geltend. 2
Die eine geht darauf aus, die eigentliche Rolle des Denkens – das gedankliche Intendieren – in einer behavioristischen Art wegzudisputieren. David Pole bestreitet freilich in seiner interessanten Darstellung und Erörterung der

späteren Philosophie Wittgensteins,[1] daß dieser ein Anhänger des Behaviorismus ist; das ist auch insofern berechtigt, als Wittgenstein gewiß nicht die seelischen Erlebnisse des Fühlens, Wahrnehmens und Vorstellens abstreitet; aber in ${}_a\underline{\text{B}}_a$ezug auf das Denken ist seine Einstellung durchaus behavioristisch. Hier tendiert er allenthalben zu einem Kurzschluß. Überall soll sich an die Vorstellungen und Wahrnehmungen direkt das Handeln anschließen. „Wir machen es so", das ist meist das letzte Wort des Verständnisses – soweit nicht noch auf ein Bedürfnis als anthropologische Tatsache rekurriert wird. Das Gedankliche in seiner Eigenart wird weggelassen. Charakteristisch in diesem Sinne ist, daß ein „Beweis" als „Bild" oder „Paradigma" aufgefaßt wird; und obwohl Wittgenstein der Methode des Formalisierens der Beweise kritisch gegenübersteht, nimmt er doch fortwährend die formalen Beweisführungen im Russellschen System als Beispiel. Exempel von eigentlichen mathematischen Beweisen, die nicht bloße Rechnungen sind, nicht bloß durch Vorweisen einer Figur erfolgen oder formalistisch geführt werden, kommen in diesem Buch über Grundlagen der Mathematik, in welchem ein sehr großer Teil von der Frage handelt, was Beweise eigentlich sind, überhaupt nicht vor – obwohl der Verfasser sich offensichtlich mit etlichen mathematischen Beweisen befaßt hat.

Als charakteristisch für Wittgensteins behavioristische Einstellung und
als Erläuterung dessen, was mit dem Kurzschluß gemeint ist, sei eine Stelle
erwähnt. Nachdem er verschiedene Versuche der Kennzeichnung des Schlie-
A121 ßens als unbefriedigend abgelehnt hat, fährt er fort | (S. 8, Nr. 17): „Darum
ist es notwendig, zu schauen, wie wir denn in der Praxis der Sprache Schlüsse vollziehen; was das Schließen im Sprachspiel für ein Vorgang ist. Zum Beispiel: In einer Vorschrift steht: ‚Alle, die über 1,80 m hoch sind, sind in die … Abteilung aufzunehmen.' Ein Kanzlist verliest die Namen der Leute, dazu ihre Höhe. Ein anderer teilt sie den und den Abteilungen zu. – ‚N. N. 1,90 m.' – ‚Also N. N. in die … Abteilung.' Das ist Schließen." Man sieht hier, wie Wittgenstein nur von der Kennzeichnung einer solchen Form des Schließens befriedigt ist, bei welcher von der sprachlichen Feststellung der Prämissen direkt zu einer Handlung übergegangen wird, also das spezifisch gedankliche Element eliminiert wird. Auch die Sprache erscheint unter dem Aspekt der Handlung („Sprachspiel").

Die andere problematische Tendenz entspringt aus dem – schon in der

[1] *Vide* [**?**].

älteren Form der Philosophie von Wittgenstein vorliegenden – Programm einer strikten Trennung des Sprachlichen und des Tatsächlichen, wie sie sich ja auch in Carnaps $_a$**Logische** $_a$*Syntax der Sprache* vorfindet. Daß diese in der neueren Gestalt von Wittgensteins Doktrin beibehalten wird, ist nicht so selbstverständlich, da hier die Betrachtungsweise gegen die frühere in vielerlei Hinsicht aufgelockert ist. Ansätze zu einer gewissen Wandlung sind in der Tat auch zu bemerken, so wenn es auf S. 119, Nr. 18 heißt: „Es ist klar, daß die Mathematik als Technik des Umwandelns von Zeichen zum Zweck des Vorhersagens mit Grammatik nichts zu tun hat.“ An einer | anderen 3
Stelle (S. 125, Nr. 42) spricht er sogar vom „synthetischen Charakter der mathematischen Sätze“. Es heißt da: „Man könnte vielleicht sagen, daß der synthetische Charakter der mathematischen Sätze sich am augenfälligsten im unvorhersehbaren Auftreten der Primzahlen zeigt. Aber weil sie synthetisch sind (in diesem Sinne), sind sie drum nicht weniger a priori. . . . Die Verteilung der Primzahlen wäre ein ideales Beispiel für das, was man synthetisch a priori nennen könnte, denn man kann sagen, daß sie jedenfalls durch eine Analyse des Begriffs der Primzahl nicht zu finden ist.“ Wie man sieht, geht hier Wittgenstein von dem Begriff „analytisch“ der Wiener Schule zu einer Begriffsbildung mehr im Kantischen Sinne zurück.

Eine gewisse Anlehnung an die Kantische Betrachtung besteht auch in der Auffassung Wittgensteins, daß die Mathematik erst den Charakter dessen bestimmt, „die Formen dessen schafft, was wir Tatsachen nennen“ (vgl. S. 173). In diesem Sinne opponiert Wittgenstein auch nachdrücklich gegen die Meinung, daß die Sätze der Mathematik die Funktion empirischer Sätze haben. Andererseits hebt er verschiedentlich hervor, daß die Verwendbarkeit der Mathematik, insbesondere der | Arithmetik, auf empirischen Bedingun- A122
gen beruht; zum Beispiel heißt es auf S. 14, Nr. 37: „So lernen ja die Kinder bei uns rechnen, denn man läßt sie drei Bohnen hinlegen und dann noch drei Bohnen und dann zählen, was da liegt. Käme dabei einmal fünf, einmal sieben heraus. . . , so würden wir zunächst Bohnen als für den Rechenunterricht ungeeignet erklären. Geschähe das gleiche aber mit Stäben, Fingern, Strichen und den meisten ändern Dingen, so hätte das Rechnen damit ein Ende. ‚Aber wäre dann nicht doch noch $2 + 2 = 4$?‘ – Dieses Sätzchen wäre damit unbrauchbar geworden.“

Jedoch bleiben für Wittgensteins Auffassung Äußerungen wie die folgende erheblich (S. 160, Nr. 2): „Wer einen mathematischen Satz weiß, soll noch *nichts* wissen.“ Dies wird zweimal kurz hintereinander gesagt und dazugefügt: „Das heißt, der mathematische Satz soll nur das Gerüst liefern für

eine Beschreibung.“ Nach der Art von Wittgenstein könnte man hier fragen: „Warum *soll* der Betreffende noch nichts wissen? Welches Bedürfnis drückt dieses ‚Sollen‘ aus?“ Es scheint, daß nur eine vorgefaßte philosophische Ansicht dieses Erfordernis bestimmt, die Ansicht nämlich, daß es nur *eine* Art von Tatsächlichkeit geben könne, diejenige der konkreten Wirklichkeit. Diese Ansicht entspricht einer Art des Nominalismus, – wie er auch sonst in den Diskussionen zur Philosophie der Mathematik eine Rolle spielt. Zu einer Motivierung dieses Nominalismus müßte Wittgenstein zum mindesten weiter ausholen, als er es in dem Buch tut. Jedenfalls kann er sich hierfür nicht auf unsere tatsächliche Einstellung berufen. Er kämpft ja dagegen an, daß wir durchaus geneigt sind, zum Beispiel die Arithmetik „als Naturgeschichte des Zahlenreiches“ anzusehen (vgl. S. 117, Nr. 13, sowie auch S. 116, Nr. 11). Völlig entschieden ist er freilich hierbei nicht. Er fragt sich (S. 142, Nr. 16), ob schon das die „mathematische Alchemie“ charakterisiere, daß die mathematischen Sätze als Aussagen über mathematische Gegenstände betrachtet werden. „In einem gewissen Sinn kann man in der Mathematik darum nicht an die Bedeutung der Zeichen appellieren, weil die Mathematik ihnen erst die Bedeutung gibt. Es ist das Typische der Erscheinung, von welcher ich rede, daß das *Mysteriöse* an irgendeinem mathematischen Begriff nicht *sofort* als irrige Auffassung, als Fehlbegriff gedeutet wird, sondern als etwas, was
4 jedenfalls nicht zu verachten, viel|leicht sogar eher zu respektieren ist. Alles, was ich machen kann, ist, einen leichten Weg aus dieser Unklarheit und dem Glitzern der Begriffe zeigen. Man kann seltsamerweise sagen, daß an allen diesen glänzenden Begriffsbildungen ein sozusagen solider Kern ist. Und ich möchte sagen, daß der es ist, der sie zu mathematischen Produkten macht.“
A123 | Man mag bezweifeln, ob es hier Wittgenstein gelungen ist, „einen leichten Weg aus dieser Unklarheit“ zu zeigen, und vielmehr den Verdacht hegen, daß hier die Unklarheit und das „Mysteriöse“ überhaupt erst aus der philosophischen Begriffsbildung, das heißt der von Wittgenstein verwendeten philosophischen Sprache, entspringt.

Die grundsätzliche Scheidung zwischen dem Mathematischen und dem Gebiet der Tatsachen kommt in etlichen Ausführungen des Buches zur Geltung; Wittgenstein spricht in dieser Hinsicht oft mit einer Selbstverständlichkeit, die mit seiner Bereitschaft, so vieles Geläufige zu bezweifeln, eigentümlich kontrastiert. Charakteristisch dafür ist der Passus auf S. 26, Nr. 80, wo er sagt: „du kannst natürlich keine Eigenschaft des Materials durch Vorstellen erkennen.“ Ähnlich heißt es auf S. 29, Nr. 98: „In der Vorstellung kann ich rechnen, aber nicht experimentieren.“ All dies ist von der geläufigen Erfahrung aus betrachtet gewiß nicht ausgemacht. Ein Ingenieur oder Techniker dürfte von Materialien eine ebenso lebhafte Vorstellung haben wie ein Mathematiker von geometrischen Kurven, und sogar ein jeder von uns dürfte eine solche Vorstellung von einer dicken Eisenstange haben, daß es aus dieser klar ist, daß sie nicht durch einen leichten Händedruck umgebogen werden kann. Auch spielt sicherlich beim technischen Erfinden ein Experimentieren in der Vorstellung eine wesentliche Rolle. Wittgenstein benutzt hier, wie es scheint, unbesehen ein philosophisches Schema der Unterscheidung des Apriorischen und des Empirischen. Inwieweit und in welchem Sinne diese besonders ja in der Kantischen Philosophie so erhebliche Unterscheidung ihre Berechtigung hat, soll an dieser Stelle nicht erörtert werden; aber jedenfalls darf man es sich mit ihrer Einführung, besonders in der heutigen Zeit, nicht zu leicht machen. Von dem Kantischen Standpunkt in Hinsicht auf das Apriorische unterscheidet sich übrigens derjenige von Wittgenstein insbesondere darin, daß er die Prinzipien der allgemeinen Mechanik zu dem Bereich des Empirischen rechnet. So argumentiert er zum Beispiel (S. 114, Nr. 4): „Warum sind die Newtonschen Gesetze keine Axiome der Mathematik? Weil man sich ganz gut vorstellen könnte, daß es sich anders verhielte .... Von einem Satz zu sagen, ‚man könnte das sich auch anders vorstellen‘ ... schreibt ihm die Rolle des Erfahrungssatzes zu.“ Der hier wie bei Kant verwendete Begriff des „Sich-anders-vorstellen-Könnens“ hat das Mißliche der Vieldeutigkeit. Die Unmöglichkeit des Sich-Vorstellens kann in verschiedenem Sinn gemeint sein. Diese Schwierigkeit tritt ja insbesondere bei der Geometrie auf. Hiervon soll noch die Rede sein.

Die zuvor erwähnte Tendenz Wittgensteins, nur *eine* Art von Sach|verhalt A124
anzuerkennen, macht sich bei ihm nicht nur im Hinblick auf die Mathematik, sondern generell in $_a\underline{B}_a$ezug auf jedwede Phänomenologie geltend. So erörtert er den Satz, daß Weiß heller ist als Schwarz (S. 30, Nr. 105), und erklärt ihn in der Weise, daß Schwarz uns als Paradigma des Dunklen und Weiß als Paradigma des Hellen dient, womit die Feststellung zu einer inhaltlosen wird. Seiner Meinung nach kann man von Helligkeitsunterschieden inhaltvoll nur mit Bezug auf bestimmte visuell gegebene Gegenstände sprechen und sollte deutlicherweise überhaupt nicht von Hellig|keitsunterschieden von Farben 5
sprechen. Eine solche Einstellung schließt offensichtlich eine beschreibende Farbenlehre aus.

An sich würden Wittgenstein phänomenologische Betrachtungen naheliegen. Das spürt man insbesondere daran, daß er häufig und gern Beispiele aus dem Gebiet des Künstlerischen zum Vergleich heranzieht. Es ist nur das philosophische Programm, das die Entfaltung einer expliziten phänomenologischen Betrachtungsweise verhindert.

Dieser Fall ist ein Beispiel dafür, wie die Methodik Wittgensteins darauf zielt, sehr vielerlei auszuschalten. Er gibt sich die Rolle des Freigeistes, der den Aberglauben bekämpft. Dessen Ziel aber ist die Freiheit des Geistigen, während von Wittgenstein gerade das Geistige in mannigfacher Weise eingeschränkt wird, in der Art eines geistigen Asketismus zugunsten einer ihrem Ziel nach ganz unbestimmten Irrationalität.

Allerdings ist diese Tendenz in der vorliegenden späteren Philosophie Wittgensteins bei weitem nicht mehr so kraß wie in der anfänglichen Form. Schon aus den wenigen angeführten Stellen mag man entnehmen, daß Wittgenstein wohl auf dem Wege dazu war, den geistigen Inhalten mehr ihr Recht zukommen zu lassen.

Hiermit mag es auch im Zusammenhang stehen, daß im Unterschied zu der schlechtweg statuierenden Form der philosophischen Äußerung im *Tractatus* in dem vorliegenden Buch eine überwiegend aporetische Haltung vorherrscht. Hier liegt freilich für die philosophische Pädagogik eine Gefahr, zumal da ja die Philosophie Wittgensteins auf die jüngeren Geister starke Attraktion ausübt. Die altgriechische Bemerkung, daß die philosophische Betrachtung vielfach von dem philosophischen Staunen ausgeht, verführt heute viele Philosophen zu der Ansicht, daß schon die Kultivierung des Staunens eine philosophische Leistung bedeute. Es ist sicherlich methodisch bedenklich, wenn angehende Philosophen gewissermaßen im Staunen trainiert werden. Das Staunen hat ja nur da eine heuristische Fruchtbarkeit, wo es der
A125 Ausdruck eines Instinktes der Forschung ist. Natürlich kann von keiner | Philosophie verlangt werden, daß sie alles Erstaunliche begreiflich macht. Vielleicht lassen sich die verschiedenen philosophischen Standpunkte durch das kennzeichnen, was sie an Erstaunlichem als etwas Letztes hinnehmen. In Wittgensteins Philosophie sind es, soweit die erkenntnistheoretisdien Fragen in Betracht kommen, soziologische Tatsachen. Ein paar Zitate mögen dies zeigen: (S. 13, Nr. 35) „... wie kommt es dann, daß sich alle Menschen ... diese Figuren als Beweise dieser Sätze gefallen lassen? Ja, hier besteht eine große – und interessante – Übereinstimmung.“ (S. 20, Nr. 63): „... es ist ein eigentümliches Vorgehen: daß ich den Beweis *durchlaufe* und dann sein Ergebnis annehme. – Ich meine: so *machen* wir es eben. Das ist so bei uns der Brauch, oder eine Tatsache unserer Naturgeschichte.“ (S. 23, Nr. 74:) „Wer über das *Wesen* spricht, konstatiert bloß eine Übereinkunft, und da möchte man doch entgegnen: ‚es gibt nichts Verschiedeneres als ein Satz über die

Tiefe des Wesens und einer über eine bloße Übereinkunft.‘ Wie aber, wenn ich antworte: ‚Der *Tiefe* des Wesens entspricht das *tiefe* Bedürfnis nach der Übereinkunft‘.” (S. 122, Nr. 30): „Sieh den Beweis nicht als einen Vorgang an, der dich *zwingt*, sondern der dich *führt* . . . . Aber wie kommt es, daß er *jeden* von uns so führt, daß wir übereinstimmend von ihm beeinflußt werden? Nun, wie kommt es, daß wir übereinstimmend *zählen*?. ‚Wir sind eben so abgerichtet‘, kann man sagen, ‚und die Übereinstimmung, die so erzeugt wird, setzt sich durch die Beweise fort‘.“

| II 6

Soviel sei zur allgemeinen Charakterisierung der vorliegenden Wittgensteinschen Betrachtungen gesagt. Deren Inhalt erschöpft sich jedoch keineswegs in den generell philosophischen Aspekten, welche hier erweckt werden, vielmehr werden verschiedene bestimmte grundlagenphilosophische Fragen des näheren erörtert. Mit den hauptsächlichen hierbei hervortretenden Gesichtspunkten wollen wir uns im Folgenden befassen.

Beginnen wir mit einer Frage, welche das bereits angeschnittene Problem der Unterscheidung des Apriorischen und des Empirischen betrifft: die der geometrischen Axiome. Wittgenstein spricht nicht speziell von den geometrischen Axiomen als solchen, sondern wirft generell die Frage auf, inwiefern die Axiome eines mathematischen Axiomensystems einleuchtend sein sollen, wobei er das Parallelenaxiom als Beispiel verwendet. Einige Sätze seiner Ausführungen seien zitiert (S. 113, Nr. 2): „Was sagen wir, wenn uns so ein Axiom dargeboten | wird, zum Beispiel das Parallelenaxiom? Hat Erfahrung A126 uns gezeigt, daß es sich so verhält? . . . Erfahrung spielt eine Rolle, aber nicht die, die man *unmittelbar erwarten* würde. Denn man hat ja doch nicht Versuche gemacht und gefunden, daß wirklich durch den Punkt nur *eine* Gerade die andere Gerade nicht schneidet. Und doch leuchtet der Satz ein. – Wenn ich nun sagte: ‚es ist ganz gleichgültig, warum er einleuchtet. Genug, wir nehmen ihn an. Wichtig ist nur, wie wir ihn gebrauchen‘ . . . Wenn der Wortlaut des Parallelenaxioms zum Beispiel gegeben ist . . . so ist die Art der Verwendung dieses Satzes und also sein Sinn, noch gar nicht bestimmt. Und wenn wir sagen, er leuchtet uns ein, so haben wir damit, ohne es zu wissen, schon eine bestimmte Art der Verwendung des Satzes gewählt. Der Satz ist kein mathematisches Axiom, wenn wir ihn nicht gerade *dazu* verwenden. Daß wir nämlich hier nicht Versuche machen, sondern das Einleuchten anerkennen, legt schon die Verwendung fest. Denn wir sind nicht so naiv, das Einleuchten statt des Versuches gelten zu lassen. Nicht daß er uns als wahr einleuchtet, sondern daß wir das Einleuchten gelten lassen, macht ihn zum mathematischen Satz.“

Zur Erörterung dieser Ausführungen ist zunächst zu beachten, daß wir zweierlei zu unterscheiden haben: ob wir einen Satz als geometrisch gültig anerkennen oder ob wir ihn als Axiom wählen. Das zweite ist natürlich nicht durch den Wortlaut des betreffenden Satzes bestimmt. Dabei handelt es sich aber auch nur um eine mehr technische Frage der deduktiven Anordnung. Worauf es dagegen Wittgenstein hier sicherlich ankommt, das ist das Anerkennen des Satzes als geometrisch gültig. Mit Bezug hierauf muß Wittgensteins Behauptung („daß die Anerkennung nicht durch den Wortlaut bestimmt ist“) betrachtet werden, und ihre Richtigkeit ist jedenfalls nicht ohne weiteres ersichtlich. Es steht da so einfach: „Man hat ja doch nicht Versuche gemacht.“ Freilich anknüpfend an die betrachtete Formulierung des Parallelenaxioms hat man nicht experimentiert, und diese Fassung ist dafür auch nicht geeignet. Jedoch im Rahmen der übrigen geometrischen Axiome ist das Parallelenaxiom gleichwertig einer der folgenden Aussagen der metrischen Geometrie: „In einem Dreieck ist die Winkelsumme gleich zwei Rechten. In einem Viereck, in dem drei Winkel rechte sind, ist auch der vierte ein rechter. Sechs einander kongruente gleichseitige Dreiecke, an einer gemeinsamen Ecke P aufeinanderfolgend aneinandergelegt, füllen ge-
7 rade die Umgebung des Punktes P aus.“ Solche Sätze | – an denen zu bemerken ist, daß dabei von unbegrenzter Verlängerung einer Geraden keine Rede ist – sind sehr wohl der experimentellen Prüfung zugänglich. Wie
A127 man weiß, hat ja Gauß sogar den Satz von der Winkelsumme | im Dreieck experimentell geprüft, wobei er allerdings die Voraussetzung der geradlinigen Ausbreitung des Lichtes benutzte. Das ist aber nicht die einzige hier in Betracht kommende experimentelle Möglichkeit. So hat ja insbesondere Hugo Dingler nachdrücklich ausgeführt, daß für die Begriffe der Geraden, der Ebene, des rechten Winkels eine natürliche und sozusagen zwangsläufige Art der experimentellen Verwirklichung besteht. An Hand einer solchen experimentellen Realisierung geometrischer Begriffe sind Aussagen wie insbesondere die zweitgenannte mit großer Genauigkeit experimentell nachprüfbar. In einer weniger genauen Art werden sie überdies von uns ständig im üblichen Gebrauch des Figurenzeichnens implizite kontrolliert. Auch unsere instinktive Schätzung der Längen und Winkelgrößen kann als das Ergebnis vielfältiger Erfahrung angesprochen werden, und mit dieser Schätzung stehen ja Sätze wie die genannten jedenfalls im Einklang.

Es kann also keine Rede davon sein, daß bei der Annahme von Sätzen als geometrisch gültig unsere Erfahrung keine Rolle spielt. Aber das meint Wittgenstein auch gar nicht. Das wird ersichtlich aus den an die zitierte Stelle sich anschließenden Ausführungen (S. 114, Nr. 4): „Lehrt uns die Erfahrung, daß zwischen je zwei Punkten eine Gerade möglich ist? … Man könnte sagen: die *Vorstellung* lehrt es uns. Und darin liegt die Wahrheit; man muß es nur recht verstehen. *Vor* dem Satz ist der Begriff noch geschmeidig. Aber könnten nicht Erfahrungen uns bestimmen, das Axiom zu verwerfen?! Ja. Und dennoch spielt es nicht die Rolle des Erfahrungssatzes.“ Weiter heißt es hier: „Warum sind die Newtonschen Gesetze keine Axiome der Mathematik? Weil man sich ganz wohl vorstellen könnte, daß es sich anders verhielte. (Ibid. Nr. 5:) Axiom ist etwas nicht *dadurch*, daß wir es als äußerst wahrscheinlich, ja als gewiß, anerkennen, sondern dadurch, daß wir ihm eine bestimmte Funktion zuerkennen und eine, die der des Erfahrungssatzes widerstreitet … . Das Axiom ist, möchte ich sagen, ein anderer Redeteil.“ Später einmal (S. 124, Nr. 35) sagt er: „Wie ist es … mit den Grundgesetzen der Mechanik? Wer sie versteht, muß wissen, auf welche Erfahrungen sie sich stützen. Anders verhält es sich mit den Sätzen der reinen Mathematik.“

An diesen Ausführungen ist sicherlich zuzugeben, daß Erfahrung noch nicht die theoretische Anerkennung eines Satzes voll determiniert. Ein genauerer theoretischer Ansatz ist stets etwas, was noch über die Erfahrungsgegebenheiten hinaus konzipiert werden muß.

Daß aber in dieser Hinsicht eine so prinzipielle Scheidelinie zwischen den mathematischen Sätzen und den Grundsätzen der Mechanik bestehe, ist wohl
kaum eine berechtigte Auffassung; insbesondere ist die | zuletzt zitierte Be- A128
hauptung, daß man, um die Grundgesetze der Mechanik zu verstehen, die Erfahrungen kennen müsse, auf die sie sich stützen, schwerlich aufrechtzuerhalten. Gewiß, wenn im Hochschulunterricht Mechanik doziert wird, so ist es wünschenswert, daß die empirischen Ausgangspunkte deutlich gemacht werden, dieses aber nicht für den Zweck der theoretischen und praktischen Handhabung der Gesetze, sondern für das erkenntnistheoretische Bewußtsein und im Hinblick auf die Möglichkeiten der eventuell erforderlichen Modifika-
tionen der Theorie. Wer als Ingenieur oder produktiver | Techniker in der 8
Mechanik gut bewandert sein und mit ihren Gesetzen gut umzugehen fähig sein will, der braucht sich hierfür nicht darum zu kümmern, wie man auf diese Gesetze gekommen ist. Es gilt ja auch für diese Gesetze das, was Wittgenstein in $_a\underline{\text{B}}_a$ezug auf die mathematischen Gesetze so vielfach hervorhebt,

daß die Erfahrungstatsachen, die für die empirische Motivierung der Sätze belangvoll sind, keineswegs den Inhalt dessen ausmachen, was in den Gesetzen ausgesagt wird. Wichtig für die Handhabung der mechanischen Gesetze ist es, daß man sich in die Begriffsbildungen einlebt und sie sich zu einer Art von Anschaulichkeit bringt. Diese Art der Aneignung ist nicht nur praktisch, sondern auch theoretisch bedeutsam: die Theorie wird erst voll aufgenommen in der rationalen Ausgestaltung, die sie nachträglich erfährt. In $_a\underline{\mathrm{B}}_a$ezug auf die Mechanik können hierbei die meisten Philosophen und viele von uns Mathematikern nicht in vollem Sinne mitreden, weil sie sich die Mechanik gar nicht in solcher Weise angeeignet haben. – Das Unterschiedliche des Falles der Geometrie gegenüber dem der Mechanik besteht in dem (philosophisch gewissermaßen zufälligen) Umstände, daß die Aneignung der Begriffswelt und der Anschaulichkeit großenteils in einem (mindestens für uns) unbewußten Stadium der geistigen Entwicklung bereits vollzogen ist.

Die Opposition von Ernst Mach gegen die rationale Begründung der Mechanik hat ihr Berechtigtes, sofern eine solche Begründung die Rolle der Erfahrung bei der Gewinnung der Prinzipien der Mechanik zu übergehen trachtet. Wir müssen uns bewußt bleiben, daß die Begriffsbildung und Prinzipien der Mechanik gewissermaßen einen Erfahrungsextrakt in sich schließen. Andererseits wäre es unberechtigt, auf Grund jener Kritik überhaupt die Bemühung um einen möglichst rational gestalteten Aufbau der Mechanik abzulehnen.

Bei der Geometrie ist das Spezifische der phänomenologische Charakter ihrer Gesetzlichkeit und damit die erhebliche Rolle der Anschauung. Von Wittgenstein wird eigentlich nur im Vorübergehen auf dieses Moment hinge-
A129 wiesen. „Die Vorstellung lehrt es uns. Und darin liegt | die Wahrheit; man muß es nur recht verstehen“ (siehe oben, S. 127). Der Ausdruck „Vorstellung“ ist sehr allgemein, und der letzte Zusatz bedeutet eine Einschränkung, welche zeigt, daß der Autor das Thema der Anschauung als sehr heikel empfindet. Tatsächlich ist es recht schwierig, die erkenntnistheoretische Rolle der Anschauung befriedigend zu kennzeichnen. Die schroffe Gegenüberstellung von Anschauung und Begriff, wie sie in der Kantischen Philosophie auftritt, erscheint bei näherem Zusehen als nicht gerechtfertigt. Insbesondere ist es bei der Betrachtung des geometrischen Denkens schwierig, den Anteil der Anschauung von dem der Begrifflichkeit scharf zu trennen, da hier eine gewissermaßen von der Anschauung gelenkte Begriffsbildung vorliegt, die in der Schärfe ihrer Intentionen über das im eigentlichen Sinn Anschaubare hinausgeht, aber andererseits losgelöst von der Anschauung nicht angemes-

sen auffaßbar ist. Merkwürdig ist, daß Wittgenstein der Anschauung keine bestimmte erkenntnistheoretische Rolle zuweist, obwohl sein Denken im Zeichen einer Dominanz des Visuellen steht. Ein Beweis ist für ihn stets ein Bild. Einmal setzt er als Beispiel eines geometrischen Beweises eine bloße Figur hin. Es fällt auch auf, daß er gar nicht auf die anschauliche Evidenz der topologischen Tatsachen zu sprechen kommt, etwa derjenigen, daß eine Kugelfläche den (restlichen) Raum in ein Inneres und ein Äußeres zerlegt, derart, daß die Verbindung eines inneren Punktes mit einem äußeren durch eine Kurve stets über einen Punkt der Kugelfläche führt.

| Die auf die Geometrie und ihre Axiome bezüglichen Grundlagenfragen 9
gehören noch vornehmlich in den Fragenkreis der allgemeinen Erkenntnistheorie. Die heutige im engeren Sinn so bezeichnete mathematische Grundlagenforschung richtet sich vor allem auf die Grundlagen der Arithmetik. Das Spezifische des Geometrischen sucht sie nach Möglichkeit zu eliminieren, indem sie Geometrie in eine arithmetische und physikalische Seite aufspaltet. Ob dieses Vorgehen berechtigt ist, sei hier dahingestellt; von Wittgenstein wird diese Frage nicht erörtert. Hingegen befaßt er sich sehr eingehend mit den grundsätzlichen Fragen der Arithmetik. Auf seine Ausführungen zu diesem Fragengebiet wollen wir nun näher zu sprechen kommen.

Die Perspektive, unter der Wittgenstein die Arithmetik betrachtet, ist nicht die übliche des Mathematikers. Wittgenstein hat sich mehr mit den Grundlagentheorien der Arithmetik (insbesondere derRussellschen) befaßt als mit der Arithmetik selbst. Besonders was die Zahlentheorie betrifft, so gehen seine Beispiele meist nicht über das Numerische hinaus. Ein unkundiger Leser könnte meinen, daß die Zahlentheorie fast nur aus numerischen
Gleichungen bestehe, – die man doch für gewöhnlich | gar nicht als zu be- A130
weisende Sätze, sondern als simple Feststellungen ansieht. Mehr Mathematisches kommt in den Abschnitten zur Sprache, wo Wittgenstein sich mit den mengentheoretischen Fragen der Abzählbarkeit und der Überabzählbarkeit sowie mit der Dedekindschen Schnitttheorie auseinandersetzt.

Wittgenstein verficht allenthalben den Standpunkt eines strikten Finitismus. Dabei kommen die verschiedenen Arten der Problematik des Unendlichen, wie sie für einen finitistischen Standpunkt bestehen, zur Sprache, so insbesondere die des Tertium non datur und die der imprädikativen Definitionen. Die hier gebrachten, recht eindringlichen und lebendigen Darlegungen sind wohl geeignet, einem noch Unvertrauten die Auffassung des Finitisten näherzubringen. Sie liefern jedoch für die Argumentation kaum etwas wesentlich Neues; und wer die Anschauungsweise der klassischen Mathematik mit Bewußtsein hegt, wird dadurch kaum überzeugt werden.

Einige Punkte seien etwas näher besprochen. Wittgenstein behandelt die Frage, ob in der unendlichen Entwicklung von π eine bestimmte Zahlenfolge F, wie etwa „777“, irgendeinmal auftritt. Im Sinne des Brouwerschen Standpunktes weist er auf die Möglichkeit hin, daß die Frage überhaupt noch keine bestimmte Antwort besitzt. In diesem Zusammenhang sagt er dann (S. 138, Nr. 9): „So seltsam es klingt, die Weiterentwicklung einer irrationalen Zahl ist eine Weiterentwicklung der Mathematik.“ Diese Formulierung ist offensichtlich zweideutig. Wenn bloß gemeint ist, daß jede Bestimmung einer noch nicht berechneten Dezimalstelle einer Irrationalzahl ein Beitrag zur Entwicklung der Mathematik ist, so wird jeder Mathematiker damit einverstanden sein. Da die Behauptung aber als eine „seltsam klingende“ aufgestellt wird, ist gewiß etwas anderes gemeint, etwa daß der Gang der Entwicklung der Mathematik zu gegebener Zeit unentschieden ist und daß diese Unentschiedenheit auch den Verlauf der Entwicklung einer durch Definition gegebenen Irrationalzahl betreffen kann, so daß es etwa eine geistesgeschichtliche Entscheidung wäre, welche Ziffer an die zehntausendste Dezimalstelle von π gesetzt würde. Eine solche Ansicht ist aber nicht einmal nach der Auffassung von Wittgenstein selbst angemessen, denn er sagt (S. 138, Nr. 9): „Die Frage … verändert ihren Status, wenn sie entscheidbar wird.“ Nun ist aber bis zu jeder beliebig gewählten | Stellenzahl hin der Verlauf der Dezimalbruchentwicklung von π entscheidbar. Die genannte Auffassung von der Weiterentwicklung der Mathematik ist also jedenfalls nicht zum Verständnis der Sachlage bei der Entwicklung von π verwendbar. Wir können in $_{a}\underline{\text{B}}_{a}$ezug
A131 auf diese sogar folgendes bemerken: Gesetzt, wir behaupten mit | Bestimmtheit, daß die Frage des Vorkommens der Zahlenfolge F unentscheidbar ist, so schließt das die Behauptung ein, daß die Figur F in der Entwicklung von π niemals auftreten kann; denn käme sie vor und wäre k die Stellennummer, welche die letzte Ziffer von F beim erstmaligen Auftreten in der Dezimalbruchentwicklung von π hat, so wäre ja die Frage, ob bis zur $k+1$sten Stelle die Figur F auftritt, eine entscheidbare Frage, sie würde sich dann positiv beantworten, und damit wäre zugleich auch die ausgängliche[b] Frage entscheidbar. (Diese Überlegung erfordert übrigens nicht das Prinzip des Tertium non datur.)

An späteren Stellen kommt Wittgenstein noch wiederholt auf das Bei-

[b]This word is highly unusual, most probably Bernays meant „Ausgangsfrage;“ we translated accordingly.

spiel der Dezimalbrudientwicklung von π zurück, insbesondere findet sich an einer Stelle die für seine Auffassung charakteristische Äußerung (S. 185, Nr. 34): „Angenommen, die Menschen berechnen die Entwicklung von π immer weiter und weiter. Der allwissende Gott weiß also, ob sie bis zur Zeit des Weltuntergangs zu einer Figur ‚777' gekommen sein werden. Aber kann seine *Allwissenheit* entscheiden, ob die Menschen nach dem Weltuntergang zu jener Figur gekommen *wären*? Sie kann es nicht .... Auch für ihn kann die bloße Regel des Entwickelns nichts entscheiden, was sie für uns nicht entscheidet."

Das ist gewiß nicht überzeugend. Wenn wir schon den Gedanken einer göttlichen Allwissenheit konzipieren, so würden wir dieser doch zuschreiben, daß sie eine Gesamtheit, deren jedes einzelne Element uns grundsätzlich zugänglich ist, in *einem* Blick überschaut. Des genaueren müssen wir hier achthaben auf die doppelte Rolle der rekursiven Definition der Dezimalbruchentwicklung: einmal als bestimmende Festlegung des Dezimalbruchs und ferner als Mittel der „effektiven" Berechnung der Stellen. Verstehen wir hier „effektiv" im üblichen Sinn, so kann allerdings auch eine göttliche Intelligenz nichts anderes *effektiv* berechnen, als wir dazu imstande sind (ebensowenig wie sie imstande wäre, die Winkeltrisektion mit Zirkel und Lineal vorzunehmen oder den Gödelschen unableitbaren Satz in dem betreffenden Formalismus herzuleiten); dagegen ist nicht auszuschließen, daß sie auf eine andere (nicht menschlich effektive) Art die sämtlichen möglichen Ausrechnungsergebnisse der Anwendung einer rekursiven Definition überblicken könnte.

Bei der Kritik der Dedekindschen Schnitttheorie ist Wittgensteins Hauptargument, daß in dieser Theorie die extensionale Betrachtungsweise mit der intensionalen vermengt werde. Dieser Vorwurf trifft in der Tat gewisse Darstellungen dieser Theorie, bei denen der Eindruck eines stärker konstruktiven Charakters des Verfahrens erweckt werden | soll, als er tatsächlich erreicht A132 wird. Will man die Schnitte nicht bloß als Zahlenmengen, sondern als definierende arithmetische Gesetze solcher Mengen einführen, so muß man entweder einen ganz vagen Begriff des „Gesetzes" benutzen, womit wenig gewonnen ist, oder man stößt, wenn man darauf ausgeht, den Begriff zu verdeutlichen, auf die Schwierigkeit, welche Hermann Weyl als den circulus vitiosus in der Begründung der Analysis bezeichnet hat und welche instinktiv schon längere Zeit vorher von verschiedenen Mathematikern empfunden wurde, die daraufhin eine Einschränkung des Verfahrens der Analysis befürworteten. Diese Kritik der imprädikativen Begriffsbildung spielt | noch heute in den 11 Gedankengängen der mathematischen Grundlagenforschung eine erhebliche

Rolle. Man gerät jedoch nicht in Schwierigkeit, wenn man den extensionalen Standpunkt konsequent beibehält, und die Dedekindsche Überlegung läßt sich durchaus in diesem Sinne auffassen und wurde wohl auch von Dedekind in diesem Sinne angestellt. Erforderlich ist hier nur, daß man außer dem Begriff der Zahl selbst auch den Begriff einer Menge von natürlichen Zahlen (und infolgedessen auch den einer Menge von Brüchen) als einen anschaulich bedeutungsvollen, nicht der Zurückführung bedürftigen Begriff anerkennt. Das bedeutet in Hinsicht auf das Ziel der Arithmetisierung der Analysis, und damit auch der Geometrie, eine gewisse Bescheidung. Aber – so könnte man hier wiederum in Wittgensteins Art fragen – „muß denn die Geometrie restlos arithmetisiert werden?" – Die Wissenschaftler sind oft in ihren Versuchen zu Reduktionen sehr dogmatisch. Auch wenn ein solcher Versuch nicht in der Weise gelingt, wie es angestrebt war, sondern nur so einigermaßen, in einer gewissen Annäherung, sind sie oft geneigt, dies wie einen vollen Erfolg zu nehmen. Gegenüber derartigen Einstellungen können Betrachtungsweisen, wie sie Wittgensteins Buch anregt, von Nutzen sein. –

Die nähere Erörterung der Dedekindschen Beweisführung bei Wittgenstein ist nicht befriedigend. Manche Einwendungen können schon durch eine deutlichere Darstellung von Dedekinds Gedankengang behoben werden.

Bei den Betrachtungen über Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit hat der Leser darauf zu achten, daß Wittgenstein unter Kardinalzahl immer endliche Kardinalzahl versteht und unter einer Reihe eine solche vom Ordnungstypus der natürlichen Zahlen. Die Polemik gegenüber dem Satz von der Überabzählbarkeit der Gesamtheit der reellen Zahlen leidet vor allem daran, daß die Analogie zwischen den Begriffen „überzählbar" und „unendlich" nicht deutlich exponiert wird. Entsprechend wie „Unendlichkeit einer Gesamtheit
A133 G" erklärt werden kann | als die Eigenschaft, daß zu endlich vielen Dingen aus G sich stets ein weiteres bestimmen läßt, so wird ja die Überzählbarkeit einer Gesamtheit G dadurch erklärt, daß sich zu jeder abzählbaren Teilgesamtheit ein in ihr noch nicht enthaltenes Element von G bestimmen läßt. In diesem Sinn wird die Überabzählbarkeit der Gesamtheit der reellen Zahlen durch das Diagonalverfahren nachgewiesen, und es findet da nicht etwa eine Erschleichung statt, wie es nach der Argumentation von Wittgenstein den Anschein hat. Der Satz von der Überabzählbarkeit der Gesamtheit der reellen Zahlen ist zunächst noch unabhängig von der Größenvergleichung der transfiniten Kardinalzahlen. Es ist übrigens zu beachten, was oft nicht berücksichtigt wird, daß für diesen Satz auch andere mehr geometrische Beweise als der durch das Diagonalverfahren vorhanden sind. Der Sachverhalt

kann vom Geometrischen aus als eine ganz grobe Tatsache angesprochen werden. Merkwürdig ist es auch, wenn vom Verfasser eine Frage wie die aufgeworfen wird (S. 57, Nr. 5): „Wie macht man denn von dem Satz Verwendung: ‚Es gibt keine größte (scil, endliche) Kardinalzahl?‘ … Vor allem ist zu bemerken, daß wir das überhaupt fragen, was darauf deutet, daß die Antwort nicht auf der Hand liegt.“ Man sollte meinen, daß man hier nicht lange nach der Antwort zu suchen hat. Unsere *ganze* Analysis mit ihren Anwendungen in Physik und Technik beruht auf der Unendlichkeit der Zahlenreihe. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik macht ständig implizite von dieser Unendlichkeit Gebrauch. Wittgenstein tut so, als ob die Mathematik fast nur für die Zwecke der häuslichen Besorgungen diente.

| Daß im ganzen Wittgenstein in seiner Stellungnahme zu den mathema- 12
tischen Grundlagenproblemen die finitistische und konstruktive Auffassung
vertritt, liegt in der Richtung seines Philosophierens. Man kann aber kaum
sagen, daß er aus der grundlagentheoretischen Situation eine Bestätigung für
seinen Standpunkt gewinnt. Er zeigt nur, in welcher Weise dieser Stand-
punkt bei der Beurteilung der strittigen Fragen anzulegen ist. Generell ist
es charakteristisch für die Situation bei den Grundlagenproblemen, daß für
keine der beiden hauptsächlich gegenüberstehenden philosophischen Auffas-
sungsweisen – die finitistisch-konstruktive und die „platonisch“-existentiale –
die bisher erhaltenen Ergebnisse eine eindeutige Begünstigung liefern. Jede
der beiden Ansichten kann Argumente zum Nachteil der anderen geltend ma-
chen. Die existentiale Auffassung hat aber den Vorzug, daß von ihr aus die
auf das Konstruktive gerichteten Untersuchungen gewürdigt werden können
(so wie die Untersuchung der Konstruktionen mit Zirkel und Lineal auch
für denjenigen Mathematiker Bedeutsamkeit | hat, der andere Methoden der A134
Konstruktion gelten läßt), während für den grundsätzlichen Konstruktivisten
ein großer Teil der klassischen Mathematik einfach wegfällt.

In gewissem Maße unabhängig von der Parteinahme in der besprochenen Opposition der Standpunkte sind diejenigen grundlagentheoretischen Betrachtungen Wittgensteins, die sich auf die Rolle der Formalisierung, auf die Zurückführung der Zahlentheorie auf Logik und auf die Frage der Widerspruchsfreiheit beziehen. Hier zeigt er in seinen Gesichtspunkten mehr Selbständigkeit, und diese Ausführungen bieten daher auch ein stärkeres Interesse.

In ${}_a\underline{\mathrm{B}}_a$ezug auf die Frage der Widerspruchsfreiheit macht er insbesondere das geltend, was seither auch von manchen Grundlagentheoretikern hervorgehoben wurde: daß im Rahmen eines formalen Systems der Widerspruch nicht so ausschließlich unter dem Aspekt des Abschreckenden betrachtet werden sollte und daß ein formales System als solches auch von Interesse sein kann, selbst wenn es auf einen Widerspruch führt. Zu bemerken ist allerdings, daß bei den früheren Systemen von Frege und Russell der Widerspruch bereits in wenigen Schritten, gewissermaßen durch die Grundstruktur des Systems, zustande kommt. Vieles ferner, was Wittgenstein in diesem Zusammenhang sagt, schießt weit über das Ziel hinaus. Unbefriedigend ist inbesondere das von ihm häufig gebrauchte Beispiel der Erzeugbarkeit von Widersprüchen durch Zulassung der Division durch Null. (Man braucht sich doch nur die Begründung der Regel des Kürzens zu überlegen, um zu sehen, daß diese auf den Fall des Faktors Null nicht Anwendung findet.)

Wittgenstein erkennt die Bedeutsamkeit eines Nachweises der Widerspruchsfreiheit jedenfalls an. Es ist aber doch fraglich, ob er sich die Rolle, welche die Bedingung der Widerspruchsfreiheit in den beweistheoretischen Überlegungen spielt, hinlänglich vergegenwärtigt. So leidet insbesondere die Erörterung des Gödelschen Unableitbarkeitstheorems und seines Beweises an dem Mangel, daß hier die bei Gödel ganz explizit auftretende Prämisse der Widerspruchsfreiheit des betrachteten formalen Systems übergangen wird. Ein zutreffender Vergleich, der anknüpfend an den Gödelschen Satz von Wittgenstein vorgebracht wird, ist derjenige eines Beweises der formalen Unbeweisbarkeit mit einem Beweis der Unmöglichkeit einer gewissen Konstruktion mit Zirkel und Lineal. Ein solcher Beweis enthält, sagt Wittgenstein, ein Element der Vorhersage. Sonderbar ist aber die anschließende Bemerkung (S. 52,
13 Nr. 14): „Ein Widerspruch ist als eine solche Vorhersage un|brauchbar.“
Tatsächlich werden doch solche Unmöglichkeitsbeweise in der Regel durch Herleitung eines Widerspruchs geführt.

A135 | In den Ausführungen zur Zahlentheorie findet sich als etwas Bemerkenswertes eine reservierte Haltung gegenüber der Frege-Russellschen Begründung der Zahlentheorie, wie sie wohl in den früheren Stadien der Wittgensteinschen Philosophie nicht vorhanden war. So sagt er an einer Stelle (S. 67, Nr. 4): „. . . der logische Kalkül sei nur – Fransen, die dem arithmetischen Kalkül angehängt seien.“ So prägnant ist dieser Gedanke wohl kaum sonst formuliert worden. Es mag gut sein, sich zu überlegen, in welchem Sinne das Gesagte gelten kann. Daß eine Einordnung der arithmetischen und insbesondere der numerischen Sätze in die Logistik gelungen ist, läßt sich nicht bestreiten. Das heißt, es ist gelungen, diese Sätze in rein logischen Termini zu formulieren und auf Grund dieser Formulierung im Rahmen der Logistik zu beweisen. Es fragt sich jedoch, ob dieses Ergebnis so zu beurteilen ist, daß damit ein eigentlich philosophisches Verständnis der arithmetischen Sätze gewonnen wird. Wenn wir uns den logistischen Beweis einer Gleichung wie $3+7=10$ vornehmen, so bemerken wir, daß innerhalb dessen ganz dieselbe vergleichende Verifikation auszuführen ist, wie sie beim üblichen Abzählen erfolgt. Dieses Erfordernis tritt besonders deutlich in der formalistischen Gestalt der Logik hervor; aber es besteht auch, wenn wir die Formel inhaltlich logisch interpretieren. Die logische Definition zum Beispiel der Dreizahligkeit ist strukturell so beschaffen, daß sie in sich gewissermaßen das Moment der Dreizahligkeit enthält. Es wird ja die Dreizahligkeit eines Prädikats P (beziehungsweise der Klasse, welche den Umfang von P bildet) erklärt durch die Bedingung, daß es Dinge x, y, z von der Eigenschaft P gibt, die paarweise voneinander verschieden sind, und daß ferner jedes Ding von der Eigenschaft P mit x oder y oder z identisch ist. Die Feststellung nun, daß für ein dreizahliges Prädikat P und ein siebenzahliges Prädikat Q, im Falle, daß die Prädikate nicht gemeinsam auf ein Ding zutreffen, die Alternative $P \vee Q$ ein zehnteiliges Prädikat ist, erfordert für ihre Begründung gerade solche Vergleichungen, wie sie im elementaren Rechnen gebraucht werden, nur daß hier noch ein zusätzlicher logischer Apparat (die „Fransen") in Funktion tritt. Wenn man sich dieses klarmacht, dann stellt es sich so dar, daß der betrachtete prädikatenlogische Satz gilt, weil $3+7=10$ ist, und nicht umgekehrt.

Ungeachtet also der Möglichkeit der Einordnung der Arithmetik in die Logistik stellt die Arithmetik das abstraktere („reinere") Schema dar, und dieses erscheint als paradox nur auf Grund einer traditionellen, aber bei näherem Zusehen nicht gerechtfertigten Ansicht, wonach die Allgemeinheit des Logischen in jeder Hinsicht die höchste Allgemeinheit bildet.

| Es mag gut sein, den Sachverhalt noch von einer anderen Seite her zu A136
betrachten. Eine Anzahl ist nach Frege als Eigenschaft eines Prädikates zu erklären. Diese Ansicht bietet bereits für den geläufigen Gebrauch des Anzahlbegriffes Schwierigkeiten, da in vielen Zusammenhängen, wo eine Zahlbestimmung auftritt, die Aufweisung eines Prädikates, von dem sie eine Eigenschaft sein soll, sich als höchst gezwungen erweist. Besonders ist dabei zu beachten, daß Anzahlen gar nicht nur in Feststellungen, sondern gleichermaßen in Anweisungen und Aufforderungen vorkommen, etwa wenn eine Hausfrau zu einem Boten sagt: „Hole mir 10 Äpfel!" Ferner hat auch die theoretische Ausgestaltung der Auffassung ihre Komplikationen. Einem Prädikat kommt im allgemeinen nicht ohne weiteres eine bestimmte | Anzahl zu, sondern nur 14
mit Bezug auf einen Bereich von Dingen, ein universe of discourse (abgesehen noch von den vielen Fällen von außerwissenschaftlichen Prädikaten,

denen sich überhaupt keine bestimmte Anzahl zuschreiben läßt). Die Anzahl müßte hiernach genauer als eine Beziehung zwischen einem Prädikat und einem Individuenbereich gekennzeichnet werden. In Freges Theorie fällt freilich diese Komplikation deshalb weg, weil er einen sozusagen absoluten Individuenbereich zu$_a$ $\underline{\ \mathrm{G}_a}$runde legt. Gerade dieser Ansatz führt ja aber, wie man weiß, auf den von Russell bemerkten Widerspruch. Abgesehen hiervon bedeutet ferner die Fregesche Konzeption seiner Prädikatentheorie, bei welcher die Wertverläufe der Prädikate als Dinge ganz auf gleicher Stufe wie die gewöhnlichen Individuen behandelt werden, bereits ein deutliches Abgehen von unserer gewöhnlichen Logik im Sinne einer theoretischen Konstruktion einer Rahmentheorie. Der Gedanke einer solchen Rahmentheorie hat seine methodische Bedeutung behalten, und die Frage einer theoretisch möglichst günstigen Gestaltung einer derartigen Rahmentheorie ist noch immer eine der grundlagentheoretischen Problemstellungen. Es kann aber bei einer solchen Rahmentheorie jedenfalls nur in einem erweiterten Sinn von einer „Logik" die Rede sein; die Logik im üblichen Sinn, welche bloß die allgemeinen Regeln für das deduktive Schließen angibt, muß hiervon unterschieden werden.

Die Kritik des Unternehmens der Einordnung der Arithmetik in die Logik wird von Wittgenstein freilich nicht in dem Sinn geübt, daß er die arithmetischen Sätze als Sachverhalte sui generis anerkannt wissen will, sondern er tendiert dahin, jenen Sätzen überhaupt den Sachverhaltscharakter abzusprechen. Er erklärt es geradezu als den „Fluch des Einbruches der mathematischen Logik in die Mathematik, daß nun jeder Satz sich in mathematischer Schreibung darstellen läßt und wir uns daher verpflichtet fühlen, ihn
A137 zu verstehen, obwohl ja diese | Schreibweise nur die Übersetzung der vagen gewöhnlichen Prosa ist" (S. 155, Nr. 46). Er erkennt eigentlich das Rechnen nur als eine eingelernte Technik mit Gebrauchswert an. Insbesondere versucht er, das Tatsächliche der Arithmetik definitorisch zu deuten. So überlegt er zum Beispiel (S. 33, Nr. 112): „Was nenne ich ‚die Multiplikation 13×13'? Nur das richtige Multiplikationsbild, an dessen unterem Ende 169 steht? Oder auch eine ‚falsche Multiplikation'?" Auch sonst stellt er öfters die Frage, was wir „ein Rechnen nennen" (S. 97, Nr. 73), und auf S. 92, Nr. 58, heißt es: „Denke, man sagte, durch das Rechnen lernen wir die Eigenschaften der Zahlen kennen. Aber *bestehen* die Eigenschaften der Zahlen außerhalb des Rechnens?" Die Tendenz ist anscheinend, die richtigen Additionen und Multiplikationen zur Definition des Rechnens zu nehmen und damit als trivialerweise „richtige" zu charakterisieren. Damit kommt man aber nicht durch, das heißt, man kann auf solche Weise nicht die Sachver-

halte zum Ausdruck bringen, die in den arithmetischen Zahlenbeziehungen vorliegen. Nehmen wir etwa die Assoziativität der Addition. Man kann gewiß die einzelnen Ziffernadditionen definitorisch festlegen. Dann bleibt aber die Merkwürdigkeit bestehen, daß eine Addition $3 + (7 + 8)$ dasselbe ergibt wie $(3 + 7) + 8$ und ebenso für beliebige Zahlen anstelle von $3, 7, 8$. Die zahlentheoretischen Ausdrücke sind in Hinsicht auf ihre mögliche Definition sozusagen überbestimmt. Auf dieser Art der Überbestimmtheit beruhen ja auch die vielen Proben, die wir beim Rechnen zur Verfügung haben.

| Gelegentlich wirft Wittgenstein die Frage auf, ob denn eine Rechnung, die an Hand des Dezimalsystems erfolgt, auch für die Vergleichung der Zahlen an Hand der direkten Darstellung durch Strichfolgen Gültigkeit hat. Diese Frage findet ihre Beantwortung in der mathematischen Begründung der Methode des Rechnens mit dekadischen Ziffern. Allerdings rührt hier Wittgenstein an etwas Grundsätzliches: Die Beweise zur Rechtfertigung der dekadischen Rechenregeln nämlich beruhen, wenn sie finitistisch geführt werden, auf der Voraussetzung, daß jede Zahl, die wir dekadisch bilden können, auch in der direkten Strichzeichnung herstellbar ist und daß an solchen Strichfolgen auch die Operationen der Zusammenfügung etc. sowie die Vergleichungen stets durchführbar sind. Darin zeigt sich, daß auch die finitistische Zahlentheorie nicht in vollem Sinne „konkret“ ist, sondern Idealisierungen verwendet.

In einem gewissen Kontrast zu der Tendenz, das numerische Rechnen als bloß definitorisch charakterisiert anzusehen und überhaupt den arithmetischen Sätzen einen eigentlichen Sachverhaltscharakter abzusprechen, scheinen die schon früher erwähnten Äußerungen zu stehen, | in denen Wittgen- A138
stein vom synthetischen Charakter der Mathematik spricht. Hier sei in diesem Zusammenhang noch auf die folgende Stelle hingewiesen (S. 160, Nr. 3): „Wie kannst du behaupten, daß ‚625‘ und ‚25×25‘ dasselbe sagen? – Erst durch unsere Arithmetik *werden* sie *eins*.“ Hiermit ist doch ungefähr das gleiche gemeint, was Kant im Sinne hat bei der Argumentation gegen die Ansicht, daß $7 + 5 = 12$ ein bloß analytischer Satz sei, und wo er geltend macht, daß der Begriff von 12 „keineswegs dadurch schon gedacht ist, daß ich mir bloß jene Vereinigung von 7 und 5 denke“, und dann hinzufügt: „Daß 7 zu 5 hinzugetan werden *sollten*, habe ich zwar in dem Begriff einer Summe $= 7+5$ gedacht, aber nicht, daß diese Summe der Zahl 12 gleich sei.“ (*Kritik der reinen Vernunft*, B 14 ff.) In moderner Form könnte man dieses Kantische Argument etwa so ausdrücken: Der Begriff „$7 + 5$“ ist ein Individualbegriff (nach der Bezeichnung von Carnap), ausdrückbar durch eine Kennzeichnung $\iota_x(x = 7 + 5)$, und dieser Begriff ist verschieden von dem Begriff „12“, was

nur darum nicht so offenkundig ist, weil man die Addition der kleinen Zahlen 7 und 5 unwillkürlich direkt ausführt. Wir haben hier den in der neueren Logik in Anlehnung an Frege so häufig diskutierten Fall zweier Termini von verschiedenem „Sinn", aber gleicher „Bedeutung", und für die Beurteilung des analytischen oder synthetischen Charakters von Urteilen muß man sich ja immer an den Sinn und nicht an die Bedeutung halten. Die Kantische Behauptung des synthetischen Charakters der Mathematik steht übrigens gar nicht im Widerspruch zu dem, was die Russellsche Schule behauptet, wenn sie die Sätze der Arithmetik für analytisch erklärt. Es liegen hier ja ganz verschiedene Begriffe des Analytischen vor, worauf in neuerer Zeit besonders E. W. Beth hingewiesen hat.[2]

Eine andere innere Gegensätzlichkeit findet sich in Wittgensteins Stellungnahme zur Logistik. Einerseits tendiert er oft dahin, Beweise als formalisiert anzusehen. So heißt es auf S. 93, Nr. 64: „Denke, ich gäbe jemandem die Aufgabe: ‚Finde einen Beweis des Satzes ...' – die Lösung wäre doch, daß er mir gewisse Zeichen vorlegt." Die unterschiedliche und unentbehrliche Rolle der Umgangssprache gegenüber derjenigen einer formalisierten Sprache tritt
16 in seinen Betrach|tungen nicht hervor. Er spricht oft vom „Sprachspiel" und beschränkt die Anwendung dieses Ausdrucks keineswegs auf die künstlichen formalen Sprachen, für die er doch allein angemessen ist. Unsere natürliche
A139 Sprache ist ja keineswegs etwas von der Art eines Spiels; sie ist uns | eigen, fast wie unsere Gliedmaßen. Anscheinend ist Wittgenstein noch beherrscht von dem Gedanken einer alles wissenschaftliche Denken umspannenden Wissenschaftssprache. Dem stehen Äußerungen starker Kritik an der mathematischen Logik gegenüber. Außer der schon erwähnten vom „Fluch des Einbruchs der mathematischen Logik in die Mathematik" ist insbesondere noch die folgende bemerkenswert (S. 156, Nr. 48): „Die ‚mathematische Logik' hat das Denken von Mathematikern und Philosophen gänzlich verbildet, indem sie eine oberflächliche Deutung der Formen unserer Umgangssprache zur Analyse der Strukturen der Tatsachen erklärte. Sie hat hierin freilich nur auf der Aristotelischen Logik weitergebaut."

Den Gedanken, der wohl dieser Kritik zu$_a$ G$_a$runde liegt, können wir uns näherbringen, wenn wir daran denken, daß der logische Kalkül von verschiedenen seiner Begründer als eine Realisierung des Leibnizschen Gedankens der characteristica universalis gedacht war. Gegenüber Aristoteles enthält

[2] *Vide* [?].

die Äußerung Wittgensteins genauer besehen keinen Vorwurf; die Aristotelische Logik bezweckt ja nichts anderes, als die gebräuchlichen Formen des logischen Argumentierens zu fixieren und auf ihre Rechtmäßigkeit hin zu prüfen. Die Aufgabe der characteristica universalis sollte aber eine viel weitergehende sein, nämlich eine Begriffswelt zu etablieren, welche ein Verstehen aller wirklichen Zusammenhänge ermöglichen sollte. Für ein in solcher Richtung gehendes Unternehmen kann es aber nicht als ausgemacht gelten, daß die grammatischen Strukturen unserer Sprache auch als Grundgerüst der Theorie zu fungieren haben; denn die Kategorien dieser Grammatik haben doch einen mindestens partiell anthropomorphen Charakter. Allerdings ist zu sagen, daß anstelle unserer üblichen Logik nichts irgendwie Gleichwertiges bisher in der Philosophie erdacht worden ist. Was insbesondere Hegel bei seiner Ablehnung der Aristotelischen Logik an deren Stelle setzte, ist ein bloßes Vergleichen von Allgemeinbegriffen an Hand von Analogien und Assoziationen ohne irgendein deutlich regulierendes Verfahren: diese Methodik kann gewiß nicht als eine auch nur annähernde Erfüllung der Leibnizschen Ideen gelten.

Von Wittgenstein freilich können wir keine Anweisung für eine Ersetzung der üblichen Logik durch etwas philosophisch Leistungsfähigeres erhalten. Er hat vermutlich eine Analyse der Struktur des Wirklichen für eine verfehlte Aufgabenstellung angesehen, und er suchte ja keineswegs nach einem irgendwie determinierten Vorgehen. Der „logische Zwang“, die „Unerbittlichkeit der Logik“, die „Härte des logischen Muß“ sind ihm dauernd ein Stein des Anstoßes und stets aufs neue Grund zur Verwunderung. Dabei vergegenwärtigt er sich viel- | leicht nicht immer, daß doch alle diese Ausdrücke A140
den Charakter bloß eines populären Vergleiches haben, der in vieler Hinsicht unangemessen ist. Das Strikte des Logischen und Exakten beschränkt nicht unsere Freiheit. Es ist gerade unsere Freiheit, daß wir gegenüber einer Erscheinungswelt des Unscharfen und Unexakten das Genaue in der Gedankenbildung intendieren können. Wittgenstein spricht davon, daß das „Muß der Kinematik“ (S. 37, Nr. 121) viel härter ist, als das „kausale Muß“. Ist es nicht ein Moment der Freiheit, daß wir die virtuellen, bloß der kinematischen Gesetzlichkeit unterworfe|nen Bewegungen neben den wirklichen, kausal be- 17
stimmten erdenken und mit diesen vergleichen können?

Die aufgeklärte Menschheit hat in den rationalen Bestimmtheiten ihre befreiende Zuflucht gesucht vor der beherrschenden Geltung des bloß Autoritativen. In der Gegenwart ist allerdings das Bewußtsein hiervon großenteils abhanden gekommen, und von vielen wird die Geltung des Wissenschaftlichen als belastende Autorität empfunden.

Bei Wittgenstein ist es gewiß nicht dieses Moment, welches seine kritische Haltung gegenüber der wissenschaftlichen Objektivität hervorruft. Dennoch geht seine Tendenz dahin, die intersubjektive Einhelligkeit im Gebiet des Mathematischen als heteronom zu erklären. Die Übereinstimmung soll dadurch begriffen werden, daß wir zunächst gemeinsam in elementarer Technik „abgerichtet" sind und daß die so erzeugte Übereinstimmung sich durch diese Beweise fortsetzt (vgl. Zitat auf S. 125). Daß diese Art der Erklärung unzulänglich ist, fällt wohl jedem auf, der sich nicht durch den Eindruck der Originalität des Aspektes bestechen läßt. Schon die Möglichkeit der Rechentechnik mit ihren mannigfachen Freiheiten der Zerlegung von Aufgaben in einfachere, wie sie ja durch die Gültigkeit der Rechengesetze gegeben ist, kann nicht als Folge von Übereinkunft verstanden werden (vgl. die Bemerkung auf S. 137). Wenn wir weiterhin an die so ungeheuer reichhaltigen aufeinandergetürmten Begriffsbildungen, etwa in der Funktionentheorie, denken – wo dann von den jeweils erreichten Sätzen gilt, was Wittgenstein einmal sagt: „Wir lehnen uns an sie oder fußen auf ihnen" (S. 124, Nr. 35) –, so wird doch durch die genannte Auffassung nicht im mindesten erklärt, warum diese begrifflichen Gebäude nicht immerfort einstürzen. Auf Grund von Wittgensteins Standpunkt ist es in der Tat nicht erstaunlich, daß er den Widerspruch nicht als etwas Befremdliches empfindet; aber was in seiner Darstellung nicht hervortritt, ist, daß doch Widersprüche in der Mathematik nur bei ganz pe-
A141 ripheren Extrapolationen und sonst überhaupt nicht angetroffen | werden. Man kann in diesem Sinne sagen, daß das Faktum der Mathematik durch Wittgensteins Philosophie gar nicht verständlich wird.

Woher aber entspringt bei Wittgenstein die ausgängliche Überzeugung, daß es im Bereich des Mathematischen keine eigentlich gegenständliche Erkenntnis geben, vielmehr alles nur in Technik, Maßstäben und gewohnheitsmäßigen Einstellungen bestehen könne? Er denkt gewiß: „Hier ist doch gar nichts, worauf sich Erkenntnis beziehen sollte." Das hängt damit zusammen, daß er, wie erwähnt, keinerlei Phänomenologie anerkennt. Was hier seine Opposition hervorruft, sind vermutlich Redeweisen wie etwa, wenn man vom „Wesen" einer Farbe spricht, wobei das Wort „Wesen" die Vorstellung von verborgenen Eigenschaften der Farbe weckt, während doch die Farben als solche nichts anderes sind, als was sich in ihren erscheinenden Eigenschaften und Beziehungen zeigt. Aber dieses hindert doch nicht, daß solche Eigenschaften und Beziehungen Inhalt von objektiven Feststellungen sein können; die Farben sind ja nicht einfach ein Nichts. Auch wenn wir die Prätentionen

etwa der Husserlschen Philosophie in $_a\underline{\text{B}}_a$ezug auf die „Wesensschau“ nicht
übernehmen, so wird damit doch nicht eine objektive Phänomenologie ausge-
schlossen. Daß in den Gebieten der Farben und Töne die phänomenologische
Betrachtung noch in den Anfängen steht, hängt sicherlich damit zusammen,
daß ihr für die theoretische Physik keine erhebliche Bedeutung zukommt, da
wir in der Physik schon auf einer | frühen Stufe veranlaßt werden, die Farben 18
und Töne qualitativ als solche zu eliminieren. Die Mathematik aber läßt
sich auffassen als theoretische Phänomenologie der Strukturen. In der Tat
ist das, was dem Qualitativen phänomenologisch gegenübersteht, nicht das
Quantitative, wie es die traditionelle Philosophie lehrt, sondern das Struktu-
relle, bestehend in den Formen des Nebeneinander-, Nacheinander- und des
Zusammengesetztseins, mit all den Begriffsbestimmungen und Gesetzlichkei-
ten, die sich darauf beziehen.

Eine solche Auffassung von der Mathematik läßt die Stellungnahme zu den Grundlagenproblemen der Mathematik noch weitgehend offen. Sie kann aber für jemanden, der von den Ansichten Wittgensteins ausgeht, den Weg frei machen für eine Betrachtungsweise, welche der Eigenart und der Bedeutsamkeit des Mathematischen besser gerecht wird.

Kapitel 23

Bernays Project: Text No. 24

Die Mannigfaltigkeit der Direktiven für die Gestaltung geometrischer Axiomensysteme (1959)

The multiplicity of purposes in formulations of geometric axiom systems

(*The Axiomatic Method*, ed. by Henkin, Suppes, Tarski, Amsterdam: North-Holland, S. 1–15;
repr. in *Abhandlungen*, S. 142–154)

1/A142 | Bei der Betrachtung der Axiomatisierungen der Geometrie stehen wir unter dem Eindruck der großen Mannigfaltigkeit der Gesichtspunkte, unter denen die Axiomatisierung erfolgen kann und auch schon erfolgte. Die ursprüngliche einfache alte Vorstellung, wonach man schlechtweg von *den* Axiomen der Geometrie sprechen kann, ist nicht nur durch die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrien verdrängt, und ferner auch durch die Einsicht in die Möglichkeit verschiedener Axiomatisierungen einer und derselben Geometrie, sondern es sind überhaupt wesentlich verschiedene methodische Gesichtspunkte aufgetreten, unter denen man die Axiomatisierung der Geometrie unternommen hat und deren Zielsetzungen sogar in gewissen Beziehungen antagonistisch sind.

Der Keim für diese Mannigfaltigkeit ist bereits in der euklidischen Axiomatik zu finden. Für deren Gestaltung war der Umstand bestimmend, daß man hier an$_{a}\underline{\ \mathrm{H}}_{a}$and der Geometrie zum ersten$_{a}\underline{\ \mathrm{M}}_{a}$al auf die Problemstellung der Axiomatik geführt wurde. Die Geometrie ist hier sozusagen die Mathematik schlechthin. Das Verhältnis zur Zahlentheorie ist methodisch wohl kein völlig deutliches. In gewissen Teilen wird ein Stück Zahlentheorie mit Verwendung der anschaulichen Zahlvorstellung entwickelt. Ferner wird in der Proportionenlehre inhaltlich von dem Zahlbegriff Gebrauch gemacht, sogar mit einem impliziten Einschluß des Tertium non datur; allerdings scheint es, daß man dessen volle Verwendung zu vermeiden trachtete.

Während die methodische Sonderstellung des Zahlbegriffes hier nicht explicite hervortritt, wird der Größenbegriff ausdrücklich als inhaltliches Hilfsmittel an die Spitze gestellt, in einer Art übrigens, die wir heute nicht mehr konzedieren können, indem nämlich von verschiedenen Gegenständlichkeiten als selbstverständlich vorausgesetzt wird, daß sie Größencharakter haben. Der Größenbegriff wird freilich auch der Axiomatisierung unterworfen; die diesbezüglichen Axiome werden jedoch ausdrücklich als vorgängige (*κοιναὶ ἔννοιαι*) von den übrigen Axiomen abgesondert. | Diese Axiome sind von 2
ähnlicher Art$_{d_2}\underline{,}_{d_2}$ wie diejenigen, die man heute für die abelschen Gruppen aufstellt. Was aber auf Grund des damaligen methodischen Standpunktes unterblieb, war, | daß nicht axiomatisch fixiert wurde, welche Gegenstände A143
als Größen anzusehen seien.

$_{d_2}\underline{\text{Umsomehr}}_{d_2}$ Um so mehr ist es zu bewundern, daß man damals schon auf das Besondere derjenigen Voraussetzung aufmerksam wurde, durch welche die archimedischen Größen, wie wir sie heute nennen, ausgezeichnet werden. Das Archimedische (Eudoxische) Axiom wird dann, in der an die Griechen anschließenden mittelalterlichen Tradition, insbesondere in den Untersuchungen der Araber über das Parallelenaxiom wesentlich benutzt. Auch bei dem Beweis von Saccheri zur Ausschließung der „Hypothese des stumpfen Winkels“ tritt es als wesentlich auf. In der Tat ist ja diese Ausschließung ohne das Archimedische Axiom nicht möglich, da ja eine nicht-archimedische, schwach-sphärische (bzw. schwach-elliptische) Geometrie mit den Axiomen der euklidischen Geometrie, abgesehen vom Parallelenaxiom, im Einklang steht.

Bei allen diesen Untersuchungen tritt das zweite Stetigkeitsaxiom, welches im späteren 19.$_{d_2}\underline{\text{ten}}_{d_2}$ Jahrhundert formuliert wurde, noch nicht auf. Es konnte bei den Beweisführungen, für die es in Betracht kam – wie bei den Flächeninhalts- und Längenbestimmungen –, auf Grund der erwähnten Verwendung des Größenbegriffs, entbehrt werden, wonach es z. B. als selbstverständlich galt, daß die Kreisfläche sowie der Kreisumfang eine bestimmte Größe besitzen. An die Stelle der alten Größenlehre trat zum Beginn der Neuzeit als beherrschende übergeordnete Disziplin die Größenlehre der *Analysis*, die sich formal und dem Inhalt nach sehr reich entwickelte, noch ehe sie zu methodischer Deutlichkeit gelangte.

Freilich, bei der Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie spielte die Analysis zunächst keine erhebliche Rolle, wohl aber wird sie dominierend in den nachfolgenden Untersuchungen von Riemann und Helmholtz, und später von Lie, zur Kennzeichnung der drei ausgezeichneten Geometrien durch gewisse sehr allgemeine, analytisch faßbare Bedingungen. Charakteristisch für diese Behandlung der Geometrie ist insbesondere, daß man nicht nur die einzelnen Raumgebilde, sondern auch die Raummannigfaltigkeit selbst zum Gegenstand nimmt. In der Möglichkeit der Durchführung einer solchen Betrachtung zeigten sich die gewaltigen begrifflichen und formalen Mittel, welche die Mathematik in der Zwischenzeit gewonnen hatte; und in der Anlage der Problemstellung äußerte sich die begrifflich-spekulative Richtung, welche die Mathematik im Laufe des $19._{d_2}\underline{\text{ten}}_{d_2}$ Jahrhunderts einschlug.

3 | Die differentialgeometrische Behandlung der Grundlagen der Geometrie ist ja übrigens bis in die neueste Zeit durch Hermann Weyl sowie Elie Cartan und Levi-Cività, in Anknüpfung an die allgemeine | Relativitätstheorie Einsteins, weiter entwickelt worden. So imponierend und elegant das in dieser Hinsicht Erreichte ist, so haben sich doch die Mathematiker vom grundlagentheoretischen Standpunkt damit nicht zufriedengegeben. Zunächst suchte man sich von der für die differentialgeometrische Methode wesentlichen Voraussetzung der Differenzierbarkeit der Abbildungsfunktionen zu befreien. Dafür bedurfte es der Ausbildung der Methoden einer allgemeinen Topologie, welche um die Wende des Jahrhunderts begann und seitdem eine so imposante Entwicklung genommen hat. Weitergehend trachtete man sich von der Voraussetzung des archimedischen Charakters der geometrischen Größen überhaupt unabhängig zu machen. A144

Diese Tendenz steht im Zeichen derjenigen Entwicklung, mit welcher die Analysis ihre vorher beherrschende Stellung in gewissem Maße eingebüßt hat. Dieses neue Stadium in der mathematischen Forschung knüpfte sich an die Auswirkung der schon erwähnten begrifflich-spekulativen Richtung der Mathematik im $19._{d_2}\underline{\text{ten}}_{d_2}$ Jahrhundert, wie sie insbesondere in der Schöpfung der allgemeinen Mengenlehre, in der schärferen Begründung der Analysis, in der Konstitution der mathematischen Logik und in der neuen Fassung der Axiomatik in Erscheinung trat.

Für dieses neue Stadium war zugleich charakteristisch, daß man wieder mehr auf die Methoden der alten griechischen Axiomatik zurückkam, wie es wiederholt in den Epochen geschah, in denen man auf begriffliche Präzision stärkeren Nachdruck legte. In Hilberts ${}_a$*Grundlagen der Geometrie*${}_a$[a] finden wir einerseits dieses Zurückkommen auf die alte elementare Axiomatik, freilich in grundsätzlich veränderter methodischer Auffassung, andererseits als ein hauptsächliches Thema die möglichst weitgehende Ausschaltung des archimedischen Axioms: sowohl bei der Proportionenlehre wie beim Flächeninhaltsbegriff sowie in der Begründung der Streckenrechnung. Diese Art der Axiomatisierung hatte übrigens für Hilbert nicht den Sinn der Ausschließlichkeit; er hat ja bald danach eine andere Art der Begründung danebengestellt, mit der zum ersten${}_a$ M${}_a$al das vorhin erwähnte Programm einer topologischen Grundlegung aufgestellt und durchgeführt wurde.

Etwa gleichzeitig mit Hilberts Grundlegung wurde auch in der Schule von Peano und Pieri die Axiomatisierung der Geometrie gepflegt. Bald folgten
auch die axiomatischen Untersuchungen von Veblen und R. L.|Moore; und es 4
waren nunmehr die Forschungsrichtungen eingeschlagen, in denen sich auch heute die Beschäftigung mit den Grundlagen der Geometrie weiterbewegt. Als kennzeichnend hierfür haben wir eine Vielheit der methodischen Richtungen.

| Die eine ist die, welche die Mannigfaltigkeit der kongruenten Transfor- A145
mationen durch möglichst allgemeine und prägnante Bedingungen zu kennzeichnen sucht, die zweite${}_{d_2,d_2}$ diejenige, welche die projektive Struktur des Raumes voranstellt und das Metrische auf das Projektive mit der von Cayley und Klein ausgebildeten Methode der projektiven Maßbestimmungen zurückzuführen trachtet, und die dritte die, welche auf eine elementare Axiomatisierung der vollen Kongruenzgeometrie ausgeht.

Verschiedene wesentlich neue Gesichtspunkte sind in der Entwicklung dieser Richtungen hinzugetreten. Einmal erhielt die projektive Axiomatik eine verstärkte Systematisierung mittels der Verbandstheorie. Ferner wurde man gewahr, daß man bei der Kennzeichnung der Gruppe der kongruenten Transformationen die mengentheoretischen und funktionentheoretischen Begriffsbildungen zurücktreten lassen kann, indem man die Transformationen durch sie bestimmende Gebilde festlegt. Damit kommt das Verfahren dem der elementaren Axiomatik nahe, da die Gruppenbeziehungen sich nun als

[a] *Vide* [**?**].

Beziehungen zwischen geometrischen Gebilden darstellen.

Ich will aber hier nicht näher von diesen beiden Forschungsrichtungen der geometrischen Axiomatik sprechen, für die ja hier authentischere Vertreter anwesend sind, auch nicht von den Erfolgen, die mit Verwendung topologischer Methoden erzielt worden sind, worüber insbesondere neuere Abhandlungen von Freudenthal einen Überblick liefern, sondern mich den Fragen der an $\text{dritte}_{d_2}\underline{\text{n}}_{d_2 a_2}\underline{\text{r}}_{a_2}$ Stelle genannten Richtung der Axiomatisierung zuwenden.

Selbst innerhalb dieser Richtung finden wir wiederum eine Mannigfaltigkeit von möglichen Zielsetzungen. Man kann einerseits darauf ausgehen, mit möglichst wenigen Grundelementen, etwa nur einem Grundprädikat und einer Gattung von Individuen, auszukommen. Andererseits kann man vornehmlich darauf gerichtet sein, natürliche Absonderungen von Teilen der Axiomatik hervortreten zu lassen. Diese Gesichtspunkte führen zu verschiedenen Alternativen.

So wird einerseits durch die Betrachtung der nichteuklidischen Geometrie die Voranstellung der „absoluten“ Geometrie nahegelegt. Andererseits hat auch ein solcher Aufbau manches für sich, bei dem die affine Vektorgeometrie vorangestellt wird, wie es am Anfang von $\text{Weyl}_{d_2}\underline{\text{'}}_{d_2}\text{s}$ | *Raum, Zeit, Materie*[b] geschieht. Diesen beiden Gesichtspunkten kann man schwerlich zugleich in einer Axiomatik Genüge tun. Ein anderes Beispiel ist dieses. Bei der Voranstellung der Axiome der Inzidenz und Anordnung ist es eine mögliche und elegante begriffliche Reduktion, daß man, nach dem $\text{Vor}_{d_2}\textbf{gang}_{d_2 a_2}\textbf{gehen}_{a_2}$ von
A146 Veblen, den Begriff der | Kollinearität auf den Zwischen-Begriff zurückführt. Andererseits ist es für manche Überlegungen von Wichtigkeit, die von dem Anordnungsbegriff unabhängigen Folgerungen der Inzidenzaxiome abzusondern; so ist es ja $\text{wünschenswert}_{a_2}\underline{,}_{a_2}$ die Begründung der Streckenrechnung aus den Inzidenzaxiomen als unabhängig von den Anordnungsaxiomen zu erkennen. Wiederum bei der Theorie der Anordnung selbst hat man Ersparungen von Axiomen der linearen Anordnung durch Anwendung des Axioms von Pasch als möglich erkannt; andererseits ist in gewisser Hinsicht eine Anlage der Axiome zu bevorzugen, bei welcher die für die lineare Anordnung kennzeichnenden Axiome abgesondert werden.

Mit diesen Beispielen von Alternativen ist die Mannigfaltigkeit in den möglichen und auch den tatsächlich verfolgten Zielsetzungen nicht annähernd erschöpft. So ist es ein möglicher und sinngemäßer, wenn auch nicht obliga-

[b] *Vide* [**?**].

torischer regulativer Gesichtspunkt, daß die Axiome so formuliert werden sollen, daß sie sich jeweils nur auf ein beschränktes Raumstück beziehen. Dieser Gedanke ist impli$_{a_2}\underline{\text{z}}_{a_2}$ite ja wohl schon in der euklidischen Axiomatik mitbestimmend; und es mag auch sein, daß der Anstoß, den man so frühzeitig an dem Parallelenaxiom genommen hat, gerade darauf beruht, daß in der euklidischen Formulierung der Begriff der genügend weiten Verlängerung auftritt. Die erstmalige explizite Durchführung des genannten Programmpunktes geschah durch Moritz Pasch, und es knüpfte sich daran die Einführung idealer Elemente mit Hilfe von Schnittpunktsätzen, eine seitdem in erfolgreicher Weise ausgestaltete Methode der Begründung der projektiven Geometrie.

Eine andere Art der möglichen zusätzlichen Aufgabestellung ist diejenige, die Unschärfe unseres bildhaften Vorstellens begrifflich nachzuahmen, wie dieses ja Hjelmslev getan hat.[c] Das ergibt freilich nicht nur eine andere Art der Axiomatisierung, sondern überhaupt ein abweichendes Beziehungssystem, ein Verfahren, welches wohl wegen seiner Komplikation nicht viel Anklang gefunden hat. Doch auch ohne in dieser Richtung sich so weit von dem Üblichen zu entfernen, kann man etwas in gewisser Hinsicht Ähnliches anstreben, indem man den Begriff des Punktes als Gattungsbegriff vermeidet, wie es ja in verschiedenen interessanten | $_{d_2}\underline{\text{nuereen}}_{d_2\,a_1}\underline{\text{neueren}}_{a_1}$ Axiomati- 6
sierungen geschieht, so insbesondere in derjenigen von Huntington.[d]

In solcher Weise zeigt sich auf mannigfachste Art, daß es kein eindeutiges Optimum für die Gestaltung eines geometrischen Axiomensystems gibt. Was übrigens die Reduktionen in Hinsicht der Grundbegriffe und der Dingarten betrifft, so ist ungeachtet des grundsätzlichen Interesses, welches jede solche Reduktionsmöglichkeit hat, doch immer daran zu erinnern, daß die tatsächliche Anwendung einer solchen | Reduktion sich nur dann emp- A147
fiehlt, wenn damit eine übersichtliche Gestaltung des Axiomensystems erreicht wird.

Es lassen sich immerhin gewisse Direktiven für Reduktionen nennen, die wir generell akzeptieren können. Nehmen wir etwa als Beispiel die Hilbert$_{d_2}\underline{\text{'}}_{d_2}$sche Fassung der Axiomatik. Bei dieser werden einerseits die Geraden als eine Dinggattung genommen, andererseits die Halbstrahlen als Punktmengen eingeführt und anschließend dann die Winkel als geordnete Paare zweier von einem Punkt ausgehender Halbstrahlen, also als Paare von Mengen, erklärt. Hier sind tatsächlich Möglichkeiten der vereinfachenden Reduktion

[c] *Vide* [**?**].
[d] *Vide* [**?**].

gegeben. Man mag verschiedener Meinung darüber sein, ob man anstatt der verschiedenen Gattungen „Punkt$_{d_2}$;$_{d_2 a_2}$,$_{a_2}$ Gerade, Ebene“ nur eine Gattung der Punkte zu$_a$ G$_a$runde legen will, wobei dann anstelle der Inzidenzbeziehung die Beziehungen der Kollinearität und der Komplanarität von Punkten treten. In der verbandstheoretischen Behandlung werden ja die Geraden und Ebenen gleichstehend mit den Punkten als Dinge genommen. Hier steht man wiederum vor einer Alternative. Hingegen die Halbstrahlen als Punktmengen einzuführen, überschreitet jedenfalls den Rahmen der elementaren Geometrie und ist auch für diese nicht nötig. Generell können wir es wohl als Direktive nehmen, daß höhere Gattungen nicht ohne Erfordernis eingeführt werden sollen. Beim Fall der Winkeldefinition kann man das dadurch vermeiden, daß man die Winkelaussagen auf Aussagen über Punkttripel reduziert, wie dieses ja von R. L. Moore[1*] durchgeführt wurde. Hier wird sogar noch eine weitere Reduktion erreicht, indem überhaupt die Winkelkongruenz mit Hilfe der Streckenkongruenz erklärt wird, doch findet hierbei wiederum auch eine gewisse Einbuße statt. Nämlich die Beweisführungen stützen sich dabei wesentlich auf die Kongruenz von ungleichsinnig zugeordneten Dreiecken. Daher ist diese Art der Axiomatisierung nicht geeignet für den Problemkreis derjenigen Hilbert$_{d_2}$'$_{d_2}$schen Untersuchungen, welche sich auf das Verhältnis der gleichsinnigen Kongruenz zur Symmetrie beziehen. Diese Bemerkung be-
7 trifft freilich auch die meisten der | Axiomatisierungen, bei denen der Begriff der Spiegelung$_{d_2}$**en**$_{d_2}$ an der Spitze steht.

Neben den allgemeinen Gesichtspunkten möchte ich als etwas Einzelnes eine spezielle Möglichkeit der Anlage eines elementaren Axiomensystems erwähnen, nämlich eine solche Axiomatik, bei welcher der Begriff „das Punk-
A148 tetripel a, b, c bildet bei b einen rechten Winkel“ als | einzige Grundbeziehung und die Punkte als einzige Grundgattung genommen werden, ein Programm, auf welches neuerdings durch eine Arbeit von Dana Scott hingewiesen worden ist.[2*] Die genannte Beziehung genügt der von Tarski festgestellten notwendigen Bedingung für ein allein ausreichendes Grundprädikat der Planimetrie.[3*] Im Vergleich mit dem für eine Axiomatik solcher Art vorbildlich gewordenen Verfahren Pieri$_{d_2}$'$_{d_2}$s,[4*] der ja in einer Axiomatisierung die Beziehung „b

[1*] *Vide* [**?**]. (Die Fußnoten 1* bis 6* sind nachträgliche Hinzufügungen [to the reprint in the *Abhandlungen*].)

[2*] *Vide* [**?**].

[3*] *Vide* [**?**].

[4*] *Vide* [**?**].

und c haben von a gleichen Abstand“ als Grundbegriff nahm, scheint hier insofern eine Erleichterung zu bestehen, als der Begriff der Kollinearität von Punkten sich enger an den des rechten Winkels als an den Pieri$_{d_2}$'$_{d_2}$schen Grundbegriff anschließt. Was freilich den Kongruenzbegriff anbelangt, so scheint sich für die Axiome der Kongruenz aus der betrachteten Reduktion keine Vereinfachung zu ergeben. Übrigens ist diese Axiomatisierung ebenso wie die genannte Pieri$_{d_2}$'$_{d_2}$sche eine von denen, die keine Aussonderung der gleichsinnigen Kongruenz liefern.[1]

Für eine elementare Axiomatisierung der Geometrie stellt sich als besondere Frage die der Gewinnung einer Vollständigkeit im Sinne der Kategorizität. Diese wird bei den meisten Axiomensystemen durch die Stetigkeitsaxiome erwirkt. Die Einführung dieser Axiome bedeutet aber, wie man weiß, eine Überschreitung des Rahmens der gewöhnlichen Prädikatenlogik, indem das archimedische Axiom den allgemeinen Zahlbegriff verwendet und das zweite Stetigkeitsaxiom den allgemeinen Prädikaten- oder Mengenbegriff. Wir haben seither aus den Untersuchungen Tarski$_{d_2}$'$_{d_2}$s gelernt, daß wir eine Vollständigkeit, wenigstens im deduktiven Sinne, in einem elementaren Rahmen erreichen können, wobei das Bemerkenswerte ist, daß das Schnittaxiom in einer gewissen Formalisierung erhalten bleibt, während von dem $_a$**A**$_a$rchimedischen Axiom abgesehen wird. Das $_a$**A**$_a$rchimedische Axiom fällt ja insofern formal aus dem sonstigen Rahmen heraus, als es in logischer Formalisierung die Gestalt einer un|endlichen Alternative hat, während $|_A$ 8/A149
das Schnittaxiom auf Grund seiner Form der Allgemeinheit sich durch ein Axiomenschema darstellen und dadurch in seiner Anwendung dem jeweiligen formalen Rahmen anpassen läßt$_{d_2,d_2}$ – wobei dann für den elementaren Rahmen der Prädikatenlogik die Beweisbarkeit des $_a$**A**$_a$rchimedischen Axioms aus dem Schnittaxiom verlorengeht. Freilich hat eine solche Beschränkung auf einen prädikatenlogischen Rahmen zur Folge, daß verschiedene Überlegungen nur metatheoretisch ausgeführt werden können, wie z. B. der Beweis des Satzes, daß ein einfach geschlossenes Polygon die Ebene zerlegt, und ebenso die Betrachtung über Ergänzungsgleichheit und Zerlegungsgleichheit von Polygonen. Man steht hier wieder einmal vor einer Alternative, nämlich der, ob man den Gesichtspunkt der Elementarität des logischen Rahmens voranstellen will, oder sich hinsichtlich des logischen Rahmens nicht beschränkt, wobei

[1]Einige Angaben über die Definitionen der Inzidenz-, Anordnungs- und Kongruenzbegriffe aus dem Begriff des rechten Winkels$_{d,d}$ sowie über einen Teil des Axiomensystems $_{d_2}$**folgen in einem**$_{d_2 a_2}$**finden sich im**$_{a_2}$ Anhang.

ja übrigens noch verschiedene Abstufungen in Betracht kommen.

In ${}_a\underline{\mathrm{B}}_a$ezug auf die Anwendung einer Logik der zweiten Stufe sei hier nur daran erinnert, daß eine solche sich ja im Rahmen der axiomatischen Mengenlehre in solcher Weise präzisieren läßt, daß keine fühlbare Einschränkung der Beweismethoden erfolgt. Auch das Skolem${}_{d_2}$'${}_{d_2}$sche Paradoxon bereitet im Falle der Geometrie insofern keine eigentliche Verlegenheit, als man es dadurch ausschalten kann, daß man in den modelltheoretischen Betrachtungen den Mengenbegriff, der in einem der höheren Axiome auftritt, mit dem Mengenbegriff der Modelltheorie gleichsetzt.

Zum Schluß möchte ich hervorheben, daß der in meinen Ausführungen betonte Umstand, daß es in der Gestaltung der Axiomatik kein eindeutiges Optimum gibt, keineswegs bedeutet, daß die Erzeugnisse der geometrischen Axiomatik notwendig den Charakter des Unvollkommenen und Fragmentarischen tragen. Sie wissen, daß auf diesem Gebiete etliche Gestaltungen von großer Vollkommenheit und Abrundung erreicht worden sind. Gerade die Vielheit der möglichen Zielrichtungen bewirkt, daß durch das Neuere das Frühere im allgemeinen nicht schlechtweg überholt wird, während andererseits auch jede erreichte Vollkommenheit immer noch Platz läßt für weitere Aufgaben.

Anhang. *Bemerkungen zu der Aufgabe einer Axiomatisierung der euklidischen Planimetrie mit der einzigen Grundbeziehung $R(a, b, c)$: „das Punktetripel a, b, c bildet bei b einen rechten Winkel${}_{d_1}$"${}_{d_1}$".* Die Axiomatisierung gelingt insoweit auf einfache Art, als nur die Beziehungen der Kollinearität
9 und des Parallelismus betrachtet werden. Für die Theorie der Kolli|nearität genügen die folgenden Axiome:

A1 $\neg R(a, b, a)$

A2 $R(a, b, c) \ \rightarrow \ R(c, b, a) \ \& \ \neg R(a, c, b)$ [2]

A3 $R(a, b, c) \ \& \ R(a, b, d) \ \& \ R(e, b, c) \ \rightarrow \ R(e, b, d)$

A4 $R(a, b, c) \ \& \ R(a, b, d) \ \& \ c \neq d \ \& \ R(e, c, b) \ \rightarrow \ R(e, c, d)$

[2]Durch dieses Axiom wird bereits die elliptische Geometrie ausgeschlossen.

A5 $a \neq b \;\rightarrow\; (Ex)R(a,b,x)$.[5*]

Dazu tritt die Definition der Beziehung $\mathrm{Koll}(a,b,c)$: „die Punkte a, b, c sind kollinear":

Definition 1. $\mathrm{Koll}(a,b,c) \;\leftrightarrow\; (x)(R(x,a,b) \rightarrow R(x,a,c)) \vee a = c.$

Es sind dann die folgenden Sätze beweisbar:

(1) $\mathrm{Koll}(a,b,c) \;\leftrightarrow\; a = b \vee a = c \vee b = c \vee (Ex)(R(x,a,b) \;\&\; R(x,a,c))$

(2) $\mathrm{Koll}(a,b,c) \;\rightarrow\; \mathrm{Koll}(a,c,b) \;\&\; \mathrm{Koll}(b,a,c)$

(3) $\mathrm{Koll}(a,b,c) \;\&\; \mathrm{Koll}(a,b,d) \;\&\; a \neq b \;\rightarrow\; \mathrm{Koll}(b,c,d)$

(4) $R(a,b,c) \;\&\; \mathrm{Koll}(b,c,d) \;\&\; b \neq d \;\rightarrow\; R(a,b,d)$

(5) $R(a,b,c) \;\rightarrow\; \neg\mathrm{Koll}(a,b,c)$

(6) $R(a,b,c) \;\&\; R(a,b,d) \;\rightarrow\; \mathrm{Koll}(b,c,d)$

(7) $R(a,b,c) \;\&\; R(a,b,d) \;\rightarrow\; \neg R(a,c,d)$.
Zum Beweis: $\mathrm{Koll}(c,d,b) \;\&\; c \neq b \;\rightarrow\; (R(a,c,d) \rightarrow R(a,c,b))$

(8) $R(a,b,c) \;\&\; R(a,b,d) \;\&\; R(a,e,c) \;\&\; R(a,e,d) \;\rightarrow\; c = d \vee b = e$.
Zum Beweis: $\mathrm{Koll}(b,c,d) \;\&\; \mathrm{Koll}(e,c,d) \;\&\; c \neq d \;\rightarrow\; \mathrm{Koll}(b,c,e)$
$\mathrm{Koll}(b,c,e) \;\&\; b \neq e \;\&\; R(a,b,c) \;\rightarrow\; R(a,b,e)$
$\mathrm{Koll}(e,c,b) \;\&\; b \neq e \;\&\; R(a,e,c) \;\rightarrow\; R(a,e,b)$
$R(a,b,e) \rightarrow \neg R(a,e,b)$.

Für die Theorie des Parallelismus nehmen wir zwei weitere Axiome hinzu:

A6 $a \neq b \;\&\; a \neq c \;\rightarrow\; (Ex)(R(x,a,b) \;\&\; R(x,a,c)) \vee$
$(Ex)(R(a,x,b) \;\&\; R(a,x,c)) \vee R(a,b,c) \vee R(a,c,b)$

| Das Axiom besagt in üblicher Ausdrucksweise, daß man von einem Punkte 10
a außerhalb einer Geraden bc auf diese eine Senkrechte fällen kann. Die eindeutige Bestimmtheit der Senkrechten in Abhängigkeit von dem Punkt a und der Geraden bc ergibt sich mit Hilfe von (4) und (8).

[5*] Paul de Witte hat darauf aufmerksam gemacht, daß A3 als Axiom entbehrlich ist, da die Formel aus A2, A4, A5 abgeleitet werden kann. (*vide* [**?**])

A7 $R(a,b,c)\ \&\ R(b,c,d)\ \&\ R(c,d,a)\ \rightarrow\ R(d,a,b)$

Dieses ist eine Form des euklidischen Parallelenaxioms im engeren, winkelmetrischen Sinn.

A151 | Die Parallelität wird nun definiert durch:

Definition 2. ${}_{a}\mathbf{;}_{a}\mathrm{Par}(a,b;c,d)\ \leftrightarrow\ a \neq b\ \&\ c \neq d\ \&\ (Ex)(Ey)(R(a,x,y)\ \&\ R(b,x,y)\ \&\ R(c,y,x)\ \&\ R(d,y,x))$

Als beweisbare Sätze ergeben sich:

(9) $\mathrm{Par}(a,b;c,d)\ \rightarrow\ \mathrm{Par}(b,a;c,d)\ \&\ (c,d;a,b)$

(10) $\mathrm{Par}(a,b;c,d)\ \rightarrow\ a \neq c\ \&\ a \neq d\ \&\ b \neq c\ \&\ b \neq d$

(11) $\mathrm{Par}(a,b;c,d)\ \leftrightarrow\ a \neq b\ \&\ c \neq d\ \&\ (Ex)(Eu)((R(a,x,u) \vee x = a)\ \&\ (R(b,x,u) \vee x = b)\ \&\ (R(x,u,c) \vee u = c)\ \&\ (R(x,u,d) \vee u = d))$

Für den Beweis der Implikation von rechts nach links hat man zu zeigen, daß auf einer Geraden ${}_{d_2}\underline{a,b},{}_{d_2 a_2}\underline{ab}_{a_2}$ mindestens fünf verschiedene Punkte liegen, was mit Hilfe der Axiome A1–A6 gelingt.

(12) $\mathrm{Par}(a,b;c,d)\ \rightarrow\ (x)((R(a,x,c) \vee x = a)\ \&\ (R(b,x,c) \vee x = b) \rightarrow R(x,c,d))$

(13) $\mathrm{Par}(a,b;c,d)\ \&\ \mathrm{Koll}(a,b,e)\ \&\ b \neq e\ \rightarrow\ \mathrm{Par}(b,e;c,d)$

und daraus insbesondere

(14) $\mathrm{Par}(a,b;c,d)\ \rightarrow\ \neg\mathrm{Koll}(a,b,c)$;

ferner

(15) $\mathrm{Par}(a,b;c,d)\ \&\ \mathrm{Koll}(a,b,e)\ \rightarrow\ \neg\mathrm{Koll}(c,d,e)$

(16) $\neg\mathrm{Koll}(a,b,c)\ \rightarrow\ (Ex)\mathrm{Par}(a,b;c,x)$

(17) $\mathrm{Par}(a,b;c,d)\ \&\ \mathrm{Par}(a,b;c,e)\ \rightarrow\ \mathrm{Koll}(c,d,e)$

(18) $\mathrm{Par}(a,b;c,d)\ \&\ \mathrm{Par}(a,b;e,f)\ \rightarrow\ \mathrm{Par}(c,d;e,f) \vee (\mathrm{Koll}(e,c,d)\ \&\ \mathrm{Koll}(f,c,d))$.

11 An den Begriff des Parallelismus knüpft sich noch der der Vektor|gleichheit: „$_{d_2}\underline{a, b}_{d_2 a_2}\underline{ab}_{a_2}$ und $_{d_2}\underline{c, d}_{d_2 a_2}\underline{cd}_{a_2}$ sind die Gegenseiten eines Parallelogramms“:

D$_{a_2}\underline{\mathbf{e}}_{a_2}$finition 3. $\mathrm{Pag}(a, b; c, d) \;\leftrightarrow\; \mathrm{Par}(a, b; c, d) \;\&\; \mathrm{Par}(a, c; b, d)$

Man kann hiermit beweisen:

(19) $\mathrm{Pag}(a, b; c, d) \;\rightarrow\; \mathrm{Pag}(c, d; a, b) \;\&\; \mathrm{Pag}(a, c; b, d)$

(20) $\mathrm{Pag}(a, b; c, d) \;\&\; \mathrm{Pag}(a, b; c, e) \;\rightarrow\; d = e$

(21) $\mathrm{Pag}(a, b; c, d) \;\rightarrow\; \neg\mathrm{Koll}(a, b, c)$.

Für den Beweis des Existenzsatzes

(22) $\neg\mathrm{Koll}(a, b, c) \;\rightarrow\; (Ex)\mathrm{Pag}(a, b; c, x)$

bedarf es noch eines weiteren Axioms:

A8 $R(a, b, c) \;\rightarrow\; (Ex)(R(a, c, x) \;\&\; R(c, b, x))$.

Mit Hilfe dieses Axioms ist generell beweisbar, daß zwei verschiedene, nicht parallele Geraden einen Schnittpunkt besitzen:

(23) $\neg\mathrm{Koll}(a, b, c) \;\&\; \neg\mathrm{Par}(a, b; c, d) \;\rightarrow$
$(Ex)(\mathrm{Koll}(a, b, x) \;\&\; \mathrm{Koll}(c, d, x))$. – [6*]

Ob sich im Ganzen eine übersichtliche Axiomatik mit dem Grund|begriff A152
R erreichen läßt, bleibe dahingestellt. Wir begnügen uns hier damit, Definitionen für die wesentlichen weiteren Begriffe aufzustellen. Für diese läßt sich immerhin eine gewisse Übersichtlichkeit erreichen.

An die Figur des Parallelogramms knüpfen sich die folgenden zwei verschiedenen Definitionen der Beziehung „a ist Mittelpunkt der Strecke $_{d_2}\underline{b, c}_{d_2 a_2}\underline{bc}_{a_2}$“:

Definition 4_1. $Mp_1(a; b, c) \;\leftrightarrow\; (Ex)(Ey)(\mathrm{Pag}(b, x; y, c) \;\&$
$\mathrm{Koll}(a, b, c) \;\&\; \mathrm{Koll}(a, x, y))$

Definition 4_2. $Mp_2(a; b, c) \;\leftrightarrow\; (Ex)(Ey)(\mathrm{Pag}(x, y; a, b) \;\&\; \mathrm{Pag}(x, y; c, a))$.

Im Sinne der zweiten Definition kann man die Möglichkeit der Verdoppelung einer Strecke beweisen:

[6*] Das Vorderglied $\neg\mathrm{Koll}(a, b, c)$ ist, wie man leicht einsieht, entbehrlich.

(24) $a \neq b \;\rightarrow\; (Eu)Mp_2(a; b, u)$.

Die Existenz des Mittelpunktes einer Strecke im Sinne der Df. 4_1, d. h.

(25) $b \neq c \;\rightarrow\; (Eu)Mp_1(u; b, c)$,

12 läßt sich beweisen, wenn man noch das Axiom hinzunimmt: |

A9 $\mathrm{Par}(a, b; c, d) \;\&\; \mathrm{Par}(a, c; b, d) \;\rightarrow\; \neg\mathrm{Par}(a, d; b, c)$.
(Im Parallelogramm schneiden sich die Diagonalen$_{a_2 \text{-} a_2}$)

Durch Spezialisierung der zur Definition von Mp_1 gehörigen Figur erhalten wir eine Definition der Beziehung „a, b, c bilden ein gleichschenkliges Dreieck mit der Spitze in a“:

Definition 5₁. $Ist_1(a; b, c) \;\leftrightarrow\; (Eu)(Ev)(\mathrm{Pag}(a, b; c, v) \;\&\; R(a, u, b) \;\&\; R(a, u, c) \;\&\; R(b, u, v))$.

Mit Hilfe von Mp_1 und Ist_1 können wir den Pieri$_{d_2 \text{'} d_2}$schen Grundbegriff: „a hat von b und c gleichen Abstand“ definieren:

Definition 6. $Is_1(a; b, c) \;\leftrightarrow\; b = c \vee Mp_1(a; b, c) \vee Ist_1(a; b, c)$.

Eine andere Art der Definition des Begriffes Is beruht auf der Verwendung der Symmetrie. Hierzu dient folgender Hilfsbegriff: „a, b, c, d, e bilden ein ‚normales‘ Quintupel“:

Definition 7. $Qn(a, b, c, d, e) \;\leftrightarrow\; R(a, c, b) \;\&\; R(a, d, b) \;\&\; R(a, e, c) \;\&\; R(a, e, d) \;\&\; R(b, e, c) \;\&\; c \neq d$. $d_2 \text{-} d_2 \, a_2 \text{-} a_2$

Mit Hilfe von Qn erhalten wir eine weitere Art der Definition für Mp und Ist:

Definition 4₃. $Mp_3(a; b, c) \;\leftrightarrow\; (Ex)(Ey)Qn(x, y, b, c, a)$

Definition 5₂. $Ist_2(a; b, c) \;\leftrightarrow\; (Ex)(Ey)Qn(a, x, b, c, y)$,

aus denen sich Is_2 entsprechend wie Is_1 definieren läßt.

Ferner schließt sich hieran noch die Definition der Spiegelbildlichkeit von Punkten a, b in $_a\underline{\mathrm{B}}_a$ezug auf eine Gerade cd:

Definition 8. $\mathrm{Sym}(a, b; c, d) \;\leftrightarrow\; c \neq d \;\&\; (Ex)(Ey)(Ez)(\mathrm{Koll}(x, c, d) \;\&\; \mathrm{Koll}(y, c, d) \;\&\; Qn(x, y, a, b, z))$.–

A153 | Für die Definition der Streckenkongruenz brauchen wir schließlich noch den Begriff der gleichsinnigen Kongruenz auf einer Geraden: „die Strecken ab und cd sind kollinear, kongruent und gleichgerichtet“:

Definition 9₁. $Lg_1(a, b; c, d) \leftrightarrow \text{Koll}(a, b, c)\ \&$
$$(Ex)(Ey)(\text{Pag}(a, x; b, y)\ \&\ \text{Pag}(c, x; d, y)),$$

oder auch:

Definition 9₂. $Lg_2(a, b; c, d) \leftrightarrow$
$$\text{Koll}(a, b, c)\ \&\ a \neq b\ \&\ (Ex)(Mp(x; b, c)\ \&\ Mp(x; a, d))\ \vee$$
$$(a = d\ \&\ Mp(a; b, c)) \vee (b = c\ \&\ Mp(b; a, d)),$$

| (wobei für Mp eine der drei obigen Definitionen genommen werden kann). 13
Nunmehr kann im Ganzen (mit jeder der beiden Definitionen von Lg) die Streckenkongruenz definiert werden:

Definition 10. $Kg(a, b; c, d) \leftrightarrow Lg(a, b; c, d) \vee Lg(a, b; d, c)\ \vee$
$$(a = b\ \&\ Is_1(a; b, d)) \vee (Ex)(\text{Pag}(a, b; c, x)\ \&\ Is_1(c; x, d)).$$

Durch eine Definition analog derjenigen von Lg_2 kann man auch die Kongruenz von Winkeln mit gleichem Scheitelpunkt als sechsstellige Beziehung einführen, nachdem man vorher den Begriff der Winkelhalbierenden eingeführt hat: „d ($\neq a$) liegt auf der Halbierenden des Winkels $b\,a\,c$“:

Definition 11. $\text{Wh}(a, d; b, c) \leftrightarrow \neg\text{Koll}(a, d, c)\ \&$
$$(Ex)(Ey)(Ez)(\text{Koll}(a, c, x)\ \&\ \text{Koll}(a, d, y)\ \&\ Qn(a, y, b, x, z)).$$

In Anbetracht des sehr zusammengesetzten Charakters dieser Kongruenzbeziehung Kg wird man in der Axiomatisierung die Gesetze über Kg auf solche der als Bestandteile des definierenden Ausdrucks auftretenden Begriffe zurückführen. Dabei bestehen auf Grund der Mehrheit der Definitionen von *Mp*, *Ist*, *Is* Alternativen in Hinsicht darauf, ob man in stärkerem Maße die Beziehungen des Parallelismus oder die der Symmetrie heranzieht. Auf jeden Fall dürfte das Axiom der Vektorgeometrie

A10. $\text{Pag}(a, b; p, q)\ \&\ \text{Pag}(b, c; q, r) \rightarrow$
$$\text{Pag}(a, c; p, r) \vee (\text{Koll}(a, c, p)\ \&\ \text{Koll}(a, c, r))$$

oder ein gleichwertiges zweckmäßig sein. Im Ganzen könnte man sich hierbei als Ziel setzen, das in der euklidischen Planimetrie vorliegende Zusammenspiel von Parallelismus und Spiegelung auf eine möglichst symmetrische Art zur Darstellung zu bringen.

Was endlich die Zwischenbeziehung betrifft, so ist die Figur für die Definition der Beziehung „a liegt zwischen b und c“ schon als Bestandteil in derjenigen von Qn enthalten. Nämlich wir können definieren:

Definition 12. $\mathrm{Zw}(a;b,c) \ \leftrightarrow \ (Ex)(R(b,a,x) \ \& \ R(c,a,x) \ \& \ R(b,x,c))$.

Für diesen Begriff sind zunächst beweisbar:

A154 (26) $\neg\mathrm{Zw}(a;b,b)$ |

13 (27) $\mathrm{Zw}(a;b,c) \ \rightarrow \ \mathrm{Zw}(a;c,b)$ |

(28) $\mathrm{Zw}(a;b,c) \ \rightarrow \ \mathrm{Koll}(a,b,c)$

und ferner mit Benutzung von A5, A6 und A8

(29) $a \neq b \ \rightarrow \ (Ex)\mathrm{Zw}(x;a,b) \ \& \ (Ex)\mathrm{Zw}(b;a,x)$.

Für die Gewinnung der weiteren Eigenschaften des Zwischenbegriffes können die folgenden Axiome dienen:

A11 $R(a,b,c) \ \& \ R(a,b,d) \ \& \ R(c,a,d) \ \& \ R(e,c,b) \ \rightarrow \ \neg R(b,e,d)$

A12 $R(a,b,d) \ \& \ R(d,b,c) \ \& \ a \neq c \ \rightarrow \ \mathrm{Zw}(a;b,c) \vee \mathrm{Zw}(b;a,c) \vee \mathrm{Zw}(c;a,b)$

A13 $\mathrm{Zw}(a;b,c) \ \& \ \mathrm{Zw}(b;a,d) \ \rightarrow \ \mathrm{Zw}(a;c,d)$

A14 $R(a,b,d) \ \& \ R(d,b,c) \ \& \ R(a,c,e) \ \& \ \mathrm{Zw}(d;a,e) \ \rightarrow \ \mathrm{Zw}(b;a,c)$

Aus diesem Axiom kann man in einigen Schritten den allgemeineren Satz gewinnen:

(30) $\mathrm{Zw}(b;a,c) \ \& \ \mathrm{Koll}(a,d,e) \ \& \ \mathrm{Par}(b,d;c,e) \ \rightarrow \ \mathrm{Zw}(d;a,e)$

Dieses gelingt mit Verwendung des Satzes

(31) $R(a,b,e) \ \& \ R(e,b,c) \ \& \ R(b,a,d) \ \&$
$R(b,c,f) \ \& \ R(b,e,d) \ \& \ R(b,e,f) \ \& \ \mathrm{Zw}(b;a,c) \ \rightarrow \ \mathrm{Zw}(e;d,f)$.

welcher sich aus dem vorhin erwähnten Axiom A10 ableiten läßt.

Mit Hilfe von (30) und dem Axiom A13 läßt sich beweisen:

(32) $\neg\mathrm{Koll}(a,b,c) \ \& \ \mathrm{Zw}(b;a,d) \ \& \ \mathrm{Zw}(e;b,c) \ \rightarrow$
$(Ex)(\mathrm{Koll}(e,d,x) \ \& \ \mathrm{Zw}(x;a,c))$.

d. h. das Axiom von Pasch in der engeren Veblen$_{d_2}$'$_{-d_2}$schen Fassung. –

Anschließend sei noch die folgende Definition von Kg mittels der Begriffe *Is* und *Zw* erwähnt, welche auf einer Konstruktion von Euklid beruht:

Definition 13. $Kg^*(a, b; c, d) \;\leftrightarrow\; (Ex)(Ey)(Ez)(Is(x, a; c)\ \&$
$\mathrm{Zw}(y; a, x)\ \&\ \mathrm{Zw}(z; c, x)\ \&\ Is(a; b, y)\ \&\ Is(c; d, z)\ \&\ Is(x; y, z)).$

(Für *Is* kann hier nach Belieben Is_1 oder Is_2 genommen werden.)

Von einer Axiomatik wie der hier geschilderten, bei der die Kollinearität und die Zwischenbeziehung mit der Orthogonalität verkoppelt wird, kann man freilich nicht verlangen, daß sie eine Absonderung der Axiome | des Li- 15
nearen liefert. Ferner ist die Anlage hier von vornherein im Hinblick auf die Planimetrie beschränkt, da die Definition der Kollinearität im Mehrdimensionalen nicht mehr anwendbar ist. Auch die Beschränkung auf die euklidische Geometrie wird schon an früher Stelle eingeführt. Andererseits kann diese Axiomatisierung sich besonders dafür eignen, die große Einfachheit und Eleganz der Gesetzlichkeit der euklidischen Planimetrie hervortreten zu lassen.

Kapitel 24

Bernays Project: Text No. 25

Zur Rolle der Sprache in erkenntnistheoretischer Hinsicht[†] (1961)

On the role of language from an epistemological point of view

(*Synthese* 13, S. 185–200;
repr. in *Abhandlungen*, S. 155–169)

185/A155 | In der Philosophie von Rudolf Carnap nimmt sein Werk *Logische Syntax der Sprache*[a] eine markante Stellung ein. Die hier entwickelte Konzeption der Wissenschaftslogik als Studium der Wissenschaftssprache$_{d_2 \cdot d_2}$ mit den sich an sie knüpfenden Begriffen$_{d_2 \cdot d_2}$ bildet sozusagen den Ausgangsrahmen für Carnaps weitere Untersuchungen. Im Laufe dieser Untersuchungen hat er die Auffassungen, die er in der *Logischen Syntax* vertritt, erheblich revidiert, und auch jener Rahmen der Betrachtung selbst mit den zugehörigen Begriffsbildungen hat starke Wandlungen erfahren, wozu die Diskussionen mit den Philosophen verwandter Forschungsrichtung Wesentliches beigetragen haben.

[†]Contribution in honor of Professor Rudolph Carnap's seventieth birthday, received after Vol. XII no. 4 had been published ([Synthese] *editor's note*).

---

[a] *Vide* [**?**].

Diese Schritte der Revision der Philosophie Carnaps bedeuten eine sukzessive Loslösung von den exklusiven und reduktiven Tendenzen des anfänglichen Programms der Wiener Schule, gegenüber dessen allzu simplifizierenden Thesen ja bereits die *Logische Syntax* bedeutsame Korrekturen brachte. Hier aber verfocht Carnap ja noch die Ansicht, daß alle Erkenntnistheorie, sofern sie Anspruch auf Wissenschaftlichkeit erheben kann, nichts anderes als Syntax der Wissenschaftssprache$_{d_2 _, d_2}$ bzw. als solche aufzufassen sei, während er seitdem die Aufgabestellung für die wissenschaftliche Philosophie durch die Hinzunahme der Semantik und der Pragmatik (unter Anknüpfung an C. W. Morris) wesentlich erweiterte und ferner der Unterscheidung des Logischen vom Deskriptiven den anderen Gesichtspunkt der Unterscheidung von theoretischer Sprache und Beobachtungssprache gegenüberstellte. Die Bedeutung, welche die Einführung dieser Erweiterungen des methodischen Rahmens für die Ausgestaltung der Philosophie Carnaps und auch für deren Annäherung an die gewohnteren philosophischen Auffassungen besitzt, soll im folgenden unter einigen Gesichtspunkten beleuchtet werden; zugleich soll dabei auf gewisse sich natürlich anschließende Fragen hingewiesen werden. | 186/A156

1

Die Anlage der *Logischen Syntax* kann als eine Erweiterung des Ansatzes der Hilbertschen Beweistheorie angesprochen werden. Bei Hilbert erstreckt sich die Methode der Formalisierung nur auf die Mathematik. Allerdings hatte Hilbert in seinem Vortrage „Axiomatisches Denken" auch gesagt: „Alles, was Gegenstand des wissenschaftlichen Denkens überhaupt sein kann, verfällt, sobald es zur Bildung einer Theorie reif ist, der axiomatischen Methode und damit mittelbar der Mathematik."[b] Carnap geht in der *Logischen Syntax* einen Schritt weiter in dieser Richtung, indem er die Wissenschaft im Ganzen als $_{d_2}$**ein**$_{d_2}$ axiomatisch-deduktives System betrachtet, welches mittels der Formalisierung zu einem mathematischen Objekt wird: die Syntax der Wissenschaftssprache ist die auf dieses Objekt gerichtete Metamathematik.

Das hierbei benutzte idealisierende Schema der Wissenschaft ist aber gewiß für die Erkenntnistheorie nicht zulänglich. Zunächst einmal stellt es ja

[b] *Vide* [**?**], p. ■ .

nur das fertige Resultat der Wissenschaft dar, nicht den vollen Prozeß des wissenschaftlichen Geschehens. Wohl vermag bei den großen mathematischen Theorien eine axiomatisch-deduktive Präsentation der fertigen Disziplinen das Bedeutsame an ihnen hinlänglich zur Darstellung zu bringen. Doch bereits in der theoretischen Physik ist die Sachlage wesentlich anders, da hier die obersten Grundsätze der Theorie in ihrer mathematisch genauen Fassung für die Forschung meistens das Endergebnis und nicht den Ausgangspunkt bilden.

Außerdem aber ist ja für viele Gebiete der Forschung die Hervorkehrung des Deduktiven gewaltsam. Man verfährt in diesen Gebieten gar nicht deduktiv; vielmehr kommt hier das logische Schließen fast nur für die *heuristischen* Überlegungen zur Anwendung, durch welche die Aufstellung von Hypothesen oder von Tatsachen-Behauptungen motiviert wird.

Mit der Hinzunahme der *Pragmatik* kann nun alledem Rechnung getragen werden. In die Pragmatik gehört sicherlich die Erörterung der Entwicklung der Wissenschaften, freilich nicht im Hinblick auf das Historisch-Biographische, sondern im Sinne der Herausarbeitung des methodisch Bedeutsamen der Gedankengänge. Hier finden daher die heuristischen Betrachtungen ihre natürliche Einordnung.

187 Beiläufig sei hier daran erinnert, daß die Heuristik nicht nur in den | empirischen Wissenschaften, sondern auch in der rein mathematischen Forschung eine Rolle spielt, worauf in neuerer Zeit besonders nachdrücklich Georg Pólya
A157 hingewiesen hat. Es besteht ja eine methodische | Analogie zwischen der mathematischen und naturwissenschaftlichen Forschung in der Hinsicht, daß es auch für die Mathematik eine Art von Empirie und ein Erraten von Gesetzlichkeiten auf${}_a$ $\underline{\text{G}}{}_a$rund einer Reihe von Einzelfeststellungen gibt. Allerdings hat eine solche Art der Aufstellung eines Gesetzes in der Mathematik nur einen provisorischen Charakter, zumal in der Zahlentheorie, wo sich ja der Einzelfall niemals bloß durch unwesentliche Bedingungen (wie solche von Ort und Zeit in der Physik) aussondern läßt, vielmehr jede Zahl ihre besonderen Eigenschaften hat. Daß wir aber selbst in der Zahlentheorie aus unserem Umgehen mit den Zahlen Überzeugungen gewinnen können, zeigt das Beispiel des Satzes von der Eindeutigkeit der Zerlegung der Zahlen in Primfaktoren, den man von dem Zahlenrechnen her (wenn man noch keine zahlentheoretischen Beweise kennengelernt hat) geneigt ist, für ganz selbstverständlich zu halten. Erst auf einer fortgeschrittenen Stufe macht man sich das Erfordernis eines Beweises für diesen Satz klar, dem ja dann in befriedigender Weise entsprochen wird.

2

Für die Betrachtung des Verhältnisses von Syntax und Semantik ist es nützlich, wenn wir uns vergegenwärtigen, daß nach der gewohnten Auffassung für eine Sprache als solche wesentlich ist, daß ihre Worte und Sätze eine unmittelbare Sinn-Bezogenheit haben. Wenn wir die Formbildungen einer Sprache losgelöst von der Bedeutung der Ausdrücke zum Gegenstand machen, so ist dieses eine bewußtermaßen vorgenommene, modifizierende Abstraktion.

In Carnaps *Logischer Syntax* wird die Ausschaltung des Sinnesmäßigen zu einem Teil dadurch ausgeglichen, daß er neben den „Formbestimmungen" die „Umformungsbestimmungen" als Regeln der Sprache statuiert. Zu diesen Umformungsbestimmungen für die Sprache einer formalisierten Theorie rechnet er nicht nur solche Regeln, nach denen ein Satz in einen ihm logisch gleichwertigen übergeführt werden kann, sondern allgemeiner alle solchen, nach denen sich logische Abhängigkeiten bestimmen, und ferner auch die Festsetzungen, wonach bestimmte Sätze | die Rolle logisch allgemeingültiger 188
Aussagen oder auch *formalisierter Axiome* haben.

Bald hernach hat Carnap, unter dem Einfluß der Untersuchungen von Alfred Tarski und im Zusammenhang mit der Erweiterung seines methodischen Programmes, den Begriff der logischen Folge aus der Syntax in die Semantik verwiesen. | A158

In der Semantik werden den logischen Symbolen mittels der „rules of truth" ihre Bedeutungen zugeordnet, und an diese Wahrheitsregeln knüpft sich der semantische Folgerungsbegriff. Von da aus kann das formale Deduzieren so eingeführt werden, daß zunächst Folgerungsbeziehungen teils als Sätze, teils als Ableitungsregeln vermerkt werden und dann die Mannigfaltigkeit solcher sich ergebender Sätze und Regeln einer Axiomatisierung unterworfen wird. Auf diese Weise wird der Begriff der Umformungsbestimmungen als ursprünglicher Regeln der Sprache grundsätzlich entbehrlich, während die „rules of truth" als zur Charakterisierung der Sprache gehörig anzusehen sind.

Die hiermit ermöglichte prägnante Gegenüberstellung des semantischen und des syntaktischen Folgerungsbegriffes hat für die Darstellung der mathematischen Logik – sofern diese nicht von vornherein auf eine konstruktive Methodik ausgerichtet ist – große Vorteile, und besonders Heinrich Scholz hat diesen Gesichtspunkt sehr zur Geltung gebracht.

An der Semantik wird oft als Mangel empfunden, daß sie auf einer nichtkonstruktiven Art der Begriffsbildung beruht. Diese Nicht-Konstruktivität ist aber für die Semantik nicht spezifisch. Eine Semantik kann an sich auch in einem elementaren Rahmen der Begriffsbildung betrieben werden. Andererseits wird sich die Überschreitung der elementaren Begrifflichkeit, ob mit oder ohne Semantik, kaum vermeiden lassen, wenn man, wie Carnap es anstrebt, für die Logik einen solchen Begriff der „Gültigkeit“ festlegen will, auf$_{a}$ G$_{a}$rund dessen für jeden rein logischen Satz A (d. h. einen Satz ohne außerlogische Bestandteile) nicht nur die Alternative „A oder nicht-A“ logisch gültig ist (im Sinne des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten), sondern darüber hinaus entweder die logische Gültigkeit von A oder diejenige von nicht-A besteht.

Die Semantik wird auch noch in anderer Hinsicht kritisiert, nämlich insofern sie den Bereich der umfangslogischen Betrachtung überschreitet und sich mit den Fragen des Sinnes und insbesondere mit dem Verhältnis des Extensio-
189 nalen zum Intensionalen befaßt. So macht besonders | Willard Quine geltend, daß mit der Einführung der Sinngehalte (Intensionen) von Ausdrücken als Gegenständlichkeiten eine wissenschaftlich unzulässige Hypostasierung vollzogen werde$_{a_1}$,$_{a_1}$ und daß selbst bei der Reduktion der Fragen des Sinnes auf solche der Sinngleichheit und Sinnverschiedenheit$_{d_2}$,$_{d_2}$ man sich noch immer in einem Gebiet des schwer Präzisierbaren befinde. Bei dieser Diskussion ist Quine mit Carnap darin einhellig, daß er tendiert, die Sinngleichheit zweier Aussagen als ihre logische Äquivalenz zu erklären und entsprechend auch
A159 die Sinngleichheit von Prädikaten und von Kennzeichnungen auf logische | Äquivalenzen zurückzuführen. Dadurch tritt der Begriff der Sinngleichheit in enge Beziehung zu dem des Analytischen.

Eine solche Begriffsbestimmung von Sinngleichheit führt aber zu Unzuträglichkeiten, insbesondere sofern man, wie es ja Carnap und viele der heutigen Philosophen tun, die Sachverhalte der reinen Mathematik zu den logischen Gesetzen rechnet. Denn nach dieser Auffassung sind ja je zwei gültige Sätze der reinen Mathematik logisch äquivalent, und es müßten daher, wenn Sinngleichheit dasselbe wäre wie logische Äquivalenz, je zwei zutreffende Sätze der reinen Mathematik, also etwa der Satz, daß es unendlich viele Primzahlen gibt, und der Satz, daß die Zahl π irrational ist, denselben Sinn haben – oder um ein elementareres Beispiel zu nehmen: der Satz, daß $3 \times 7 = 21$ ist, müßte denselben Sinn haben wie derjenige, daß 43 eine Primzahl ist.

Wir können uns aber für diese Überlegung sogar von der Stellungnahme zu der Frage des rein logischen Charakters der Arithmetik unabhängig machen. Nehmen wir ein Axiomensystem A und zwei ganz verschiedene Lehrsätze S, T, die aus diesem Axiomensystem beweisbar sind. Wir werden dann schwerlich bereit sein zu sagen, die Feststellung „aus A folgt logisch $_{d_2}\underline{\mathrm{S}}_{d_2}S$“ habe denselben Sinn wie die Feststellung „aus A folgt logisch T“, auch wenn diese beiden Aussagen zutreffend, daher auch beide logisch gültig und somit einander logisch äquivalent sind.

Es fällt also keineswegs immer Sinngleichheit von Aussagen mit deren logischer Äquivalenz zusammen. Andererseits wird man aber doch in vielen Fällen, auch in der Mathematik, eine logische Umformung als nicht Sinnändernd betrachten. Zum Beispiel die beiden Aussagen „wenn a, b, c, n Zahlen der mit 1 beginnenden Zahlenreihe sind und $a^n+b^n = c^n$, so ist $n = 1$ oder $n = 2$“ und „es gibt nicht Zahlen a, b, c, n der mit 1 beginnenden Zahlenreihe, derart daß $n > 2$ und $a^n + b^n = c^n$“ | wird man als Formulierungen derselben 190
mathematischen Behauptung (des großen Fermatschen Satzes) ansprechen.

An diesen Beispielen tritt uns zunächst die Schwierigkeit der Abgrenzung dessen, was jeweils als sinngleich zu gelten hat, entgegen. Zugleich aber bemerken wir, daß diese Schwierigkeit ihre Ursache in der Unterschiedlichkeit der Abstraktionsweise hat, welche den verschiedenen Untersuchungsgebieten eigentümlich ist. Zwei theoretisch-physikalische Feststellungen, von denen eine aus der anderen durch eine Umrechnung eines in ihr auftretenden mathematischen Ausdruckes hervorgeht, werden wir als sinngleich erklären; wenn es sich aber um mathematische Feststellungen handelt$_{a_2\underline{,}a_2}$ ist das im allgemeinen nicht statthaft. Von der Formulierung eines mathematischen Satzes werden wir sagen, daß ihr Sinn durch eine elementar-logische Umformung nicht | verändert wird; wenn dagegen die elementar-logischen Beziehungen A160
selbst behandelt werden, dann gilt dieses nicht mehr. Wir haben hier nur die Sinngleichheit von Aussagen betrachtet; jedoch für Prädikate und Kennzeichnungen läßt sich ganz das Entsprechende feststellen. Dabei liefert die Betrachtung mathematischer Kennzeichnungen ein reiches Maß an Beispielen, bei denen die Gegenüberstellung von Extension und Intension ganz im Sinne unserer üblichen wissenschaftlichen Denkweise liegt. Nehmen wir etwa die Darstellung einer positiv-reellen Zahl durch einen Ausdruck der Analysis, z. B. eine unendliche Reihe oder ein bestimmtes Integral. Eine solche Darstellung bildet eine Kennzeichnung der betreffenden reellen Zahl. Die Extension dieser Kennzeichnung ist die reelle Zahl selbst, und die Intension ist eine Regel zur Bestimmung dieser Zahl, d. h. zu ihrer Eingrenzung in belie-

big enge Intervalle. Ein und dieselbe positiv-reelle Zahl kann, wie man weiß, durch sehr verschiedenartige solche Regeln bestimmt werden; dann haben wir gleiche Extension bei verschiedener Intension.

Um auch bei Prädikaten ein mathematisches Beispiel verschiedener Extensionen mit gleicher Intension zu erwähnen, so können ja die Primzahlen unter den von 1 verschiedenen Zahlen auf zweierlei Art charakterisiert werden: einerseits als solche, die keinen echten Teiler außer 1 besitzen, andererseits als solche, die in einem Produkt nur dann aufgehen, wenn sie in mindestens einem Faktor aufgehen. Das ergibt zwei verschiedene Prädikat-Intensionen mit gleicher Extension: die Extension ist die Klasse der Primzahlen, die Intensionen sind die den beiden Charakterisierungen entsprechen-
191 den Definitionen des Begriffes „Primzahl". | Analoge Beispiele finden sich auch in empirischen Wissenschaften, z. B. wenn eine Tierart auf verschiedene Weise$_{a_1}$**n**$_{a_1}$ charakterisiert werden kann, so daß sich verschiedene Definitionen desselben Artbegriffes ergeben und somit verschiedene Intensionen des Art-Namens bei gleicher Extension.

Unsere Überlegung zeigt uns einerseits, daß es große Klassen von Fällen gibt, in denen der Begriff der Intension eine wissenschaftlich naturgemäße Anwendung hat. Andererseits sind wir auf die Schwierigkeiten im Begriff der Sinngleichheit aufmerksam geworden, die mit der Verschiedenartigkeit der Einstellung in den verschiedenen Forschungsgebieten zusammenhängen, wobei die Gegenüberstellung bloß des Logischen und des Außerlogischen nicht genügt, um diesen Unterschieden Rechnung zu tragen.

Wir können uns den in dieser Hinsicht vorliegenden Sachverhalt näherbringen, indem wir uns die Art der Abstraktion vergegenwärtigen, auf welche
A161 es bei dem Begriff der Intension ankommt. Hier geht man | nicht aus von der Absonderung der Sprachausdrücke als Formgebilde von ihrer Ausdrucksfunktion, vielmehr behält man diese geflissentlich bei, und wovon man abstrahiert, das sind nur die für diese Funktion unwesentlichen Besonderheiten der Ausdrucksmittel und die auf ihnen beruhende Vielfältigkeit von Formulierungen, welche für den gleichen Ausdruckszweck verwendbar sind. Diese Mannigfaltigkeit der Möglichkeiten besteht einerseits in konventioneller Hinsicht, durch die Vielheit der Sprachen, andererseits aber auf$_a$ $\underline{\ \mathrm{G}}_a$rund begrifflicher und sachlicher Gleichwertigkeiten, wie sie zwischen Bestimmungen, zwischen Eigenschaften und zwischen Beziehungen bestehen können. Eine solche Gleichwertigkeit bewirkt aber nur dann die Vertretbarkeit eines Ausdruckes durch einen anderen, wenn sie im Rahmen der Darlegung oder der Untersuchung, in welcher der Ausdruck verwendet wird, ganz unproblematisch ist, d. h. zu

dem Bereiche dessen gehört, worüber man nicht erst diskutiert, sondern was als ausgemacht gilt. In der Tat liegt ja bei unseren Erkenntnisbemühungen, wenigstens im Stadium eines entwickelten Reflektierens, jeweils ein gewisser Vorrat ${}_{a_1}\mathbf{an}_{a_1}$ (teils mehr, teils minder bewußte${}_{d_1}\mathbf{r}_{d_1 a_1}\mathbf{n}_{a_1}$) Vorstellungen, Ansichten und Überzeugungen zu${}_a\underline{\text{ G}}_a$runde, an welche wir uns bei unseren Fragen, Überlegungen und Verfahren halten, sei es mit Wissen oder instinktiv. Solche Vorstellungen, Ansichten und Überzeugungen mögen, im Anschluß an Ferdinand Gonseths Begriff des „préalable“, als „vorgängig“ bezeichnet werden.

| Die Annahme gewisser vorgängiger Vorstellungen und Voraussetzungen 192
für eine jegliche wissenschaftliche Disziplin, und auch für unsere natürliche Einstellung des täglichen Lebens, unterliegt nicht der gleichen Problematik wie die Annahme von Erkenntnissen a priori. Es wird nicht behauptet, daß die vorgängigen Voraussetzungen etwas Unumstößliches seien. Eine Wissenschaft, die sich zunächst auf eine Voraussetzung stützt, kann in ihrem weiteren Verlauf uns dazu führen, diese Voraussetzung preiszugeben, wodurch wir eventuell genötigt werden, die Sprache der Wissenschaft zu ändern. Auch bringt es die wissenschaftliche Methodik mit sich, daß wir vorgängige Voraussetzungen uns zum Bewußtsein bringen und sogar zum Gegenstand einer Untersuchung machen bzw. in das Thema einer Untersuchung einbeziehen können.

Damit verlieren dann diese Voraussetzungen für das betreffende Forschungsgebiet den Charakter der Vorgängigkeit. Im Verlauf der Entwicklung der theoretischen Wissenschaften kommt es so dazu, daß immer weitere ihrer Voraussetzungen der Thematisierung unterworfen werden, so daß sich der Bereich des Vorgängigen immer mehr verengert.

| An die Stelle des früheren, spontanen Vorgängigen treten dann eigens A162
statuierte Ausgangs-Begriffe und Prinzipien.

Im Unterschied zum Begriff des a priori ist der des Vorgängigen entweder auf einen Erkenntniszustand oder auf eine Disziplin bezogen; es wird nicht etwas absolut Vorgängiges angenommen.

Wenn man nun diesen Begriff des Vorgängigen akzeptiert, so kann man folgende Definition der Sinngleichheit ansetzen: zwei Aussagen einer Disziplin sind sinngleich, wenn die Äquivalenz zwischen ihnen für die Disziplin vorgängig ist. Entsprechend würde die Sinngleichheit von Prädikaten und die von Kennzeichnungen zu erklären sein. Auch kann in der Definition die Disziplin durch eine Erkenntnislage (Erkenntniszustand) ersetzt werden, in ${}_a\underline{\text{B}}_a$ezug auf welche man in genügend bestimmter Weise von Vorgängigem sprechen kann.

Es möchte scheinen, daß sich auf diese Art die vermerkten Schwierigkeiten in der Bestimmung von Sinngleichheit beheben lassen. Freilich muß man bei der gegebenen Erklärung der Sinngleichheit in Kauf nehmen, daß die Sinngleichheit von Sätzen von der Disziplin bzw. der Erkenntnislage abhängt, im Rahmen deren sie betrachtet wird. Das ist aber bei näherem Zusehen
193 nicht so paradox. |

3

Wenden wir uns nun zu derjenigen Erweiterung des methodischen Rahmens der *Logischen Syntax*, welche Carnap durch die Gegenüberstellung von theoretischer Sprache und Beobachtungssprache gewinnt.

Theorie und Experiment einander gegenüberzustellen, ist uns bei der Betrachtung der Methode der Naturwissenschaften geläufig. Doch in der anfänglichen Form des logischen Empirismus kam das Moment des Theoretischen nicht recht zur Geltung; und es haben erst Diskussionen über die anfängliche Auffassung, an denen insbesondere Karl Popper beteiligt war, dazu geführt, daß bei dem revidierten Standpunkt der *Logischen Syntax* der Ansicht der Vorzug gegeben wurde, wonach die Formulierungen von Naturgesetzen als eigentliche Sätze der Wissenschaftssprache figurieren.

Daß sich hiergegen anfangs eine Resistenz richtete, begreifen wir, wenn wir uns klarmachen, daß mit der Anerkennung der Rolle der physikalischen Gesetzesaussagen als eigentlicher Sätze jene Zweiheit von „relations of ideas“ und „matters of facts“, wie sie ehemals David Hume als Einteilung aller Gegenstände des Forschens angesetzt hatte und wie sie die Wiener Schule
A163 in etwas präzisierter Form aufrechtzu|erhalten bestrebt war, sich als nicht erschöpfend erweist. Die Gesetzesaussagen der Naturwissenschaft sind ja einerseits nicht Aussagen über „relations of ideas“, d. h. nicht Sätze der reinen Logik oder der reinen Mathematik, andererseits sind sie nicht Feststellungen von Tatsachen, da sie doch die Form allgemeiner hypothetischer Sätze haben.

In der Ausdrucksweise Carnaps besagt diese Konsequenz, daß der Bereich des Deskriptiven (des Außerlogischen) nicht mit dem des Faktischen zusammenfällt, daß vielmehr der Bereich des Faktischen enger ist.

Der gleiche Sachverhalt läßt sich noch von einer anderen Seite her beleuchten. Carnap erklärt in seinem Buche *Meaning and Necessity*[c] den Begriff des logisch Wahren mit Hilfe von „state descriptions". Dabei knüpft er an den Leibnizschen Gedanken der „möglichen Welten" an: was notwendig ist, muß in allen möglichen Welten gelten; und die „state descriptions" stellen schematisch die möglichen Weltbeschaffenheiten dar. So definiert nun Carnap: Ein
Satz ist logisch wahr, wenn er für jede „state | description" zutrifft. Bei dieser 194
Überlegung treten die Begriffe des Möglichen und des Notwendigen auf. Es ist aber nicht ausgemacht, daß man vom Möglichen und vom Notwendigen nur im logischen Sinne sprechen kann. Carnap selbst erwähnt im Anhang zu seiner *Introduction to Semantics* (*vide* [**?**], § 38*d*, S. 243) unter den für die Semantik ausstehenden Problemen das Studium solcher nicht$_{a_1}$-$_{a_1}$extensionaler Operatoren, welche physikalische oder kausale Modalitäten zum Ausdruck bringen. Physikalische oder kausale Modalitäten betreffen das naturgesetzlich Mögliche und das Naturnotwendige. Wenn nun im Rahmen der Wissenschaftssprache Naturgesetze als gültig statuiert werden, und wenn ferner anerkannt wird, daß die Naturgesetze nicht logisch notwendig sind, so ergibt sich eine Unterscheidung des Notwendigen und des Tatsächlichen, welche von derjenigen zwischen dem Logischen und dem Deskriptiven verschieden ist. Wir können dann „state descriptions" in einem engeren Sinne betrachten, indem wir nur solche zulassen, die den Naturgesetzen gemäß sind, und erhalten damit eine engere Mannigfaltigkeit von möglichen Welten.

Den Feststellungen von Faktischem stehen somit nicht nur diejenigen von logischen Gesetzlichkeiten gegenüber, sondern allgemeiner von Gesetzlichkeiten überhaupt. Diese allgemeinere Entgegensetzung können wir nun mit Hilfe des Begriffs des Theoretischen zum Ausdruck bringen, indem wir den Feststellungen über Tatsächliches die theoretischen Feststellungen gegenüberstellen. Der Bereich des Theoretischen enthält dann als echten Teilbereich den des Logischen.

Das Spezifische des Theoretischen besteht aber gewiß nicht allein in | ei- A164
ner Gesamtheit von Aussagen, welche als gültig anerkannt werden, sondern vor allem in einer Begriffswelt, im Rahmen derer die theoretischen Aussagen erfolgen. Innerhalb der Wissenschaftssprache findet die theoretische Begriffsbildung ihren Niederschlag in dem, was Carnap die „theoretische Sprache"

[c] *Vide* [**?**].

nennt.[1]

195 Betrachten wir nun des Näheren die Rolle, welche Carnap der theo|retischen Sprache zuweist. Nach seiner Auffassung ist die theoretische Sprache nicht unmittelbar gedeutet, vielmehr erhalten die theoretischen Termini ihre Signifikanz erst in Verbindung mit den „Korrespondenz-Postulaten“, welche zwischen theoretischen Termen und Beobachtungstermen Beziehungen herstellen. Diese Beziehungen sind allerdings nicht als so weitgehend gedacht, daß dadurch alle theoretischen Termini in der Beobachtungssprache definiert würden. Carnap schließt sich vielmehr der Auffassung derer an, welche die Forderung, daß jeder theoretische Terminus sich experimentell definieren lassen müsse und in seiner Verwendung an eine solche Definition gebunden sei, als zu einschränkend für die theoretische Forschung und auch nicht dem tatsächlichen Verfahren der theoretischen Wissenschaft entsprechend erklären, wie es im Kreise des Neopositivismus insbesondere Herbert Feigl und Carl Hempel getan haben.

Hiermit wird ein wesentliches Erfordernis für die Freiheit der theoretischen Gedankenbildung anerkannt. Es bleibt dabei aber doch der Umstand, daß die Theorie nicht als eine Gedankenwelt, sondern bloß sozusagen als eine Sprach-Apparatur angesehen wird. Zu diesem mehr nur technischen Aspekt, den die theoretische Sprache bei Carnap erhält, tritt als ein anderes charakteristisches Moment dasjenige der Reduktion auf das rein Mathematische. Carnap ist bestrebt, nach Möglichkeit die theoretischen Entitäten auf mathematische zu reduzieren. Im Gebiet der Physik zeigt sich diese Möglichkeit in spezieller Art anhand der Vorstellungsweise der Feldtheorie, wonach das physikalische Geschehen in einer Abfolge von Zuständen im Raum-Zeit-Kontinuum besteht. Die Zustandsbestimmung wird durch Skalare, Vektoren und Tensoren gegeben. Zum Beispiel in der reinen Feldtheorie der Gravitation und der
A165 Elektri|zität erfolgt die Beschreibung des physikalischen Zustandes durch den symmetrischen Tensor des metrischen Feldes, aus dem sich die Längen- und Zeitmessung sowie die Trägheits- und Gravitationskräfte bestimmen, und den antisymmetrischen elektromagnetischen Tensor, der die elektrischen und ma-

[1]Wenn hier, in Anlehnung an Carnaps Ausdrucksweise schlechtweg von „der theoretischen Sprache“ die Rede ist, so soll damit nicht auf die Vorstellung von einer Gesamtwissenschaft Bezug genommen sein. Auch in Carnaps eigenen Ausführungen zum Thema der theoretischen Sprache ist das keineswegs der Fall. So spricht er von den „method$_{a_1}$**olog**$_{a_1}$ischen Problemen, die mit dem Aufbau eines theoretischen Systems, etwa eines solchen der theoretischen Physik … zusammenhängen“ (*vide* [**?**], S. 241–242■).

gnetischen Kräfte bestimmt. Materielle, geladene oder ungeladene Teilchen werden hier als besonders konzentrierte Verteilungen der Feldgrößen in einem räumlich engen Weltgebiet aufgefaßt. Die Komponenten der Tensoren sind Funktionen der Raum-Zeit-Stellen, und bei Einführung eines Koordinatensystems und Wahl von Einheiten werden die Maßzahlen der Komponenten mathematische Funktionen | der Raum-Zeit-Koordinaten;[2] nennen wir sie 196
„Feldfunktionen“. Die physikalische Feldgesetzlichkeit wird durch Differentialgleichungen für diese mathematischen Funktionen (in einer gegenüber dem Koordinatensystem invarianten Weise) formuliert, und die Feldfunktionen, welche den Ablauf der Zustände des Systems darstellen, bilden eine Lösung dieses Systems von Differentialgleichungen.

Die Anknüpfung der Theorie an die Erfahrungswirklichkeit wird durch Beziehungen von mehrerlei Art gegeben:

1. solche, auf denen die Einführung von Raum-Zeit-Koordinatensystemen beruht, sowie die Möglichkeiten der Bestimmung von Werten der Feldfunktionen,

2. solche, welche die Auswirkungen von Zuständen des Systems teils auf unsere direkten Wahrnehmungen, teils auf unsere experimentellen Beobachtungen betreffen,

3. solche, die jeweils die Anweisung liefern für die theoretische Übersetzung eines beobachtungsmäßig (sei es nur schematisch oder aber in genauerer experimenteller Bestimmtheit) gegebenen Falles, der mittels der Theorie untersucht werden soll.

Alle diese Beziehungen denkt sich Carnap axiomatisierbar durch Korrespondenz-Postulate$_{a_2 \underline{,} a_2}$ in denen Verknüpfungen zwischen den Feldfunktionen und unseren Beobachtungen ausgesagt werden. Ein solches System von Korrespondenz-Postulaten läßt sich allenfalls dann aufstellen, wenn überhaupt die Mannigfaltigkeit der möglichen Anwendungen der Feldtheorie (der Differentialgleichungen des Feldes) auf Beobachtungen axiomatisierbar ist.

Unter diesem Vorbehalt besteht somit die Möglichkeit, die theoretische Sprache der Physik gänzlich auf mathematische Begriffe zu beschränken und alles spezifisch Physikalische teils in die Beobachtungs|sprache, teils in die A166
Korrespondenz-Postulate zu verlegen. Die physikalische Theorie sagt dann nichts mehr aus über etwas, das in der physikalischen Natur vorhanden ist, ja sie sagt für sich allein überhaupt nichts aus, sondern liefert nur eine mathema-

[2][1] Die Komponenten des metrischen Feldes sind ja sogar von vornherein unbenannte Zahlen.

tische Handhabe für die Vorausbestimmung von Beobachtungen auf$_a$ G$_a$rund von gegebenen Beobachtungen. Man kann hier strenggenommen daher gar nicht von einer theoretischen Sprache reden.

197 Allerdings läßt sich dabei doch eine Art theoretischer Sprache wieder|gewinnen, indem man geeignete physikalische Benennungen einführt für gewisse häufig wiederkehrende mathematische Beziehungen und Ausdrücke, in Entsprechung zu den Bedeutungen, welche diese in der inhaltlich aufgefaßten Theorie haben; das Verfahren ist dann analog, wie wenn in einer rein arithmetisch konstituierten (analytischen) Geometrie doch die arithmetischen Beziehungen und Gegenständlichkeiten geometrisch interpretiert und benannt werden.

Was aber an der beschriebenen Methode der Elimination theoretischer Entitäten stutzig macht, ist der Umstand, daß sie ja gleichermaßen auf jedwede Art des Ansetzens von Naturgegenständen anwendbar ist: Wenn in den geläufigen Fällen des täglichen Lebens die Annahme von Naturgegenständlichkeiten sachgemäß ist, und wenn wir ferner unsere geläufigen Methoden der Orientierung über Ort und Zeit zu der Vorstellung der vierdimensionalen Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit extrapolieren, so scheint es nicht angängig zu sein, daß wir in dem Ansetzen von Naturgegenständlichkeit an gewissen Stellen sozusagen abbrechen und hier die Gegenstände durch ihre mathematischen Beschreibungen ersetzen.

Dieser Erwägung gegenüber kann jedoch Carnap geltend machen, daß die Unterschiedlichkeit der methodischen Behandlung nicht die Verschiedenheit von Stellen in der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit betrifft, sondern sich auf die Verschiedenheit in der Stufe des Theoretischen bezieht. Was mit einer solchen Verschiedenheit der Stufe gemeint sein soll, läßt sich insbesondere an dem Unterschied der Makro- und der Mikrophysik exemplifizieren. Allgemein liegt eine weitergehende Stufe des Theoretischen bei der Behandlung eines Wissensgebietes da vor, wo die Begriffsbildung zu einer stärkeren Überschreitung des anschaulich Vertrauten nötigt. Ein solcher Schritt der verstärkten Theoretisierung kann erfolgreich sein und sich als sachgemäß erweisen, und es kann sich auch im Umgehen mit den zuerst ungewohnten Begriffen nach reichlicherem Gebrauch eine praktische Sicherheit einstellen. Dabei bleibt aber doch der Unterschied bestehen zwischen dem methodisch mehr und dem weniger
A167 Elementaren, d. h. zwischen dem, was dem | Konkreten und der Beobachtung näher$_{a2}$ $_{a2}$ und dem, was ihnen ferner$_{d2}$ $_{d2}$steht.

Daß die Quantenphysik gegenüber der vorherigen „klassischen“ Physik eine verstärkte Theoretisierung in dem genannten Sinne bedeutet, ist er-

sichtlich. Auf die Quantenphysik kann allerdings das vorher beschrie|bene 198
Verfahren der Eliminierung von Entitäten nicht direkt angewendet werden, da bei dieser ja die Vorstellung von der eindeutigen, unabhängig vom Experimentieren objektiv bestimmten Abfolge der Zustände in der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit verlorengeht. In anderer Hinsicht kommt aber die Quantenphysik der Absicht des Eliminierungsverfahrens insofern entgegen, als hier die Vorstellung von der Gegenständlichkeit ohnehin eine abgeschwächte ist und das Mathematische der Begriffsbildungen im Vordergrund steht. Die Quantenphysik zeigt uns auch, auf welche Art sich die unterschiedliche methodische Behandlung verschiedener theoretischer Entitäten ohne eine anstößige Zäsur durchführen läßt, indem hier die theoretische Sprache der vorherigen Physik sozusagen die Rolle der Beobachtungssprache erhält.

Hierdurch wird zugleich der Gedanke nahegelegt, daß es wohl angemessen ist, die Unterscheidung zwischen Beobachtungssprache und theoretischer Sprache, anstatt sie absolut zu fassen, auf ein Niveau der Begriffsbildung zu beziehen. Darin werden wir bestärkt, wenn wir uns überlegen, was es in der Wissenschaftspraxis mit der Beobachtungssprache für eine Bewandtnis hat. Wenn sich die Physiker von ihren Experimenten erzählen, so sprechen sie gewiß nicht nur von Objekten der unmittelbaren Wahrnehmung. Man spricht etwa von einem Stück Holz, von einer Eisenstange, einem Gummiring oder einer Quecksilbersäule. In den Bedeutungen solcher Worte sind ja bereits beträchtliche theoretische Momente enthalten. Die Experimentalsprache der Physiker geht aber doch in dieser Hinsicht noch viel weiter.[3] Bemerkenswert ist auch, daß die Namen der physikalischen Begriffe für einen großen Teil (etwa „Luftdruck“, „elektrischer Strom“) in die gewöhnliche Umgangssprache eingegangen sind.

| Im Ganzen läßt sich der Sachverhalt dermaßen charakterisieren, daß | die A168 199

[3][1] Allerdings ist ja die These aufgestellt worden, daß alles physikalische Experimentieren auf Feststellungen über Koinzidenzen hinauskomme. Diese Behauptung ist aber gewiß nur cum grano salis zu verstehen: Die Feststellung über Koinzidenz (oder Nicht-Koinzidenz) ist jeweils der letzte entscheidende Schritt in dem Gesamtprozeß eines Experimentes, welches überdies erfordert, daß der Experimentator seinen Apparat als solchen erkennt und in der richtigen Weise mit ihm umgeht, ferner daß dieser Apparat sachgemäß angefertigt worden ist, weiter daß der Experimentierende sich eine hinlängliche Überzeugung davon verschafft, daß keine störenden Umstände vorliegen, usw. Daß alles das, was hierzu aufgefaßt werden und eingeübt sein muß, sich auf bloße Feststellungen über Koinzidenzen zurückführen läßt, dürfte wohl schwerlich zutreffen. Aber das ist ja auch wohl mit jener These nicht gemeint.

Beobachtungssprache einer auf einem bestimmten Niveau befindlichen Wissenschaft Bezug nimmt auf eine vorgängige Vorstellungs- und Begriffswelt – „vorgängig“ gemäß der in unserem Abschnitt 2 eingeführten Ausdrucksweise. Die vorgängigen theoretischen Begriffe erhalten auf diesem Niveau auch ihre Benennungen in der Beobachtungssprache. Wir brauchen wohl die Beobachtungssprache überhaupt nicht von der Umgangssprache zu trennen. Vielmehr kann vermutlich die Beobachtungssprache als eine durch Hinzufügung einer größeren Reihe von Termini bereicherte Umgangssprache aufgefaßt werden.

Die Relativierung der Beobachtungssprache auf ein begriffliches Niveau wird auch jener Art der Gegenüberstellung des Empirischen und des Theoretischen gerecht, wie sie in Ferdinand Gonseths Prinzip der Dualität intendiert ist. Gemeint ist hier, daß das Empirische und das Theoretische nicht getrennte Bereiche sind, sondern daß in jedem Gebiete und jedem Stadium des Erkennens die beiden Momente zusammenspielen. Die verschiedenen Gesichtspunkte der im Vorangehenden angestellten Überlegungen: die Eliminierung abstrakter Entitäten, die Unterscheidung von Stufen des Theoretischen und die Relativierung der Beobachtungssprache auf ein begriffliches Niveau haben ihre Anwendung im besonderen für die mathematische Beweistheorie. Diese geht ja aus von der Unterscheidung zwischen der „klassischen“ Methode der Mathematik, wie sie in der Analysis und der Mengenlehre sowie in den neueren abstrakten Disziplinen der Mathematik angewendet wird, und den elementareren Methoden, welche je nach der Art der Abgrenzung als „finite“, „konstruktive“$_{d_2,d_2}$ oder „prädikative“ zu charakterisieren sind. In der beweistheoretischen Untersuchung der klassischen Mathematik wird durch die Methode der Formalisierung der Aussagen und Beweise, wie sie mittels der logischen Symbolik erfolgt, eine Eliminierung abstrakter Entitäten ermöglicht. Diese Eliminierung will man insbesondere dazu verwerten, um die formale Widerspruchsfreiheit klassischer Theorien von einem der elementareren methodischen Standpunkte nachzuweisen. Bisher sind Nachweise der formalen Widerspruchsfreiheit mittels konstruktiver Methoden nur für solche formalen Systeme erbracht worden, die wenigstens einer prädikativen
A169 Deutung fähig sind. Neuerdings scheint durch | ein Verfahren von Clifford Spector mit einer weiten Fassung des konstruktiven Standpunktes ein Nachweis der Widerspruchsfreiheit für die formalisierte imprädikative Analysis zu gelingen.

200 | Die elementarere „Metasprache“, in der ein solcher Nachweis der Widerspruchsfreiheit geführt wird, hat, wie von Carnap vermerkt worden ist, die Rolle einer Beobachtungssprache. Es war ursprünglich die Idee Hilberts, daß

diese Sprache sich ganz im Rahmen der Betrachtung des Konkreten halten, also eine Beobachtungssprache im absoluten Sinne sein sollte. Schrittweise wurde man aber genötigt, mehr und mehr Theoretisches in sie aufzunehmen. Bereits der „finite Standpunkt“ verwendet grundsätzlich mehr, als Hilbert ursprünglich zulassen wollte; doch auch dieser methodische Standpunkt hat sich, auf$_a$ $\underline{\ \mathrm{G}}_a$rund der Resultate von Kurt Gödel, für den gesetzten Zweck als nicht zulänglich erwiesen. Das Ergebnis dieser Feststellung erscheint als nicht so fatal für die Beweistheorie, wie es anfangs angesehen wurde, wenn man den Gedanken der Bezogenheit der Beobachtungssprache auf ein Begriffsniveau akzeptiert. Die Anerkennung der methodischen Bedeutsamkeit der beweistheoretischen Untersuchungen, und insbesondere derjenigen über formale Widerspruchsfreiheit, ist nicht daran gebunden, daß man die übliche klassische Mathematik für dubios erachtet oder daß man jenen Standpunkt des „Formalismus“ einnimmt, wonach die klassische Mathematik nur als reine Formeltechnik ihre Berechtigung hat. So dachte auch Hilbert im Grunde nie, trotz mancher in solche Richtung weisender Äußerungen von ihm. – Die Aufgabestellung der konstruktiven Nachweise von Widerspruchsfreiheit ist durch die hohe Stufe des Theoretischen motiviert, wie sie in der klassischen Mathematik vorliegt.

Jedenfalls kann ein Angehöriger der konstruktiv-beweistheoretischen Forschungsrichtung sehr wohl die Ansicht vertreten, wie sie auch von Carnap befürwortet wird, daß die Begriffsbildungen der klassischen Mathematik auch als inhaltlich gedeutete ihre berechtigte Anwendung haben. Ob es aber angemessen ist, die sämtlichen von der Mengenlehre eingeführten Entitäten als eigentliche zu akzeptieren, steht auch von diesem Standpunkt zur Diskussion. Auch wird man nicht geneigt sein, die positive Stellung zu den theoretischen Begriffen gerade bloß der mathematischen Begriffsbildung als Privileg zuzuerkennen: Was den mathematischen Klassen und Funktionen recht ist, ist den Entitäten der Naturwissenschaften billig, soweit diese in Verständnis-erzeugender Weise angesetzt sind.

Kapitel 25

Bernays Project: Text No. 26

Bemerkungen zur Philosophie der Mathematik (1969)

Remarks on the philosophy of mathematics

(*Akten des XIV. Internationalen Kongresses für Philosophie, Wien, Band III: Logik, Erkenntnis- und Wissenschaftstheorie, Sprachphilosophie, Ontologie und Metaphysik*, Wien: Herder, S. 192–198;
repr. in *Abhandlungen*, S. 170–175)

192/A170 | Wenn wir die Mathematik mit der Logik vergleichen in Hinsicht auf die Rolle, die den beiden Erkenntnisgebieten im philosophischen Denken zugewiesen wird, so finden wir in dieser Beziehung eine Verschiedenartigkeit unter den Philosophen.

Für die einen ist die Logik das Ausgezeichnete; nach ihnen ist das Logische im weiteren Sinne, der $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$, das Vernünftige, und die Logik im engeren Sinn der Bestand an elementaren Einsichten, der bei allen Überlegungen zu$_a$ G$_a$runde zu legen ist, d. h. der Bestand an solchen Wahrheiten, die unabhängig von irgendeiner speziellen Sachhaltigkeit gültig sind. Die Logik im engeren Sinne (die „reine Logik") hat danach einen erkenntnistheoretisch primären Status.

Ein anderer Ausgangspunkt ist derjenige, bei dem die Methode der Mathematik als Vorbild für alles wissenschaftliche Denken genommen wird.

Während für die erstgenannte Ansicht das Logische das Selbstverständliche, das Unproblematische ist, ist nach der zweiten Ansicht das Mathematische das erkenntnistheoretisch Unproblematische. Verstehen ist danach letztlich mathematisches Verstehen. Der Gedanke, daß alles ratio|nale Einsehen von 193
der Art des mathematischen sein müsse, spielt ja insbesondere auch in den Argumentationen von David Hume eine wesentliche Rolle.

Für diese Ansicht galten lange Zeit die Elementa des Euklid als Repräsentant der mathematischen Methode. Dabei war man sich wohl oft nicht hinlänglich klar darüber, daß vom Standpunkt der Axiomatik das Euklidische Axiomensystem speziell ist$_{d_2,d_2}$ (wofür ja schon ein Anzeichen darin gegeben war, daß bereits von den frühen Kommentatoren Vorschläge für $_{a_1}$**die**$_{a_1}$ Ersetzung von Axiomen durch gleichwertige andere gemacht wurden). Es war wohl bei vielen – wenn auch wohl kaum bei den Autoren des griechischen Werkes – die Meinung, daß die Möglichkeit des strikten erfolgreichen Beweisens in der Geometrie auf der Evidenz der Axiome beruhe.

Bei dem Philosophieren nach axiomatischer Methode wurde allerdings zeitweise, insbesondere ja in der Schule von Christian Wolff, Evidenz auch als begriffliche Evidenz verstanden, so daß danach zwischen dem Logischen und dem Mathematischen nicht unterschieden | wurde. Der Satz vom Widerspruch$_{d_2,d_2}$ A 171
(in den man meist das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten einbezog)$_{d,d}$ wurde sozusagen als ein Zaubermittel angesehen, durch welches man mit Hilfe geeigneter Begriffsbildungen alle naturwissenschaftlichen und auch die metaphysischen Erkenntnisse gewinnen könne.

Wie Sie wissen, hat in Opposition gegen diese Philosophie Kant mit seiner Lehre von der reinen Anschauung das Moment des Anschaulichen in der Mathematik hervorgehoben. Aber auch nach Kant beruht die Möglichkeit der Geometrie als einer erfolgreichen deduktiven Wissenschaft auf der Evidenz der Axiome, d. h. bei ihm auf der anschaulichen Einsichtigkeit ihrer Existenzpostulate. Aus der Undeutlichkeit in der erkenntnistheoretischen Beurteilung der Geometrie des Euklid erklärt es sich, daß die Entdeckung der nichteuklidischen, Bolyai-Lobatschefskijschen Geometrie so umwälzend auf die philosophischen Lehrmeinungen wirkte.

Eine wesentliche Änderung des Aspekts ergab sich aber auch für die erste der beiden genannten Ansichten durch die Entwicklung der mathematischen Logik. Hier wurde es deutlich, daß die Logik als Disziplin (die sie ja schon bei Aristoteles war) nicht direkt in der Feststellung einzelner logischer Sachverhalte besteht, vielmehr etwas ist, das man besser als Metalogik bezeichnet, nämlich die Untersuchung der Beweismöglichkeiten in formal abgegrenzten

Bereichen des Deduzierens. Und ferner zeigte sich, daß die Methode solcher Metalogik eine typisch mathematische ist.

194 | Hiernach möchte es als angezeigt erscheinen, die Logik in die Mathematik einzuordnen. Daß man dieses zumeist nicht getan, sondern sich in der entgegengesetzten Richtung bemüht hat, erklärt sich wohl aus dem Mangel einer befriedigenden erkenntnistheoretischen Ansicht von der Mathematik. Der Terminus „mathematisch“ war sozusagen keine genügend vertraute philosophische Vokabel. Man suchte die Mathematik ihrerseits durch Einordnung in die Logik zu verstehen. Dieses gilt insbesondere von Gottlob Frege. Sie kennen gewiß die Fregesche Anzahldefinition im Rahmen seiner Prädikatentheorie. Die hierbei angewendete Methode hat bis heute ihre Bedeutung für die Einordnung der Zahlentheorie in die Mengenlehre. Gegen die Auffassung aber, daß hiermit eine *erkenntnistheoretische* Zurückführung auf reine Logik erreicht sei, läßt sich verschiedenes einwenden (worüber vielleicht in einem Kreis von Interess$_{d_1}$**en**$_{d_1 a_1}$**ier**$_{a_1}$ten diskutiert werden kann).

Eine andere Art der Auseinandersetzung mit der Frage der Beziehung von Mathematik und Logik besteht darin, daß man – wie es insbesondere R. Carnap tut – beide zu dem Gebiete des Analytischen | zusammenfaßt. Dabei wird der Kantische Begriff des Analytischen grundsätzlich erweitert, worauf ja besonders E. W. Beth hinwies. Gleichwohl wird diesem in erweitertem Sinne Analytischen meist der gleiche Charakter der Selbstverständlichkeit zugeschrieben, der den im Kantischen Sinne analytischen Sätzen zukommt. A172

Wie Sie wissen, hat W. V. Quine gegen die Unterscheidung des Analytischen und Synthetischen grundsätzlich opponiert. Wenngleich seine Argumentationen vieles Zutreffende enthalten, so werden sie doch wohl dem Umstand nicht gerecht, daß mit der Unterscheidung des Analytischen im weiteren Sinne und des Synthetischen etwas Wesentliches getroffen ist, nämlich der Unterschied zwischen mathematischen Sachverhalten und Sachverhalten in der Naturwirklichkeit. Um nur einiges Diesbezügliche zu erwähnen: Mathematische Sätze werden in anderem Sinne begründet als physikalische Sätze. Die mathematischen Größen der Analysis sind für die Physik nur approximativ relevant. Ob zum Beispiel die Lichtgeschwindigkeit im Centimeter-Sekunden-System durch eine rationale oder eine irrationale Zahl gemessen wird, diese Frage hat schwerlich einen physikalischen Sinn.

Freilich, der grundsätzliche Unterschied zwischen dem Mathematischen und dem Naturwirklichen bildet keinen hinlänglichen Grund$_{a_2}$,$_{a_2}$ um das Mathematische mit dem Logischen gleichzusetzen. Es erscheint als naturgemäß,
195 zur Logik nur dasjenige zu rechnen, was sich aus den allgemeinen | Bedin-

gungen und Formen der Diskursivität (der Begrifflichkeit und des Urteilens) ergibt. Die Mathematik aber handelt von den möglichen Strukturen, und zwar insbesondere $_{a_2}$**von den**$_{a_2}$ idealisierten Strukturen.

Hiermit ist einerseits die methodische Bedeutsamkeit der Logik ersichtlich, andrerseits aber auch, daß deren Rolle in gewissem Sinne anthropomorph ist. Dieses trifft nicht in gleicher Weise für die Mathematik zu, bei der wir veranlaßt werden, den Bereich des vorstellungsmäßig Überblickbaren in verschiedener Richtung zu überschreiten. Die Bedeutsamkeit der Mathematik für die Wissenschaft ergibt sich schon daraus, daß wir es in allen Gebieten der Forschung mit Strukturen zu tun haben (Strukturen der Gesellschaft, Strukturen der Ökonomie, Struktur des Erdkörpers, Strukturen der Pflanzen, der Lebensvorgänge, usw.). Dazu kommt die methodische Bedeutsamkeit der Mathematik auf$_a$ $\underline{\text{G}}_a$rund des Umstandes, daß in den meisten Wissenschaften, insbesondere den theoretischen, eine Art der Idealisierung der Gegenständlichkeit angewandt wird. F. Gonseth spricht in diesem Sinne von dem schematischen Charakter der wissenschaftlichen Beschreibung. Das Unterscheidende des theoretisch Exakten gegenüber dem Konkreten | wird A173
auch von Stephan Körner besonders hervorgehoben. Wie sie wissen, ist es der Wissenschaft gelungen, die Naturzusammenhänge in einem großen Maße strukturell zu verstehen, und die Anwendbarkeit der Mathematik zur Kennzeichnung und Erklärung der Naturvorgänge reicht ja viel weiter, als es die Menschheit einst geahnt hat.$_{d_1}\underline{.}_{d_1}$

Der Erfolg und die Tragweite der Mathematik ist aber etwas ganz anderes als ihre vermeintliche Selbstverständlichkeit. Der Begriff des Selbstverständlichen ist wohl überhaupt philosophisch fragwürdig. Wir können von relativ Selbstverständlichem in dem Sinne sprechen, daß zum Beispiel für den Physiker die mathematischen Sachverhalte, für den Geologen die physikalischen Gesetze, für den Geschichtsforscher die allgemeinen psychologischen Eigenschaften des Menschen selbstverständlich sind. Es ist hier vielleicht deutlicher, anstatt vom Selbstverständlichen vom Vorgängigen (gemäß Gonseths Ausdruck „préalable") zu sprechen.

Jedenfalls ist die Mathematik nicht in dem Sinne selbstverständlich, daß für sie keine Probleme, oder wenigstens keine grundsätzlichen Probleme beständen. Man bedenke doch, daß es für die Analysis lange Zeit, trotz ihrer großen Erfolge im Formalen, keine deutliche Methodik gab, vielmehr die Forscher mehr oder minder auf ihren Instinkt angewiesen waren. Erst im 19. Jahrh$_{a_2}$$\underline{\text{undert}}_{a_2}$ ist man hier zu präzisen und deutlichen Methoden gelangt. Die Theorie des Kontinuums von De$_{d_2}$$\underline{\text{t}}_{d_2 a_2}$$\underline{\text{d}}_{a_2}$ekind und Cantor, | 196 welche die Begründung dieser Methoden zum Abschluß brachte, ist aber$_{a_2,a_2}$ philosophisch betrachtet$_{a_2,a_2}$ gar nicht einfach. Es handelt sich dabei nicht um die Bewußtmachung von einer apriorischen Erkenntnis. Man mag eher davon sprechen, daß hier ein sehr gut gelungener Kompromiß zwischen dem Anschaulichen und den Anforderungen präziser Begrifflichkeit erreicht ist. Sie wissen ja auch, daß nicht alle Mathematiker mit dieser Theorie des Kontinuums einverstanden sind$_{d_2,d_2}$ und daß der Brouwersche Intuitionismus eine andere Beschreibung des Kontinuums befürwortet – von der man freilich finden kann, daß dabei der Gesichtspunkt der strikten Arithmetisierung zuungunsten des geometrisch Befriedigenden überbetont ist.

Eine besonders bekannte und vielbesprochene Problematik ist diejenige, die sich an die Antinomien der Mengenlehre geknüpft hat. Wie Sie wissen, sind verschiedene Vorschläge zur Behebung der Antinomien gemacht worden. Besonders ist ja die Axiomatische Mengenlehre zu erwähnen, welche zeigt, daß zur Vermeidung der Antinomien eine so geringe Einschränkung des mengentheoretischen Verfahrens genügt, daß die Cantorschen Beweisführungen alle aufrechterhalten werden können. Das ursprüngliche Zermelosche Axio-
A174 mensystem der | Mengenlehre ist hernach noch, wie Sie wohl wissen, einerseits erweitert, andrerseits formal verschärft worden. Philosophisch kann das Verfahren der Lösung der Antinomien durch die axiomatische Mengenlehre in dem Sinne gedeutet werden, daß man die Antinomien als Anzeichen dafür nimmt, daß die Mathematik als Ganzes nicht ein mathematisches Objekt bildet$_{d_2,d_2}$ und daß also die Mathematik nur als eine offene Mannigfaltigkeit verstanden werden kann.

Durch die Anwendung der Methoden der formalen Präzisierung auf die Mengenlehre hat sich eine Spaltung der mengentheoretischen Betrachtung in die Aufstellung und deduktive Entwicklung formaler Systeme und einer Modelltheorie ergeben. Durch diese Spaltung haben die semantischen Paradoxien, die man zunächst bei der Behebung der rein mengentheoretischen Paradoxien außer acht lassen konnte, eine neue Ausgestaltung und Bedeutsamkeit erhalten, und so stehen wir heute vor einer neuen grundsätzlichen Problematik$_{d_2,d_2}$ – welche freilich, ebenso wie seinerzeit die mengentheoretischen Antinomien, die Mathematik nicht in ihrer eigentlichen Forschung behelligt, die sich vielmehr in den verschiedenen Disziplinen mit großem Erfolg entfaltet.

Durch die vorangehenden Ausführungen werden uns folgende Gesichtspunkte für die Philosophie der Mathematik nahegelegt, die auch für die all-
197 gemeine Erkenntnistheorie von Belang sind: |

1. Es erscheint angemessen, der Mathematik eine Sachhaltigkeit zuzuschreiben, die aber verschieden ist von derjenigen des Naturwirklichen. Daß es außer der Objektivität des Naturwirklichen noch andere Arten der Objektivität geben kann, zeigt sich schon an der Objektivität in den Gebieten des Phänomenalen. Die Mathematik ist zwar insofern nicht phänomenologisch, als sie einerseits ja, wie schon erwähnt, vorwiegend von idealisierten Strukturen handelt$_{d_2},_{d_2}$ und ferner durch die Methode des Deduzierens beherrscht wird. Bei der Idealisierung kommt die Anschaulichkeit mit der Begrifflichkeit in Kontakt. (Es ist daher wohl auch nicht angemessen, Anschaulichkeit und Begrifflichkeit so stark einander entgegenzusetzen, wie es in der Kantischen Philosophie geschieht.)

Die Bedeutung der Mathematik für die theoretische Physik besteht darin, daß in dieser die Naturvorgänge durch mathematische Gegenständlichkeiten approximativ dargestellt werden.

2. Die Unterschiedlichkeit der Mathematik gegenüber der empirischen Forschung besagt nicht, daß wir in der Mathematik eine von vornherein gesicherte (apriorische) Erkenntnis haben. Es erscheint als notwendig zuzugestehen, daß wir auch in den Gebieten des Mathematischen lernen müssen$_{d_2},_{d_2}$ und auch hier eine Erfahrung sui generis (wir | mögen sie „geistige Erfahrung“ A175 nennen) haben. Damit geschieht der Rationalität der Mathematik kein Abbruch. Vielmehr erscheint es als ein Vorurteil vorauszusetzen, daß Rationalität notwendig mit Gewißheit verbunden sein müsse. Sichere Erkenntnis im einfachen, vollen Sinne haben wir fast nirgends. Das ist die alte sokratische Einsicht, die heute besonders auch in den Philosophien von F. Gonseth und K. Popper zur Geltung gebracht wird.

Gewiß ist zuzugeben, daß wir in den Überlegungen der Mathematik, und insbesondere in denen der elementaren Mathematik, eine besondere Art von Sicherheit besitzen, weil uns hier die Gegenstände einerseits anschaulich deutlich sind$_{a_1},_{a_1}$ und andererseits durch die Idealisierung der Gegenständlichkeit so gut wie alles abgestreift wird, was zu Subjektivität Anlaß gibt. – Wenn wir aber im populären Sinne von der Gewißheit sprechen, daß $2 \cdot 2 = 4$ ist, so denken wir doch an die konkreten Anwendungen dieses Satzes. Die Anwendung arithmetischer Sätze auf das Konkrete beruht ja aber auf empirischen Bedingungen, und für deren Erfülltsein haben wir auch nur eine empirische, wenn auch praktisch hinlängliche Sicherheit.

Indem wir die Koppelung von Rationalität und Gewißheit fallenlassen, gewinnen wir unter anderem die Möglichkeit, die *heuristische Rationalität* zu würdigen, die in der wissenschaftlichen Erkenntnis eine wesentliche Rolle spielt.

198 | Die Anerkennung der heuristischen Rationalität liefert insbesondere auch die Behebung der von David Hume zum Problem gemachten erkenntnistheoretischen Schwierigkeit: Wir können den rationalen Charakter der Annahme von notwendigen Zusammenhängen in der Natur anerkennen, ohne behaupten zu müssen, daß der Ansatz solcher Zusammenhänge den Erfolg garantiere; in Hinsicht dieses Erfolges sind wir in der Tat auf die Erfahrung angewiesen.

Kapitel 26

Bernays Project: Text No. 27

Die schematische Korrespondenz und die idealisierten Strukturen† (1970)

Schematic correspondence and idealized structures

(*Dialectica* 24, S. 53–66;
repr. in *Abhandlungen*, S. 176–188)

$\mathbf{1}_{a_1 - a_1}$

53/A176 | Unter den Thesen, die für die Philosophie Ferdinand Gonseth$_{d_2}$'$_{d_2}$s kennzeichnend sind, ist eine solche, die auf den ersten Blick als nicht so spezifisch erscheint wie andere, der aber bei näherem Zusehen besondere Bedeutsamkeit zukommt. Es ist die Behauptung, daß wir in der theoretischen Naturbeschreibung nicht zu einer adäquaten Darstellung des Wirklichen gelangen, sondern nur zu einer schematischen Korrespondenz.

Diese Aussage ist zunächst vielleicht einem Mißverständnis ausgesetzt, und eine genauere Erörterung ihres Inhalts mag nicht überflüssig sein. Es

†The original articel concluded with the author's address, reading „Paul Bernays, Jabok-Bodmerstrasse 11, 8002 Zürich.“

ist gewiß nicht gemeint, daß jede Art von Darstellung eines Naturgegenstandes oder eines Vorganges, die wir durch die theoretische Naturwissenschaft gewinnen, eine nur schematische Darstellung ist. Tatsächlich verschafft uns die theoretische Naturerkenntnis vielerlei Möglichkeiten, die Natur gleichsam für uns arbeiten zu lassen, und wir gewinnen auf solche Weise Abbildungen von hoher Vollkommenheit, die nichts weniger als schematisch sind, z. B. die Abbildung von Gegenständen durch eine gute photographische Aufnahme oder die Wiedergabe eines Klangvorganges durch eine gut gelungene Radio-Reproduktion.

Was als schematisch erklärt wird, ist die Wiedergabe einer Situation oder eines Vorganges in einer theoretischen „Beschreibung“. Hier macht sich das Schematische von vornherein dadurch geltend, daß die Beschreibung jeweils einer bestimmten Größenordnung der Betrachtung angepaßt ist. So ist es
ja insbesondere charakteristisch, daß die Physik | beim Vordringen in die 54
Bereiche des immer Kleineren sukzessive auf neuartige Gegenständlichkeiten und Gesetzlichkeiten geführt wird.

Bei dieser Entwicklung hat sich ja der alte Gedanke der Atomistik in imposanter Weise bewährt, jedoch nicht in dem Sinne, daß mit den Atomen etwas sozusagen Letztes, Unteilbares, Unveränderliches gefunden worden wäre.
Die Betrachtung der Aggregatzustände führt auf die | Zusammensetzung der A177
Stoffe aus Molekülen, diejenige der chemischen Prozesse auf die Zusammensetzung der Moleküle aus Atomen, und in der mikrophysikalischen Forschung erweisen sich die Atome ihrerseits als kompliziert strukturierte, aus noch viel kleineren Teilen zusammengesetzte Gebilde, Teilen$_{a_2,a_2}$ die unter genügend starken Einflüssen auch voneinander separiert werden können.

Eine Konsequenz der Entdeckung immer kleinerer Bestandteile der physikalischen Gegenständlichkeiten besteht darin, daß die Mehrzahl der Naturvorgänge als Massenerscheinungen aufzufassen sind und daß demgemäß viele der gebräuchlichen Gesetzlichkeiten einen Charakter des Schematischen haben, insofern sie auf der Erklärung von Vorgängen als Durchschnitts-Phänomenen beruhen.

Ein weiteres Moment des Schematischen in der physikalischen Gesetzlichkeit ist, daß viele zunächst aufgestellte und in der Erfahrung bewährte Gesetze im Verlauf der Entwicklung der Theorien als bloße Näherungen von komplizierteren, dafür aber umfassenderen Gesetzlichkeiten betrachtet werden. So wird ja sogar das Newtonsche Gravitationsgesetz, welches lange als ein Fundamentalgesetz der Physik angesehen wurde, heute als eine approximative Folgerung aus der Einsteinschen Gravitationstheorie entnommen.

In allen diesen Fällen bedeutet das Schematische der Darstellung keineswegs eine Unvollkommenheit, vielmehr bildet jeweils die Feststellung, daß eine gewisse kompliziertere Struktur sich in einer für gegebene Zwecke völlig zulänglichen Annäherung durch eine gewisse viel einfachere Struktur ersetzen läßt, eine zusätzliche Erkenntnis. Die betreffende angenäherte Darstellung ist auch in Hinsicht auf den gegebenen Bereich der Anwendung durchaus adäquat; sie ist nur nicht absolut adäquat, d. h. nicht für jede Art der Anwendung adäquat.

Betrachten wir den Sachverhalt noch etwas näher. Die meisten naturwissenschaftlichen Untersuchungen beziehen sich nur auf einen abgegrenzten Raum-Zeit-Bereich, für den die Wirkungen der Umgebung als Randbedingungen gesamthaft, also schematisch, angesetzt werden, oder überhaupt vernachlässigt werden können. Andererseits sind die kosmologischen Theorien,
55 welche auf eine mathematisch-phy|sikalische Erfassung der Natur als eines Ganzen ausgehen, erst recht zu einer starken Schematisierung genötigt. Hier kann es sich ja nur um Beziehungen in globo handeln.

Eine Art der sozusagen unabsichtlichen Vernachlässigung rührt davon her, daß in jedem Stadium der Forschung nur gewisse Arten von Strukturen,
A178 Prozessen und Abhängigkeiten wissenschaftlich | bekannt sind. Es können ja für die Charakterisierung z. B. eines Zustandes jeweils nur die bekannten Momente in Betracht gezogen werden.

Ungeachtet aber der ungeheuren Erweiterung, welche die Kenntnisnahme der Menschheit von gesetzlichen Strukturen und von verschiedenartigen Formen der theoretisch faßbaren Zusammenhänge im vorigen und im gegenwärtigen Jahrhundert erfahren hat, besteht doch kein Anlaß, anzunehmen, daß wir in dieser Beziehung etwa schon bald zu einem Abschluß gelangen.

Der Gesichtspunkt der schematischen Begrenztheit der theoretischen Beschreibungen findet insbesondere Anwendung auf den Gedanken des *Determinismus*, d. h. den Gedanken, daß das gesamte Naturgeschehen in einem hinlänglich abgeschlossenen Bereich sich gemäß einer mathematischen Gesetzlichkeit, von einem jeden fixierten Momentanzustande aus, in seinem Verlaufe eindeutig und erschöpfend bestimmt. Hierbei wird auch das organische Geschehen einbegriffen, sowie auch dasjenige des menschlichen Lebens und Handelns.

Diese Ansicht beruht auf der Annahme, daß das Naturgeschehen in adäquater Weise durch eine Lösung eines Systems von Differentialgleichungen dargestellt werde. Wie man weiß, wird diese Annahme in der heutigen Quantenmechanik fallengelassen; nach dieser Theorie bestimmen sich ja die mikroskopischen Vorgänge nicht eindeutig durch Differentialgesetze, diese liefern vielmehr nur Bestimmungen von Wahrscheinlichkeiten. Doch auch wenn man geltend macht, daß diese Art der Undeterminiertheit sich nur auf die mikroskopischen Vorgänge bezieht und daß für die makroskopischen Vorgänge gleichwohl eine deterministische Gesetzlichkeit resultiere, so hat doch jedenfalls diese Gesetzlichkeit den Charakter des Schematischen, und bereits dieses Moment des Schematischen bildet ein hinlängliches Gegenargument gegen einen strikten Determinismus.

Hervorzuheben ist hier, daß die Ablehnung eines strikten Determinismus keineswegs ein Aufgeben des üblichen kausalen Denkens bedeutet. Das Prinzip des ursächlichen Forschens, welches besagt, daß wir bei der Beobachtung einer Abweichung von einem stationären Zustand oder von dem normalen
Verlauf eines Prozesses erwarten | können, einen erklärenden Umstand für 56
diese Abweichung zu finden, schließt ja gar nicht den Determinismus in sich.

Ferner auch behält natürlich die deterministische Form physikalischer Gesetze ihre grundsätzliche Bedeutung für die Anwendung der Gesetze zur Gewinnung von Voraussagen. Die Ablehnung des Determinismus bezieht sich al-
so berechtigtermaßen nur auf den Determinismus in dem | anfangs erwähnten A179
Sinne, d. h. den Determinismus als eine extreme philosophische Doktrin.

Diese Doktrin spielt insbesondere eine Rolle bei der viel diskutierten Streitfrage der menschlichen Willensfreiheit.[1] Diese Frage kann unter sehr verschiedenen Gesichtspunkten betrachtet werden. Es kann einerseits, vom Standpunkt der erfahrungsmäßigen Betrachtung, darauf hingewiesen werden, daß gerade bei bedeutsamen Entscheidungen eines Menschen, da wo er sich in stärkerer Weise einsetzt, die seelischen Triebkräfte meist so beherrschend sind, daß von einer Wahl nach Belieben nicht die Rede sein kann. Die Rolle der Willensentscheidung ist vergleichbar derjenigen der Exekutive in einem Staate, welcher um so mehr Verfügung zugestanden werden kann, je weniger gewichtig die Entscheidungen sind, um die es sich handelt.

Anders ist es, wenn die Willensfreiheit vom Standpunkt des Determinismus bestritten wird. Es wird dann das menschliche Handeln entweder, im Sinne der Psycho-Physik, gemäß der physikalisch-physiologischen Gesetzlichkeit betrachtet, oder man denkt sich die psychologische Seelenforschung zu

[1/1*] Gonseth hat seine Gedanken zu dieser Frage in seiner Schrift *Déterminisme et libre arbitre* (*vide* [**?**]) dargelegt.$_d$[1*] ...$_d$ (Die Fußnoten 1* bis 3* sind nachträgliche Hinzufügungen [to the reprint in the *Abhandlungen*].)

einer solchen Schärfe gebracht, daß sie genauer Vorausbestimmungen fähig ist. Daß aber die Berufung auf die Prinzipien und Methoden der Psycho-Physik oder der Psychologie keinen strikten Determinismus in betreff der menschlichen Willenshandlungen begründen kann, dessen werden wir uns bewußt, sobald wir der grundsätzlichen schematischen Begrenzung eingedenk sind, die der wissenschaftlichen Beschreibung der Zustände und Vorgänge eigentümlich ist. Nehmen wir z. B. an, daß es der Biologie gelinge, die Gen-Struktur und damit die Erbanlage eines Menschen experimentell zu bestimmen, so kann doch schwerlich diese Bestimmung von solcher Art sein, daß der beobachtende Forscher oder der etwa aufnehmende Apparat alle die in der Erbanlage des betreffenden Menschen enthaltenen Fähigkeiten gewinnt. Mit
57 anderen Worten: die registrierten Daten | können schwerlich ein Äquivalent bilden für die Potentialitäten, die in der Erbanlage enthalten sind. Dieses aber wäre doch erforderlich, wenn sich auf Grund der Bestimmung der Erbanlage jenes Menschen und anhand der Feststellung der einwirkenden
A180 Umstände seine Leistungen sollten im einzelnen prognostizieren lassen. |

$\mathbf{2}_{a_1 \cdot a_1}$

Bisher haben wir das Schematische nur im Sinne des Einschränkenden betrachtet, als das bloß schematisch Abstrakte gegenüber dem reicheren Konkreten und ${}_{a_1}$**dem**$_{a_1}$ Lebendigen. Dieser Aspekt bildet aber nur die eine Seite des Sachverhaltes, und es wäre auch eine unangemessene Auffassung von der schematischen Korrespondenz im Sinne Gonseth$_{d_2}$'$_{d_2}$s, wenn man sich das Schematische dabei eo ipso als eine Vergröberung dächte. Zu den Schematen, welche die Wissenschaft in ihrer Beschreibung verwendet, gehören ja insbesondere die geometrischen Figuren, und diese haben eine Art von Vollkommenheit, welche durch konkrete Gegenstände höchstens approximativ erreicht wird. Ein konkreter räumlicher Gegenstand kann nur ungefähr, nie ganz genau die Gestalt einer Kugel haben; ebenso kann eine konkrete Länge nur approximativ die mittlere Proportionale zwischen zwei verschiedenen Längen sein. Es findet also eine Art Wechselbeziehung zwischen dem Konkreten und den Schematen statt, insofern einerseits die Schemata das Konkrete im allgemeinen nur approximativ darstellen, andererseits die Schemata sich im allgemeinen nur approximativ durch konkrete Gegenstände realisieren lassen.

In dieser Wechselbeziehung kommt nun zum Ausdruck, daß wir in den Schematen eine Gegenständlichkeit sui generis vor uns haben; es ist die Gegenständlichkeit des *Mathematischen*.

Die Mathematik überhaupt läßt sich auffassen als die Lehre von den Schematen nach ihrer inneren Beschaffenheit. Damit erhält einerseits, auf Grund des Gedankens der schematischen Korrespondenz, die wesentliche Rolle der Mathematik für die theoretische Naturwissenschaft ihre Würdigung, andererseits wird aber damit auch der grundsätzlichen Verschiedenartigkeit der mathematischen Gegenständlichkeit gegenüber der Naturgegenständlichkeit Rechnung getragen.

Die mathematische Gegenständlichkeit geht durch Idealisierungs- und Abstraktionsprozesse hervor aus der phänomenalen Gegenständlichkeit des *Strukturellen*.

| Das Thema der Struktur wurde kürzlich von Herrn Gonseth im Hinblick 58
auf den „Strukturalismus“ behandelt$_{a_2 \underline{,} a_2}$ und zwar in Verbindung mit den methodischen Fragen der Axiomatik und der Formalisierung.[2*] Es sei mir gestattet, zu diesen Themat$_d$**en**$_{da}$**a**$_a$ einige Bemerkungen beizufügen.

a) Was zunächst die Rolle der Struktur überhaupt betrifft, so kann | A181
doch Struktur als dasjenige angesehen werden, was in der Phänomenalität zu den Qualitäten hinzukommt. Die geläufige Gegenüberstellung von Qualität und Quantität ist wohl für manche Fälle des täglichen Lebens angemessen, aber diejenige des Qualitativen und des Strukturellen ist gewiß die mehr grundsätzliche. Die Beurteilung des Quantitativen kommt hinaus auf Prozesse des Aneinanderfügens und auf Beobachtungen wie die des Hinausragens eines Gegenstandes über einen andern; beides hat einen strukturellen Charakter. Dagegen eine generelle Zurückführung des Strukturellen auf das Quantitative gelingt schwerlich in phänomenologischem Sinne, d. h. auf direkt beschreibende Art, sondern höchstens theoretisch, etwa im Geiste eines Pythagoräismus, gemäß welchem aber auch die qualitativen Unterschiede auf quantitative zurückgeführt werden.

In der Mathematik haben wir es zumeist nicht mit direkt phänomenal gegebenen Strukturen, sondern mit idealisierten Strukturen zu tun, wobei die Idealisierung in einer Anpassung an die Begrifflichkeit, gewissermaßen einem Kompromiß zwischen Anschauung und Begrifflichkeit, besteht.

[2*] *Vide* [**?**].

Anzumerken ist hierzu, daß in den Unternehmungen der konstruktiven Mathematik das Bestreben ist, die Idealisierung möglichst zu beschränken; in vollem Maße gelingt dieses nicht; insbesondere kommt auch die konstruktive Mathematik nicht ohne die Vorstellung von der unbeschränkten Anwendbarkeit der arithmetischen Operationen (Summe, Produkt, Potenz usw.) aus.

b) Die mathematische Idealisierung kommt insbesondere zur Geltung durch die *axiomatische* Behandlung von Theorien. Wie man weiß, sind zwei verschiedene Arten der Axiomatik zu unterscheiden. Herr Gonseth bezeichnet sie in seinem Buch *Le probleme du temps*[3*] als axiomatisation schématisante und axiomatisation structurante. Bei der ersten stützt man sich auf eine schon vorhandene Sprache, in der die betrachteten Gegenstände und Beziehungen ihre Namen besitzen, und das Moment des Axiomatischen besteht darin, daß einerseits diese Sprache im Sinne einer Schematisierung der betreffenden Gegenständlichkeiten verschärft wird und daß man ferner gewisse als gültig angenommene Behauptungen über jene Gegenständlichkeiten
59 als Ausgangs|punkt für logische Beweisführungen voranstellt. Bei der zweiten Art der Axiomatisierung treten die ursprünglichen Gegenstände und Bezie-
A182 hungen nicht mehr | selbständig, sondern nur als Glieder einer Gesamtstruktur – sozusagen bloß in ihrer grammatischen Rolle – auf, und das Axiomensystem macht Aussagen über diese Gesamtstruktur.

Bei etlichen Axiomensystemen dieser zweiten Art ist eine definitorische Fassung die gebräuchliche, z. B. bei dem Axiomensystem der Gruppen. Man sagt etwa: ein Bereich von Dingen, für welche eine Zusammensetzung $ab = c$ erklärt ist, bildet mit Bezug auf diese Zusammensetzung eine Gruppe, wenn 1. die Zusammensetzung assoziativ ist und 2. die Zusammensetzung beiderseitig umkehrbar ist, so daß für beliebige Dinge a, b (aus dem Dingbereich) ein Ding x in dem Bereich existiert, für welches $ax = b$, sowie auch ein Ding x, für welches $xa = b$ ist.

Diese Bedingungen lassen sich auch als „Axiome der Gruppe“ aussprechen. Ersichtlich ist hier, daß wir eine Definition vor uns haben, und zwar nicht eine implizite, sondern eine *explizite* Definition. Freilich, das durch sie Definierte ist weder der Bereich der Dinge noch die Zusammensetzung$_{d_2,d_2 a_2 - a_2}$ Diese beiden treten in der Definition nur implizite auf. Definiert wird, was eine Gruppe ist, oder genauer, wann ein Bereich von Dingen mit Bezug auf eine für ihn erklärte Operation der Zusammensetzung eine Gruppe bildet.

[3*] *Vide* [**?**].

Gruppen aber gibt es von sehr verschiedener Struktur. Was durch die Gruppen-Axiome gekennzeichnet wird, ist also nicht eine bestimmte Struktur, sondern eine *Gattung von Strukturen.* Der Fall eines Axiomensystems, welches eindeutig eine Struktur kennzeichnet, ist nur ein spezieller. Man nennt ein solches Axiomensystem, bei dem je zwei Erfüllungen („Modelle") strukturgleich („isomorph") sind, „kategorisch".

Andererseits kann ein und dieselbe Gattung von Strukturen im allgemeinen durch verschiedene Axiomensysteme definiert werden: welche von den für eine Struktur gültigen Sätzen man als Axiome nimmt, das ist durch die Struktur selbst nicht bestimmt; auch die Wahl der Grundprädikate$_{d_2,d_2}$ bzw. Grundoperationen wird durch die Struktur nicht festgelegt: was für das eine Axiomensystem ein Grundprädikat ist, kann für ein anderes, welches die gleiche Strukturgattung definiert, ein (definitorisch) abgeleitetes Prädikat sein.

Auf solche Arten gibt es Beziehungen der Gleichwertigkeit zwischen Axiomensystemen. Eine andere methodisch wichtige Beziehung zwischen solchen ist diejenige, daß ein Axiomensystem eine Erweiterung eines | anderen bildet. 60
Dabei sind zwei verschiedene Möglichkeiten zu unterscheiden: die eine ist, daß die Grundelemente die gleichen bleiben, aber neue Axiome hinzugefügt werden; dann wird (im allgemeinen) die | gekennzeichnete Strukturgattung A183
eingeschränkt; die andere besteht darin, daß neue Grundprädikate oder -operationen hinzugenommen werden nebst auf diese bezüglichen Axiomen; dann geht man über zu einer reicheren Struktur. So ist z. B. das lineare Kontinuum, wenn es als mit einer Maßbestimmung versehen gedacht wird, eine reichere Struktur, als wenn es nur als linear geordnete Mannigfaltigkeit aufgefaßt wird.

c) Der Gebrauch von Axiomensystemen erfolgt, ihrer Bestimmung nach, mittels des logischen Schließens. Die Methoden der logischen Beweisführung wurden durch die mathematische Logik analysiert. Das Ergebnis dieser Analyse ist, daß für das Beweisen in den elementaren Theorien die Prädikatenlogik der „ersten Stufe" ausreichend ist, bestehend aus der Aussagenlogik, d. h. den Regeln betreffend die Aussagenverknüpfungen „und", „oder", „nicht", „wenn-so", ferner den Regeln für die Allform und die Existenzform und den Regeln der Gleichheit. Das logische Schließen in diesem Rahmen läßt sich so genau schematisieren, daß mit Hilfe von Symbolen für die Aussagenverknüpfungen sowie für „alle" und „es gibt" die inhaltlichen Beweise in die kombinierte Anwendung von einigen wenigen schematischen Regeln übersetzt werden können.

Hiermit ergibt sich eine neue Art von Strukturen: die Strukturen der formalen Deduktionen. Zwischen den gültigen Sätzen einer axioma-tischen Theorie, die sich in dem genannten logischen Rahmen entwickeln läßt, und den Satzformeln, die sich nach den Regeln der kalkülmäßig formalisierten Theorie herleiten lassen, besteht eine vollkommene Entsprechung. Diese Harmonie zwischen der „Semantik“ und der „Syntax“ der Theorie wird durch den Gödelschen Vollständigkeitssatz festgestellt, welcher besagt: Dann und nur dann ist ein Satz der Theorie gemäß den formalen Deduktionsregeln beweisbar, wenn er nicht durch ein „Modell“ widerlegt werden kann.

Über den beschriebenen Rahmen logischer Beweisführung werden wir bereits überall da hinausgeführt, wo der Allgemeinbegriff der *endlichen Zahl* benutzt wird. Dieses geschieht z. B. – um einige elementare Anwendungsfälle zu nennen – in der Geometrie, wenn Aussagen über beliebige Polygone oder beliebige Polyeder gemacht werden, ferner bei den allgemeinen Sätzen der formalen Algebra und in der Theorie der endlichen Gruppen. In all diesen
61 Fällen kommt das Schluß|prinzip der vollständigen Induktion zur Verwendung.

Weitergehend als diese zahlentheoretische Erweiterung der Logik der ersten Stufe ist die Logik der „zweiten Stufe“, in welcher Allgemeinbegriffe wie
A184 diejenigen des (ein- oder mehrstelligen) Prädikates, der | Funktion (Operation, Abbildung, Folge) und der Menge benutzt werden und in der die Regeln für die Allform und die Seinsform mit Bezug auf diese Begriffe angewendet werden. Zu den Schlußweisen der Logik der zweiten Stufe gehört auch das Auswahlprinzip.

Von dieser Logik der zweiten Stufe wird zunächst in der klassischen Analysis Gebrauch gemacht, weitergehend in der Mengenlehre und allenthalben da, wo die mengentheoretische Denkweise Anwendung findet, so insbesondere in der Semantik, d. h. den Untersuchungen, die sich auf die Erfüllung von Axiomensystemen durch Modelle beziehen. Der Begriff der Erfüllbarkeit eines Axiomensystems ist bereits ein solcher der Logik der zweiten Stufe, ebenso derjenige der semantischen Konsequenz (der semantische Folgerungsbegriff). Man sagt, daß ein Satz aus einem Axiomensystem (im semantischen Sinne) folgt, wenn in jedem Modell des Axiomensystems der Satz erfüllt ist. Auch die Definition des Begriffes „kategorisch“ erfordert die Logik der zweiten Stufe.

d) Man hat nun die Logik der zweiten Stufe, d. h. die für sie wesentlichen Begriffe der Menge, der Funktion usw., wiederum der Analyse unterworfen, und eine Zeitlang konnte es scheinen, daß sich die Logik der zweiten Stufe auf die der ersten Stufe reduzieren lasse, indem man die Mengen als mathematische Dinge und die Elementbeziehung („a ist Element von m“) als eine axiomatische Grundbeziehung, analog der Inzidenz in der Geometrie, behandelt.

In der so angelegten Axiomatik Zermelo$_{d_2}$'$_{d_2}$s tritt allerdings eine Axiomen-Regel („das Aussonderungsaxiom“) auf, in welcher, entsprechend wie bei dem Prinzip der vollständigen Induktion, von einem beliebigen Prädikat („definite Eigenschaft”) die Rede ist. Es läßt sich aber auch die Verwendung dieses Prädikatbegriffes axiomatisch präzisieren, so daß man zu einer Axiomatik im Rahmen der Logik der ersten Stufe gelangt.

In der Tat lassen sich anhand einer solchen Axiomatik die Beweise der klassischen Analysis und der Cantorschen Mengenlehre durchführen und auch mittels der logischen Symbolik formalisieren. Jedoch eine Harmonie zwischen Syntax und Semantik besteht hier nicht mehr. Durch die axiomatische Präzisierung des Prädikatbegriffes wird dieser Begriff eingeengt. Das macht
sich zwar nicht störend für die bekannten | Beweise der Zahlentheorie, Ana- 62
lysis und Mengenlehre geltend; diese Beweise lassen sich, wie gesagt, im Rahmen der Axiomatik führen; auch ist jeder im Rahmen der Axiomatik beweisbare Satz im Sinne der üblichen (klassischen) Deutung zutreffend. Aber für die Anwendung des Vollständigkeitsatzes haben wir jetzt die Komplikation,
daß die Begriffe „Erfüllbarkeit“ und „Widerlegbarkeit“ einen verschiedenen | A185
Sinn haben, je nachdem sie gemäß der Axiomatik oder vom Standpunkt der Semantik gebraucht werden.

Ein Modell der axiomatischen Mengenlehre oder allgemein einer zunächst im Rahmen der Logik der zweiten Stufe axiomati$_{d_1}$**sch**$_{d_1 a_1}$**siert**$_{a_1}$en Theorie, die dann aber durch axiomatische Beschränkung des Prädikatbegriffs, bzw. des Mengen- oder Funktionsbegriffes, auf die Logik der ersten Stufe reduziert worden ist, nennt man ein „Non-Standard-Modell“, wenn sich darin die Beschränkung des Prädikatbegriffes (bzw. des Mengen- oder Funktionsbegriffes) bemerkbar macht, andernfalls nennt man es ein Standard-Modell.

Ein Non-Standard-Modell für ein Axiomensystem der Mengenlehre oder der Analysis von der betrachteten Art erhält man auf Grund des Löwenheimschen Satzes, welcher besagt, daß ein jedes in der Logik der ersten Stufe formalisierbare Axiomensystem, welches widerspruchsfrei ist, ein Modell besitzt, dessen Elemente (Individuen) von natürlichen Zahlen gebildet werden. Ein solches Modell kann gewiß kein Standard-Modell sein, da ja in der Mengenlehre, sowie schon in der Analysis, der Satz beweisbar ist, daß die zahlentheoretischen Funktionen (d. h. Funktionen mit Zahlen-Argumenten und

Zahlen als Werten) – welche hier zu den Individuen gehören – sich nicht (durch natürliche Zahlen) numerieren lassen. Man erhält also hier ein Modell, das$_{d_2}\underline{\text{s}}_{d_2}$ einem in der Theorie beweisbaren Satz im Sinne einer externen Deutung widerspricht.

Es will nun scheinen, daß derartige Schwierigkeiten nur da auftreten, wo wir es mit überabzählbaren Mannigfaltigkeiten zu tun haben; tatsächlich finden sich aber solche Schwierigkeiten bereits bei der Zahlentheorie. Auch hier bewirkt die Beschränkung des Schlußprinzips der vollständigen Induktion auf Aussagen von bestimmter Bildungsweise das Auftreten von Non-Standard-Modellen. Hier kann wiederum ein inhaltlich gültiger Satz der Zahlentheorie einem für ein Modell (extern) gültigen Satz widersprechen. Und jedenfalls enthält ein Non-Standard-Modell der Zahlentheorie außer den Zahlen $0, 1, 2, 3 \ldots$ noch unendlich viele Elemente, welche in ihm mit als „natürliche Zahlen“ fungieren.

63 | Mit diesen Feststellungen ist nun aber doch nicht die Ansicht widerlegt, daß das Vorhandensein der Non-Standard-Modelle mit dem Überabzählbaren zu tun hat: zwar ist die Menge der natürlichen Zahlen abzählbar, ja sogar der Prototyp des Abzählbaren. Aber die Eigenschaften (Mengen) von Zahlen, welche für die Anwendung des Prinzips der vollständigen Induktion in Betracht kommen, bilden eine überabzählbare Gesamtheit.

Übrigens ist noch zu bemerken, daß sich die zahlentheoretischen Non-
A186 |Standard-Modelle nicht etwa dadurch wegschaffen lassen, daß man die Zahlentheorie in einen weiteren formalisierbaren axiomatischen Rahmen einordnet. Vielmehr gilt auf Grund der Gödelschen Unvollständigkeitssätze, daß für jedes widerspruchsfreie Axiomensystem der Analysis oder der Mengenlehre, welches sich getreu durch einen Formalismus darstellen läßt, solche Non-Standard-Modelle existieren, welche auch schon in $_a\underline{\text{B}}_a$ezug auf die Zahlentheorie non-standard sind.

e) Die betrachteten Schwierigkeiten knüpfen sich an die axiomatisierte Mathematik, und zwar an jene stärkere Art der Axiomatisierung im Rahmen der Logik der ersten Stufe, welche die Formalisierung ermöglicht. Indem man, nach dem Gedanken von Hilbert, die deduktive Struktur einer formalisierten Theorie zum Gegenstand nimmt, wird die Theorie gewissermaßen ins Zahlentheoretische projiziert. Die so erhaltene zahlentheoretische Struktur ist im allgemeinen wesentlich verschieden von der durch die Theorie intendierten Struktur, sie kann aber dazu dienen, die Widerspruchsfreiheit der Theorie von einem Standpunkt zu erkennen, der elementarer ist als die Annahme der intendierten Struktur.

Hilbert gedachte auf solche Weise einen elementaren Nachweis der Widerspruchsfreiheit der gesamten klassischen Mathematik zu gewinnen und damit das mathematische Grundlagenproblem ein für allemal aus der Welt zu schaffen.

Dieses Programm mußte in zweierlei Hinsicht revidiert werden. Einerseits mußten die Ansprüche hinsichtlich der Elementarität der beweistheoretischen Überlegungen herabgesetzt werden. Der von Hilbert ins Auge gefaßte „finite Standpunkt“ erwies sich für den Zweck als nicht ausreichend, wobei es sich zugleich zeigte, daß dieser Stand|punkt eingeschränkter ist als derjenige des 64
Brouwerschen Intuitionismus.[2]

| Das andere Erfordernis der Revision des Hilbertschen Programmes be- A187
zieht sich auf die Vorstellung einer definitiven Erledigung der Grundlagenfragen der Mathematik. Bisher sind für die formalen Systeme der Zahlentheorie und für Teilsysteme der Analysis Widerspruchsfreiheits-beweise mit verschiedenen Methoden erbracht worden, die alle im Bereiche dessen liegen, was die intuitionistische Mathematik anerkennt. Nehmen wir an, daß es gelinge$_{a_2\underline{,}a_2}$ in einem geeignet erweiterten Rahmen konstruktiver Mathematik Widerspruchsfreiheitsbeweise für formale Systeme der klassischen Analysis und für die formalisierte axiomatische Mengenlehre zu führen, so würde auch damit noch keineswegs ein Abschluß erreicht sein. Denn wie schon erwähnt wurde, geht die Semantik der Mengenlehre über die axiomatisch präzisierte Mengenlehre wesentlich hinaus. Und überhaupt läßt sich gewiß nicht die gesamte Mathematik durch eine formal abgegrenzte Theorie erschöpfend darstellen. Die Mathematik als Ganzes – dieses können wir aus den Antinomien der Mengenlehre entnehmen – ist nicht wiederum eine Struktur, d. h. ein mathematischer Gegenstand, noch auch einem solchen isomorph.

Die beweistheoretische Betrachtung kann sich demnach nicht auf die Mathematik überhaupt, sondern jeweils nur auf bestimmte abgegrenzte mathe-

[2] In Hinsicht auf die Bewertung methodischer Standpunkte nach ihrer Evidenz ist es angezeigt, daß man sich $_{d_2}$**klar mache**$_{d_2 a_2}$**klarmacht**$_{a_2}$, daß man nicht in einem einfachen Sinne schlechtweg von „evident“ und „nicht-evident“ sprechen kann – selbst wenn wir von den individuellen Bedingungen der Evidenz absehen. Es gibt ja sowohl Gradabstufungen wie auch verschiedene Arten der Evidenz. So kann ein Gewinn an Elementarität auf Kosten des Grades der Evidenz erfolgen, wofür es nicht an Beispielen fehlt. Es ist schwerlich angemessen, irgendeinen methodischen Standpunkt schlechtweg als denjenigen der mathematischen Evidenz zu erklären. Die Möglichkeit der Rechtfertigung der Methoden der klassischen Mathematik (im Sinne eines Nachweises ihrer Widerspruchsfreiheit) durch Überlegungen elementarerer Art hat natürlich gleichwohl ihre Bedeutsamkeit.

matische Theorien erstrecken.

Wenn nun in den beiden genannten Hinsichten die ursprüngliche Zielsetzung der Hilbertschen Beweistheorie der Modifikation bedarf, so hat doch dieses Unternehmen Hilberts sich als sehr fruchtbar erwiesen. Die beweistheoretischen Untersuchungen bilden heute ein ergebnisreiches Feld der mathematischen Forschung. Auch bei diesen Untersuchungen haben wir es mit idealisierten Strukturen zu tun, wenngleich hier gern vom „Konkreten“ gesprochen wird, um den Unterschied gegenüber solchen Betrachtungen hervorzuheben, die sich in stärkerem Maße vom Konkreten entfernen. | 65

f) Es kann hier nicht die Aufgabe sein, die verschiedenen heutigen grundlagentheoretischen Unternehmungen zu erörtern und zu würdigen. Verschiedene von diesen, insbesondere der Brouwersche Intuitionismus, tendieren dahin, die übliche Mathematik durch eine eingeschränktere Methodik zu ersetzen, welche im Vergleich zur Analysis auf eine striktere Arithmetisierung hinauskommt. Diese Untersuchungen haben ihre Fruchtbarkeit vor allem darin, daß in ihnen etliche neue, für die Mathematik wertvolle Begriffsbildungen und Methoden entwickelt werden. Die hier gewonnenen Ergebnisse wird man auch dann würdigen, wenn man nicht der Meinung ist, daß die üblichen Methoden der klassischen Analysis durch andere ersetzt werden sollen. Zuzugeben ist, daß die klassische Begründung der Theorie der reellen
A188 Zahlen durch | Cantor und ${}_{d_2}\underline{\text{G}}_{d_2 a_2}\underline{\text{D}}_{a_2}$edekind keine *restlose* Arithmetisierung bildet. Jedoch, es ist sehr zweifelhaft, ob eine restlose Arithmetisierung der Idee des Kontinuums voll gerecht werden kann. Die Idee des Kontinuums ist${}_{a_2}\underline{,}{}_{a_2}$ jedenfalls ursprünglich${}_{a_2}\underline{,}{}_{a_2}$ eine geometrische Idee.

Der arithmetisierende Monismus in der Mathematik ist eine willkürliche These. Daß die mathematische Gegenständlichkeit lediglich aus der Zahl$_{d_1}$**en**$_{d_1}$vorstellung erwächst, ist keineswegs erwiesen. Vielmehr lassen sich vermutlich Begriffe wie diejenigen der stetigen Kurve und der Fläche, die ja insbesondere in der Topologie zur Entfaltung kommen, nicht auf die Zahlvorstellungen zurückführen. Dem steht nicht entgegen, daß wir natürlich trachten müssen, die Zahlvorstellungen möglichst weitgehend für das Studium geometrischer Gebilde fruchtbar zu machen, wie es ja in der Analysis geschieht.

Wenn wir die zuvor dargelegte Auffassung zugrunde legen, wonach die Mathematik die Wissenschaft von den idealisierten Strukturen ist, so haben wir damit für die Grundlagenforschung der Mathematik eine Haltung, welche uns vor übersteigerten Aporien und vor forcierten Konstruktionen bewahrt und welche auch nicht angefochten wird, wenn die Grundlagenforschung vieles Erstaunliche zutage bringt.

Bei dieser Auffassung müssen wir allerdings bereit sein, außer der Objektivität des Naturwirklichen noch Objektivität von anderer Art anzuerkennen. Für die Philosophie Gonseth$_{d_2}$'$_{d_2}$s bietet das keine Schwierigkeit. In dieser wird von vornherein dem Umstand Rechnung getragen, daß die Gesamtheit des uns Gegenständlichen in verschiedenartige „Horizonte“ zerfällt, die andererseits doch miteinander in Beziehungen treten, Beziehungen wie diejenige zwischen den konkreten und den idealisierten Strukturen.

Andererseits gibt uns diese Philosophie eine Alternative gegen|über der 66
aprioristischen Ansicht von der Mathematik, für welche es ein Paradoxon ist, daß die mathematischen Sachverhalte erst nach und nach, im Zuge der Forschung, sich herausstellen und die geeigneten Begriffe auch erst auf diesem Wege des Fortschreitens gefunden werden, wobei sich immer wieder ganz neue Konstellationen ergeben.

Die von Gonseth als generelle Methode proklamierte ouverture à l'expérience ist als Erfordernis nicht auf die Naturforschung beschränkt, sondern hat ihre Bedeutung gleichermaßen im Felde der *geistigen Erfahrung*.

Kapitel 27

Bernays Project: Text No. 28

Zum Symposium über die Grundlagen der Mathematik[1] (1971)

On a Symposium on the Foundations of Mathematics

(*Dialectica* 25, S. 171–195;
repr. in *Abhandlungen*, S. 189–213)

171/A189 | Zu dem in Band 23 der *Dialectica* eröffneten Symposium über die Grundlagen der Mathematik,[2] welches auf Herrn Gonseths Anregung von Erwin Engeler und mir in die Wege geleitet wurde und welches von Herrn Gonseth

[1]Eine Ankündigung des Symposiums brachte Herr Gonseths Editorial zu $_{a_2}$***Dialectica***$_{a_2}$ Band 22 $_{a_2}$**(1968) (siehe S. 91–95, insbesondere**$_{a_2}$ S. 95)

[2]$_{d_2}$***Dialectica* 23, 1,2 , 3/4 (1969); 24, 4 (1970)**$_{d_2 a_2}$**Verzeichnis der Abhandlungen** $_d$[$_{da}$($_a$**nachträgliche Hinzufügung [in den *Abhandlungen*]**$_d$]$_{da}$)$_a$**: *Dialectica*, Vol. 23 (1969)**

Heft 1: Abraham Robinson, „From a formalist's point of view" (*vide* [?]). – R. L. Goodstein, „Empiricism in mathematics" (*vide* [?]). – Erwin Engeler/Helmut Röhrl, „On the problem of foundations of category theory" (*vide* [?]). – Paul Finsler, „Über die Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese" (*vide* [?]).

Heft 2: Haskell B. Curry, „Modified basic functionality in combinatory logic" (*vide* [?]). – Georg Kreisel, „Two notes on the foundations of set-theory" (*vide* [?]).

im Editorial des Bandes 23 kurz eingeführt worden ist, seien zuerst einige erläuternde Ausführungen über die Problemsituation in den Grundlagen der Mathematik vorgebracht.

Seit den Diskussionen in den zwanziger Jahren unseres Jahrhunderts, in denen die Grundlagenfragen der Mathematik innerhalb der Philosophie besondere Aufmerksamkeit erregten, hat sich die Problematik der Grundlagen der Mathematik erheblich verändert. Die damalige Situation war ja gekennzeichnet durch die Gegenüberstellung der drei Richtungen, welche man – darin L. E. J. Brouwer folgend – als Logizismus, Intuitionismus, Formalismus$_{d_2}$;$_{d_2}$ bezeichnet hat. Es wurde der Eindruck erweckt, als ob diese drei Richtungen eine vollständige Alternative der in Betracht kommenden Stellungnahmen zu den Grundlagenfragen der Mathematik bildeten. In Wahrheit handelte es sich ja um | drei besondere Schulen, durch welche drei verschiedene Unter- A190
nehmungen hinsichtlich der Grundlegung der Mathematik vertreten wurden.

Die Gedanken, die für diese Unternehmungen richtunggebend waren, haben auch für die heutige Diskussion der Grundlagenfragen der Mathematik ihre Aktualität behalten. Auch ist von den Methoden und Ergebnissen, die im Rahmen dieser Unternehmungen gewonnen wurden, vieles von bleibender Bedeutung, so insbesondere: | 172

1. die Erkenntnis der Möglichkeit$_{d_1}$$\underline{\text{en}}$$_{d_1}$ der Formalisierung der mathematischen Theorien mittels der logischen Symbolik; das Umgehen mit dieser ist dem heutigen Mathematiker schon etwas Vertrautes,

2. die Verwertung der Formalisierung für eine metatheoretische Betrachtung. Die Anfänge einer solchen finden sich ja bereits in der aristotelischen Syllogistik; über deren sehr begrenzte Fragestellung führt die Untersuchung der mathematischen Beweismöglichkeiten weit hinaus,

3. die Gegenüberstellung einer konstruktiven, auf das Prozeßhafte gerichteten Behandlung der Mathematik als Ergänzung zu der klassischen Behandlungsweise, welche auf Seins-Beziehungen gerichtet ist.

In Hinsicht auf die Grundlagenprobleme der Mathematik hat jedoch keiner der ursprünglichen Ansätze die erstrebte Ausschließlichkeit erlangt, viel-

Heft 3–4: F. William Lawvere, „Adjointness in foundations" (*vide* [?]). *Dialectica*, Vol. 24 (1970)

Heft 4: Marian Boykan Pour-El, „A recursion-theoretic view of axiomatizable theories" (*vide* [?]). – Richard Montague, „Pragmatics and intensional logic" (*vide* [?]). – Eduard Wette, „Vom Unendlichen zum Endlichen" (*vide* [?]).$_{a_2}$

mehr hat die Entwicklung zu einer Kombination der verschiedenen Gesichtspunkte geführt, und andererseits mußten manche mit den Ansätzen verbundene Auffassungen fallengelassen werden.

Was zunächst die Formalisierung betrifft, so enthielt der Rahmen der formalisierten Mathematik, der in den *Principia Mathematica* aufgestellt war, unnötige Komplikationen und wurde auf Anregung von F. P. Ramsey durch das System der einfachen Stufentheorie ersetzt. Als ein anderes, stufenfreies Rahmensystem bestand übrigens vorher schon, allerdings zunächst nicht in formalisierter Gestalt, dasjenige der axiomatischen Mengenlehre von Zermelo. Dieses wurde dann auch in formalisierte Gestalt gebracht. Dazu bedurfte es freilich einer einschränkenden Präzisierung des von Zermelo in einem der Axiome benutzten Begriffes einer „definiten Eigenschaft“, wie sie etwa gleichzeitig von A. Fraenkel und Th. Skolem vollzogen wurde. Eine Art Vermittlung zwischen der Stufentheorie und den Systemen der axiomatischen Mengenlehre bilden die von W. V. Quine aufgestellten Systeme.

Für alle die strikt formalen Rahmensysteme der Mathematik erwies sich jedoch anhand der Ergebnisse von Kurt Gödel und Th. Skolem, daß sie nicht die gesamte Mathematik darzustellen vermögen. Und im Zusammen-
A191 hang damit zeigte sich, daß sogar schon bei der axiomatisch | behandelten Zahlentheorie für jedes strikt formalisierte Axiomensystem „Non-Standard-Modelle“ existieren, die nicht die intendierte Struktur der Zahlenreihe besitzen. In diesen Tatsachen macht sich geltend, daß gewisse Begriffe *nicht* einer voll adäquaten Formalisierung zugänglich sind, so insbesondere der Begriff der Endlichkeit (der endlichen Zahl) und der allgemeine Begriff eines
173 Prädikates. |

Was ferner den Gesichtspunkt der (durch die Formalisierung ermöglichten) metatheoretischen Betrachtung angeht, so wurde ja eine solche von Hilbert für die Mathematik („Metamathematik“) intendiert als ein Verfahren, um mit elementar-kombinatorischen Methoden die Widerspruchsfreiheit der klassischen Mathematik zu erweisen und damit der Kritik zu begegnen, welche von verschiedenen Seiten, insbesondere zuerst von Kronecker, gegen die Methoden der klassischen Mathematik gerichtet worden war. In dieser Beziehung zeigte sich, wiederum auf$_a$ $\underline{\text{G}}_a$rund der Ergebnisse von Gödel, daß man die Zielsetzung sehr abschwächen muß, insofern als man sich für die Widerspruchsfreiheitsbeweise nicht auf elementar-kombinatorische Methoden beschränken kann, vielmehr jedenfalls stärkere Mittel konstruktiver Mathematik verwenden muß. Wieviel hier erfordert wird, das ist bisher noch nicht restlos abgeklärt.$_{a_1}$

a_1

Diese Schwierigkeit betrifft freilich nur eine Art der metatheoretischen Untersuchungen. Solche sind ja, auch nach Hilberts Intentionen, nicht nur für Widerspruchsfreiheitsbeweise, sondern auch für die Behandlung von Fragen der Entscheidbarkeit und der Vollständigkeit von Bedeutung. Es braucht daher mit einer metatheoretischen Untersuchung mathematischer Theorien nicht notwendig eine Reduktion der üblichen Beweismethoden verbunden zu werden.

Auf eine Metamathematik mit Anwendung der üblichen (klassischen) Methoden wurde man zuerst durch den Gödelschen Vollständigkeitssatz geführt, durch welchen die Vollständigkeit der Regeln der gebräuchlichen Prädikatenlogik (Prädikatenlogik der ersten Stufe) erwiesen wurde, und an den sich etliche für die Mathematik sehr fruchtbare Überlegungen anschlossen.

Ein großes Gebiet metamathematischer Untersuchungen ohne methodische Beschränkung wurde ferner durch die in der Schule A. Tarski$_{d_2}$'$_{d_2}$s gepflegte Modelltheorie eröffnet, die dann noch zu einer Theorie der relationalen Systeme erweitert wurde. Bei diesen Untersuchungen werden mengentheoretische Begriffe stark herangezogen, insbesondere auch die der transfiniten Ordinal- und Kardinal-Zahlen, und zwar nicht nur für die Beweismethoden, sondern auch bei der Bestimmung der zu betrachtenden Gegenstände. So
untersucht man formale Sprachen, | welche Namen für unendlich viele Indi- A192
viduen enthalten, ja sogar für Individuen-Gesamtheiten von beliebig hoher transfiniter Kardinalzahl. Ferner werden auch unendlich lange Satzformeln betrachtet.

In dieser Art der mengentheoretisch betriebenen Metamathematik | kommt 174
unter anderem zum Ausdruck, daß der Anspruch des Brouwerschen Intuitionismus, die einzige berechtigte Art der Behandlung der Mathematik zu sein, im allgemeinen keine Anerkennung gefunden hat. Vielmehr wird zumeist die intuitionistische Mathematik neben der üblichen klassischen Mathematik als eine mögliche methodische Variante angesehen. Als solche wird sie auch metamathematisch untersucht, nachdem A. Heyting dem Bedürfnis nach einer genaueren Beschreibung der intuitionistischen Methoden durch Aufstellung eines formalen Systems der intuitionistischen Logik und Arithmetik Genüge leistete.

Anhand dieser von Heyting gegebenen Formalisierung ergab sich auch, daß der methodische Standpunkt des Intuitionismus nicht mit dem von Hilbert für die Beweistheorie intendierten finiten Standpunkt zusammenfällt,

wie man es vielfach geglaubt hatte, vielmehr über diesen hinausgeht. Insbesondere zeigte sich dieses daran, daß es gelang, für verschiedene formale Systeme Beweise der Widerspruchsfreiheit mit intuitionistisch zulässigen Methoden zu führen, für welche die finiten Methoden sich als nicht zulänglich erwiesen hatten. Dieser Unterschied in der Tragweite der Methoden beruht darauf, daß die vom Intuitionismus verwendeten Evidenzen nicht nur solche elementarer Anschaulichkeit sind, sondern abstrakte Begrifflichkeit in sich schließen. So wird von Brouwer der Allgemeinbegriff eines Beweises verwendet$_{d_1}$:$_{d_1 a_1}$;$_{a_1}$ und zwar handelt es sich dabei nicht um Beweise nach festen Deduktionsregeln, sondern um inhaltliche Beweise, also nicht um etwas anschaulich Abgegrenztes. Dieser allgemeine Begriff des Beweises wurde dann insbesonder$_{a_2}$e$_{a_2}$ für die Interpretationen des Heytingschen Formalismus angewendet, mittels deren sich (durch eine Umdeutung einiger der geläufigen logischen Operationen) ein sehr einfacher Widerspruchsfreiheitbeweis für den (klassischen) zahlentheoretischen Formalismus ergibt. Freilich geht man mit der Anwendung jenes Begriffes nicht nur über den finiten Standpunkt, sondern auch über die übliche Mathematik hinaus, welche den Begriff wohl zur heuristischen Überlegung, nicht aber systematisch verwendet. Für die Nachweise von Widerspruchsfreiheit kann man allerdings den Allgemeinbegriff des Beweises durch andere Begriffe der intuition$_d$is$_d$istischen Mathematik ersetzen, so einerseits durch den Brouwerschen Begriff einer Wahlfolge, d. h. einer unbegrenzten Folge sukzessiver Wertbestimmungen, andererseits – worauf
A193 Gödel aufmerk|sam gemacht hat –, durch den Begriff eines Funktionals, d. h. einer Funktion, welche ihrerseits Funktionen als Argumente hat.

Mit Hilfe des Begriffes der Wahlfolge läßt sich insbesondere die konstruk-
175 tive Verwendung transfiniter Ordnungszahlen begründen, | indem sich für gewisse elementar beschreibbare Bereiche solcher Ordnungszahlen zeigen läßt, daß jede absteigende Folge von Ordnungszahlen nach endlich vielen Schritten zum Abschluß kommt. – In der Anwendung des Begriffes „Funktional“ geht man auch zu höheren Stufen („Typen“) von Funktionalen über: Funktionale können ihrerseits wieder Argumente von Funktionalen eines höheren Typus sein.

So bieten sich verschiedene Methoden, durch die man den finiten Standpunkt für die beweistheoretischen Überlegungen erweitern kann.

In dem bisher Besprochenen ist eine Richtung der mathematischen Grundlagenforschung noch nicht zur Erwähnung gekommen. Nur beiläufig wurde anfangs gesagt, daß das System der *Principia Mathematica* unnötige Komplikationen enthielt, die dann durch das System der einfachen Stufentheorie beseitigt wurden. Die „Unnötigkeit“ bestand aber hier nur insofern, als eine mit der Anlage des Systems verbundene Zielsetzung, welche in der Gestaltung der „verzweigten Stufentheorie“ zum Ausdruck kam, ohnehin nicht eingehalten wurde, vielmehr durch die nachträgliche Hinzufügung eines „Axioms der Reduzierbarkeit“ im Effekt preisgegeben wurde.

Jene Zielsetzung geht zurück auf eine Kritik an dem Verfahren der Begründung der Analysis $_{a_2}$($_{a_2}$durch Dedekind, Cantor, Weierstraß$_{a_2}$)$_{a_2}$, wie sie von $_{a_2}$S$_{a_2}$eiten einiger französischer Mathematiker geübt wurde – eine Kritik, welche nicht so weit geht wie diejenige durch Kronecker und die spätere durch Brouwer, aber mit diesen beiden Arten der Kritik das gemeinsam hat, daß sie auf eine striktere Art der Arithmetisierung der Theorie des Kontinuums abzielt. Man beanstandet, daß in den Existenzbeweisen der Analysis öfters solche Definitionen („imprädikative Definitionen“) verwendet werden, bei denen Bezug genommen wird auf die Gesamtheit der reellen Zahlen, indem etwa eine Entscheidung danach getroffen wird, ob es eine reelle Zahl von einer gewissen Eigenschaft gibt oder nicht gibt, während doch im Sinne der Arithmetisierung die Gesamtheit der reellen Zahlen erst aus den möglichen arithmetischen Definitionen hervorgehen soll.

Eine präzisere Fassung der hiermit gestellten Forderung der Prädikativität wurde zuerst wohl von Bertrand Russel$_{a_2}$l$_{a_2}$ gegeben, der sie aber, wie gesagt, nicht konsequent beibehielt. Später kam Hermann Weyl in seiner Schrift *Das Kontinuum*[a] auf die Forderung zurück. Seitdem | wurde auf verschiedenen A194
Wegen eine prädikative Gestaltung der Analysis, bzw. der Mengenlehre$_{d_1}$,$_{d_1}$ unternommen, insbesondere von Leon Chwistek, Frederic B. Fitch, Paul Lorenzen, Hao Wang.[b] | 176

In der Stellungnahme zu der Forderung der Prädikativität besteht unter den Mathematikern und auch unter den Grundlagenforschern keine Einhelligkeit. Man kann aber hier eine ähnliche vermittelnde Haltung einnehmen, wie es – gemäß dem, was vorhin erwähnt wurde – gegenüber den Forderungen des Intuitionismus geschehen ist: man kann die Möglichkeit einer prädikativen Behandlung der Analysis, d. h. der Theorie der reellen Zahlen und der stetigen Funktionen von einer oder mehreren Variablen würdigen, zugleich aber anerkennen, daß die Mathematik über diese Methoden hinausgeht und daß es für die Untersuchungen in manchen Gebieten angezeigt ist, die Vorstel-

[a] *Vide* [**?**].
[b] *Vide* ■■■ .

lungen der allgemeinen Mengentheorie zu verwenden, daß insbesondere auch die Idee des Kontinuums nur auf diese Weise eine ausreichende theoretische Behandlung findet.

Zu der Situation in den mathematischen Grundlagenfragen ist vor nicht langem ein neues Moment hinzugetreten durch die Ergebnisse betreffend das Cantorsche Kontinuumsproblem, d. h. die Frage, ob die Kardinalzahl der Menge der Teilmengen der Zahlenreihe, welche zugleich die Kardinalzahl des Kontinuums ist, die nächstgrößere ist nach der Kardinalzahl der Menge der natürlichen Zahlen. Die Annahme, daß dieses zutrifft, heißt die Kontinuumshypothese.

Nachdem zuerst Gödel bewiesen hatte, daß die Kontinuumshypothese im Rahmen der axiomatischen Mengenlehre widerspruchsfrei ist (sofern diese selbst widerspruchsfrei ist), wurde neuerdings von P. Cohen gezeigt, daß durch die axiomatische Mengenlehre die Kardinalzahl des Kontinuums im Bereich der überabzählbaren Kardinalzahlen, bis auf gewisse bekannte Einschränkungen, völlig unbestimmt gelassen wird. Dabei handelt es sich freilich um die erwähnte enger gefaßte Form der axiomatischen Mengenlehre, welche deren strikte Formalisierung ermöglicht. Jedoch ist bei dem Kontinuumsproblem, wenigstens bisher, nicht ersichtlich, wie man durch Verzicht auf die verschärfte axiomatische Präzisierung die Möglichkeit einer Entscheidung über die Mächtigkeit des Kontinuums gewinnen kann.

Der hier angetroffene Sachverhalt ist von ähnlicher Art wie derjenige, welcher in der erwähnten Unvollkommenheit der formalisierten Axiomensysteme besteht, wie sie sich in der Existenz von Non-Standard-Modellen äußert.

A195 Die gegebene Beschreibung der Situation in der mathematischen | Grund-
lagenforschung kann gewiß nicht Anspruch auf Vollständigkeit der Aspekte
177 erheben; sie mag aber als Einleitung dienen zu den nun | folgenden Bemer-
kungen, die sich auf die verschiedenen Beiträge zu dem Symposium beziehen und welche teils als Erläuterungen gedacht sind, teils die philosophische Diskussion betreffen. Dabei werden sich auch Ergänzungen zu den vorausgehenden Ausführungen ergeben.

Die Reihe der Abhandlungen des Symposiums wurde eröffnet durch diejenige von Abraham Robinson „From a formalist's point of view"[c], worin eine

[c] *Vide* [**?**].

Ansicht vorgelegt wird, welche der Autor selbst nicht mit Bestimmtheit vertritt, aber mindestens zur Diskussion stellt. Die Ansicht besteht darin, daß es unendliche Gesamtheiten *nicht* gibt und daß jede Bezugnahme auf solche strenggenommen sinnlos ist, daß aber andrerseits dieses uns nicht hindern soll, die Mathematik in der klassischen Weise zu betreiben, bei der man von Begriffen des Unendlichen freien Gebrauch macht.

Diese Ansicht ist offensichtlich schon in sich problematisch; sie hat eher den Charakter einer Fragestellung als eines aufklärenden Aspektes. Indem wir uns um eine Klärung bemühen, ist zunächst zu bedenken, daß die Behauptung der Nichtexistenz unendlicher Gesamtheiten jedenfalls nur für die Naturwirklichkeit Geltung hat und daß aus ihrer Anerkennung keineswegs entnommen werden kann, daß die Vorstellung unendlicher Gesamtheiten – wie etwa derjenigen der Gitterpunkte einer (mit Koordinatenachsen und Einheitspunkt versehenen) Ebene – sinnlos ist.

Zuzugeben ist, daß wir keine eigentlich visuelle Vorstellung von unendlichen Gesamtheiten besitzen; aber eine solche besitzen wir auch schon nicht von sehr großzahligen Gesamtheiten, obwohl doch solche nach unserer Erfahrung in der Natur existieren. Die volle visuelle Vorstellbarkeit ist also gar nicht maßgebend für unsere Behauptungen und Annahmen von Existenz, auch im Sinne der Naturwirklichkeit. Andrerseits gibt es Arten eines *repräsentativen Vorstellens*, in welchem Begrifflichkeit und Anschauung vermischt sind und dessen Reichweite schwer abzugrenzen ist. Die Ansicht von der scharfen Trennung von Begriff und Anschauung in unserem Geistesleben, wie sie insbesondere in der Kantischen Philosophie behauptet wird, muß gewiß revidiert werden.

Durch das repräsentative Vorstellen ist insbesondere die Möglichkeit der Überschreitung des Endlichen gegeben. Der Mathematiker, welcher Überlegungen über Unendliches anstellt, denkt gewiß nicht nur in Worten. Insbesondere in der Analysis besitzt das mathematische Ver|fahren eine Art der A196
Anschaulichkeit und Sicherheit, wie sie durch ein bloß verbales Operieren nicht gewonnen werden kann. | 178

Wenn wir unserer geistigen Erfahrung gerecht werden wollen, so dürfen wir uns nicht mit einem allzu simplen Schema vom Vorstellbaren begnügen. Ebensowenig kommen wir aus mit der Anerkennung von nur einer Art des Objektiven. So sind ja von der Physik aus betrachtet die Sinnesqualitäten etwas bloß Subjektives. Gleichwohl ist eine Farbe als solche etwas objektiv Gegenständliches, und die Beziehungen zwischen den Farben bilden objektive Sachverhalte (von denen es nicht im vornherein ausgemacht ist, inwieweit und in welcher Weise ihnen physikalische oder physiologische Sachverhalte entsprechen). Auch Werke der Dichtkunst und der Musik sind etwas objektiv Gegenständliches, wobei diese Gegenständlichkeit nicht zusammenfällt mit derjenigen einer einzelnen Vorführung, die ja eventuell dem Werke unangemessen sein kann.

In Anbetracht all dessen besteht kein grundsätzliches Hindernis, den mathematischen Objekten eine Gegenständlichkeit sui generis zuzuerkennen. Die Gegenständlichkeit ist diejenige der idealisierten Strukturen, wobei die Idealisierung in einer Vermittlung zwischen Begriff und Anschauung besteht. Daß solche idealisierten Strukturen ihre Eigengesetzlichkeit besitzen, ist gewiß etwas sehr Merkwürdiges, aber doch kaum merkwürdiger als die Tatsache der eminenten Anwendung, welche die Mathematik in der Naturwissenschaft findet.

Der Anstoß, den viele Philosophen und Mathematiker an der Anerkennung einer spezifischen Objektivität der mathematischen Gegenstände, an diesem „Platonismus“ nehmen, beruht wohl größtenteils darauf, daß man sich jene Objektivität in zu weitgehendem Maße analog der Naturwirklichkeit denkt.

Daß die mathematischen Gegenstände und Sachverhalte einen grundsätzlich anderen Charakter haben als diejenigen der Naturwissenschaft, wird in dem Artikel von R. L. Goodstein, „Empiricism in Mathematics“[d] nachdrücklich dargelegt und ersichtlich gemacht.

Wenn andrerseits Goodstein, auf$_a$ $\underline{\text{G}}_a$rund der Verschiedenheit der mathematischen Gegenstände von denen der Naturwirklichkeit, die Mathematik schlechtweg als ein Spiel (game) erklärt, indem er insbesondere auf die Gemeinsamkeiten mit dem Schachspiel hinweist, so ist diese wohl an Wittgenstein anknüpfende Kennzeichnung der Mathematik doch schwerlich ausreichend. Die Gemeinsamkeit des Schachspiels und überhaupt der Brettspiele mit der Mathematik beruht ja nicht darauf, daß wir es hier mit Spielen zu tun haben, sondern $_{a_2}$**darauf**$_{a_2}$, daß diese Spiele auf$_a$ $\underline{\text{G}}_a$rund einerseits
A197 der Brett-Konfiguration, andrerseits der | Regeln für die Bewegung der Stei-
179 ne einen geometrischen und einen | arithmetischen Charakter besitzen. So knüpfen sich auch an solche Spiele, insbesondere an das Schachspiel, Feststellungen und Fragestellungen von durchaus mathematischer Art. Freilich kann man die Mathematik spielerisch betreiben; doch das ist nicht spezifisch für die

[d] *Vide* [**?**].

Mathematik; man kann sich ja auch mit anderen Wissenschaften spielerisch beschäftigen. (Momente des Spielerischen treten ja bei vielen der geistigen Betätigungen auf, bei denen der Mensch eine gewisse Freiheit besitzt.) Die Regeln für die mathematischen Verfahren sind aber nicht im Hinblick auf die Unterhaltsamkeit angelegt, sondern für die Kennzeichnung und das Studium ausgezeichneter (meist idealisierter) Strukturen. Das Aufstellen der Regeln gehört selbst mit zur Mathematik.

Speziell mit den Fragen der Mengenlehre befassen sich die Beiträge von Paul Finsler und von Georg Kreisel.

Finsler hebt in seiner Abhandlung „Über die Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese“[e] mit Nachdruck hervor, daß die von Paul Cohen und inzwischen noch auf andere Art von Dana Scott festgestellte Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese im Rahmen der axiomatischen Mengenlehre nur auf$_a$ G$_a$rund der axiomatischen Beschränkung des Begriffes der Teilmenge besteht, d. h. nicht für das Kontinuum (bzw. die Menge der Teilmengen der Zahlenreihe) im *ursprünglichen* Sinne. Finsler spricht in diesem Sinne von einem „formalen Kontinuum“, das nicht alle Eigenschaften des eigentlichen Kontinuums besitzt. Er führt ein Beispiel eines „Hyperkontinuums“ vor, das er ausgehend von der ersten und zweiten Cantorschen Zahlenklasse gewinnt und das mit dem Kontinuum viele Eigenschaften gemeinsam hat, von dem sich aber ziemlich leicht erweisen läßt, daß – im Gegensatz zur Kontinuumshypothese – seine Mächtigkeit nicht die nächste nach derjenigen des Abzählbaren ist. Dieses Beispiel soll zeigen, daß die Möglichkeit, ein „formales Kontinuum“ zu definieren, welches die Kontinuumshypothese nicht erfüllt, nichts Erstaunliches ist.

Freilich ist das Beispiel insofern nicht sehr überzeugend, als das konstruierte Hyperkontinuum sehr deutliche Abweichungen gegenüber dem Kontinuum der Analysis zeigt, während sich für das Kontinuum der axiomatischen Mengenlehre alle die Eigenschaften, die man üblicherweise (unabhängig von der mengentheoretischen Axiomatik) feststellt, beweisen lassen.

Kreisel setzt sich in seinen „Two notes on the foundations of set$_{d\text{-}da_a}$theory“[f] eingehend mit allen denen auseinander, welche sich entweder überhaupt ablehnend zur Mengentheorie stellen oder Einschränkungen | in den Regeln 180/A198
der Mengenbildung befürworten, insbesondere mit denjenigen, welche aus

[e] *Vide* [**?**].
[f] *Vide* [**?**].

den Schwierigkeiten betreffend die Kontinuumshypothese Einwände gegen die Mengenlehre oder Argumente für deren Beschränkung entnehmen. Die unbeschränkte Weitherzigkeit, die er dabei vertritt, ist bei ihm nicht etwa, wie bei manchen Mengentheoretikern, verbunden mit einer Geringschätzung der Gesichtspunkte des Konstruktiven. Vielmehr hat Kreisel sich ja selbst eingehend mit finiter und mit intuitionistischer Mathematik sowie auch mit deren genauerer Kennzeichnung befaßt. Um so mehr haben seine Überlegungen auch für diejenigen Gewicht, welche auf die Auszeichnung der konstruktiven Methoden Wert legen.

Zur Diskussion mag die einleitende kurze Darstellung der Anfänge der Mengenlehre Anlaß geben. Nach Kreisels Ansicht erschien den Zeitgenossen Cantors der Mengenbegriff in Anbetracht der sehr verschiedenen Arten seiner Anwendung (auf konkrete Objekte, auf Zahlen, auf geometrische Punkte) als ein Gemisch von Begriffen (mixture of notions). Aus dem Bestreben, einen schärfer bestimmten Allgemeinbegriff der Menge zu gewinnen, erfolgte, dieser Ansicht gemäß, nach einigen unbefriedigenden Ansätzen die Abgrenzung der *cumulative type structure*, womit die entscheidende Abklärung gewonnen wurde.

Freilich bemerkt Kreisel selbst in einer Fußnote, er fühle sich nicht kompetent in der Frage, wie man seinerzeit die Dinge beurteilte. Aus einer freilich gleichfalls nur unvollständigen Kenntnis der einschlägigen Hergänge sei hier doch einiges historisch Ergänzende vorgebracht.

Die Aussonderung der *cumulative type structure* – man spricht in diesem Sinne ja heute auch von *natural models* der Axiome der Mengenlehre – stand in engem Zusammenhang mit der Aufstellung des Fundierungsaxioms, durch welches in der Tat eine Art von Typenstruktur für das System der Mengen gefordert wird. Der Gedanke des Fundierungsaxioms wurde wohl zuerst von D. Mirimanoff gefaßt[3], der anknüpfend daran (ungefähr gleichzeitig mit Zermelo und von Neumann) die independente[4] Theorie der Ordnungszahlen fand.[g]

[3]Die inhaltliche Voraussetzung, die durch dieses Axiom zum Ausdruck kommt, ist freilich implizite bereits in der intuitiven Mengenvorstellung enthalten.

[4]„Independent“ bedeutet hier, daß die Ordnungszahlen nicht als Abstraktionsklassen von ordnungsgleichen Wohlordnungen eingeführt zu werden brauchen.

[g] *Vide* ■ ■ ■ .

Mirimanoff wurde zu seinen Betrachtungen durch die mengentheoreti-
schen Paradoxien angeregt. Diese gaben ja auch die Ver|anlassung für Zer- A199
melos Aufstellung seines Axiomensystems der Mengenlehre und für Russells Aufstellung seiner Typentheorie.

Der Gedanke der Beschränkung auf solche Mengen, die man, beginnend mit einer Ausgangsmenge (etwa der Menge der natürlichen Zahlen) durch
Potenzmengenbildungen, Vereinigungsprozesse und Aussonde|rungen bilden 181
kann, wurde – wie ich aus Erzählungen von Hilbert weiß – seinerzeit auch erwogen; er führte aber zunächst gerade zu einer Verschärfung der Paradoxien, da man die Vereinigungsprozesse nicht genügend deutlich normierte, vielmehr die Zusammenfassung der durch die angegebenen Prozesse gewinnbaren Mengen zu einer Menge $_{d_2}$**seiner**$_{d_2 a_2}$**ihrer**$_{a_2}$seits als einen zulässigen Vereinigungsprozeß ansah.

Daß man zuerst an der Verschiedenartigkeit der Anwendungen des Mengenbegriffes Anstoß genommen hätte – dazu war doch eigentlich kein Anlaß. Man erachtet doch auch den elementaren Anzahlbegriff, der ja gleichfalls sowohl auf konkrete Dinge wie auf arithmetische und geometrische Gegenstände Anwendung findet, deshalb nicht etwa als ein Gemisch von Begriffen.

Allerdings hat man auch bei der theoretischen Behandlung der Zahlenlehre die Betrachtung einer Struktur (der Zahlenreihe) abgesondert, die als solche rein für sich untersucht werden kann und an die sich dann erst die Anwendung für die Anzahlbestimmungen anschließt. Es ist aber zu beachten, daß die axiomatische Fassung der Zahlentheorie durch Dedekind und Peano, welche die Kennzeichnung der Struktur der Zahlenreihe liefert, erst in einem Stadium erfolgte, als die Zahlentheorie bereits weitgehend entwickelt war.

Entsprechend war ja auch die Mengenlehre schon in einem beträchtlichen Maße durch Cantor ausgebildet, als Zermelo sie axiomatisierte. Und auch mit dieser Axiomatik war die *cumulative type structure*, wie sie Kreisel meint, noch nicht herausgearbeitet. Bis zur Aufstellung des Fundierungsaxioms verging noch fast ein Jahrzehnt, und in diese Zeit fällt das Erscheinen des klassischen Werkes von Hausdorff *Grundzüge der Mengenlehre*[h], welches ja für die neuere Ausgestaltung der Mengenlehre und der mengentheoretischen Topologie wegleitend wurde. Hier aber ist die Mengenlehre ohne Verwendung einer Axiomatik entwickelt. Hausdorff erklärt selbst, er wolle in seiner Behandlung der Mengenlehre „den naiven Mengenbegriff zulassen, dabei aber

[h] *Vide* [**?**].

die Beschränkungen innehalten“, die den Weg zu den mengentheoretischen Paradoxien abschneiden.

Bemerkenswert ist, daß dieses Verfahren auch heute noch in der metho-
A200 disch nicht beschränkten Metamathematik, d. h. in der Modell|theorie, verwendet wird und auch von Zermelo in seiner modelltheoretischen Untersuchung „Über Grenzzahlen und Mengenbereiche“[i] benutzt wurde.

182 Daß wir einer solchen anschaulichen Handhabung der Mengenlehre | bedürfen, ist verständlich, sofern die Mengenlehre nicht nur eine gewisse Struktur repräsentieren, sondern auch die Methode unseres Denkens über Strukturen liefern soll.

$_{d_2}$**Rand**$_{d_2}$*Bemerkung* zu der „Discussion“ $_{d_2}$**Am Ende der Note 1**$_{d_2}$ (S. 101–102):[j]

Angesichts der Beispiele von eingeschränkter Methodik, welche Kreisel hier anführt, könnte mancher Leser denken, daß mit der vorgeschlagenen Konzentration auf ein *relatively restricted system* auch eine jener von Kreisel erwähnten Beschränkungen gemeint sei. Tatsächlich aber handelt es sich nur um eine Abgrenzung gegenüber gewissen Ansätzen von riesigen Unendlichkeiten, welche weit über das hinausführen, womit man üblichermaßen in den mathematischen Theorien zu tun hat$_{d_2};_{d_2 a_2}.{}_{a_2}$ Jene von Kreisel erwähnten eingeschränkten Theorien sind auch von ihm gewiß nur im Sinne einer methodischen Vergleichung angeführt.

Zwei der Abhandlungen aus dem Symposium handeln von der Theorie der „Kategorien“: diejenige von Erwin Engeler und Helmut Röhrl „On the problem of foundations of category theory“ und die von F. William Lawvere „Adjointness in foundations“.[k]

Lawvere ist einer der Ausgestalter der von Eilenberg und MacLane ins Leben gerufenen Theorie der „Kategorien“. Es handelt sich bei dieser um eine allgemeine Theorie der mathematischen Abbildungen.

Der Grundbegriff ist hier die Beziehung $A \xrightarrow{f} B$ d. h. „f bildet A in B ab“. A heißt der „domain“ (Vorbereich), B der „codomain“ (Nachbereich)

[i] *Vide* [?].
[j] ■ Zitat/Inhaltsangabe geben?■
[k] *Vide* [?], resp. [?]

von f.[5]

Die Grundverknüpfung ist die der Zusammensetzung von Abbildungen $fg = h$, welche immer dann möglich ist, wenn der codomain von f mit dem domain von g zusammenfällt; domain und codomain sind als strukturierte Mengen zu denken; jedoch wird die Elementbeziehung nicht als Grundbeziehung eingeführt. Man spricht schlechtweg von „Objekten“, zwischen denen eine Abbildung stattfindet.

Mit den genannten Begriffen, welche die Abbildungen betreffen, wird der Begriff der *Kategorie* verknüpft. Unter einer Kategorie versteht man hier eine Gattung von Strukturen, wie sie durch die Anforderungen eines abstrakten Axiomensystems bestimmt wird (d. h. die | Strukturen einer solchen Gattung A201
bilden die Modelle eines Axiomensystems). Die Abbildungen von einem Objekt einer Kategorie in ein anderes solches Objekt werden als „Morphismen“ bezeichnet. Es ist die Absicht, die Strukturen (Kategorien) durch die jeweils in ihnen bestehenden Morphismen zu charakterisieren.

Jedoch nicht alle Abbildungen sind Morphismen in einer Kategorie. | 183
Es gibt auch solche Abbildungen, die von einer Kategorie zu einer anderen führen. Dem wird Rechnung getragen, indem man außer den Morphismen auch „Funktoren“ betrachtet. Ein Funktor wird aufgefaßt als eine Abbildung einer Kategorie in eine Kategorie. Die Kategorien erhalten damit die Rolle von Objekten; sie werden angesehen als die Objekte einer „Kategorie der Kategorien“.

Damit gerät man jedoch in Schwierigkeiten; man wird in den Bereich solcher Begriffsbildungen geführt, wie sie zu den mengentheoretischen Paradoxien Anlaß geben. Das ist auch nicht zu verwundern. In der Tat ist ja eine Kategorie eine Gesamtheit nur im Sinne eines Begriffsumfanges, nicht aber eine mathematische Struktur. Es ist daher wohl auch kaum berechtigt, Kategorien als „Objekte“ zu behandeln.

In der Abhandlung von Engeler und Röhrl werden die genannten Schwierigkeiten zur Sprache gebracht, und es wird ein Vorschlag zu ihrer Behebung gemacht, der aber die Autoren selbst nur teilweise befriedigt.

Hier möchte ich einen anderen, wohl einfacheren Vorschlag (freilich nur programmatisch) vorbringen:

[5] Die Abbildung braucht nicht eine solche *auf* B zu sein. Der Nachbereich B braucht also nicht mit der Wertemenge von f übereinzustimmen.

1. Als gleichberechtigt mit den Morphismen innerhalb einer Kategorie werden die Abbildungen behandelt, welche zwischen Objekten verschiedener Kategorien stattfinden.

2. Die Funktoren werden ersetzt durch Abbildungen, bei welchen der domain innerhalb einer Kategorie *variabel* ist und welche (im Sinne dieser Variabilität) die Objekte jener Kategorie in solche wieder einer bestimmten Kategorie überführen.

Ein einfaches Beispiel einer Abbildung eines variablen Objektes bildet der Übergang von einer beliebigen Booleschen Algebra zu einem Ring nach der Methode von M. H. Stone.

Das intensive Studium der Abbildungen und der Formen ihrer Zusammensetzungen, wie es in der Theorie der Kategorien ausgeübt wird, hat sich für verschiedene Gebiete der mathematischen Forschung als höchst fruchtbar und erfolgreich erwiesen. Indem wir diese Erfolge würdigen, brauchen wir jedoch nicht der oft mit den Darstellungen der Theorie verbundenen Tendenz
A202 beizupflichten, den geläufigen Element|begriff aus der Mathematik zu eliminieren. Diese Tendenz macht sich in der Weise geltend, daß eine explizite Erwähnung der Elemente von Objekten sowie der Argumentwerte und der Funktionswerte von Morphismen, selbst nur in der Form gebundener Varia-
184 blen, geflissentlich vermieden wird. |

Eine Art von Elementbeziehung wird freilich eingeführt, indem ein spezielles Objekt „1“ postuliert wird von der Eigenschaft, daß für jedes Objekt A eine und nur eine Abbildung $A \to 1$ existiert, und nun als Elemente eines Objektes C die Abbildungen von 1 in C erklärt werden. Hiernach stellt sich der Wert, den eine Funktion (ein Morphismus) f mit dem domain C und einem codomain D für ein Element a von C (als Argumentwert) hat, durch die Zusammensetzung der Abbildung a von 1 in C mit der Abbildung f von C in D dar, welche ja eine Abbildung von 1 in D, also ein Element von D ergibt. In dieser Beziehung erscheint die Darstellung der Elemente durch Abbildungen als befriedigend. In anderer Hinsicht aber erweist sie sich als unzulänglich: Da ein Element a eines Objektes C als eine Abbildung in C erklärt ist, so wird durch ein solches Element a das Objekt C, als der codomain von a, eindeutig bestimmt; es können also nicht zwei verschiedene Objekte ein Element gemeinsam haben. So kommt die geläufige Struktur der Booleschen Algebra hier gar nicht zustande.

Als Motivierung für die Ausschaltung der üblichen Elementbeziehung wird zuweilen geltend gemacht, daß die Mathematik es nicht mit dem Substantiellen, sondern mit dem Strukturellen zu tun hat. Dieses Argument trifft als Aussage über die Mathematik sicherlich zu. Jedoch die Zugehörigkeit von Elementen zu einem gegenständlichen Ganzen, etwa von Punkten zu einer Punktmenge, ist doch eine strukturelle Beziehung.

Gewiß ist an sich nichts dagegen einzuwenden, daß man eine Theorie der Funktionalität entwickelt, in welcher die Elemente der abgebildeten „Objekte“ nur implicite auftreten. Das allgemeine Verfahren, das dabei zur Anwendung kommt, besteht ja darin, daß man Gegenständlichkeiten, die zunächst als solche der zweiten Stufe (Mengen, Funktionen) auftreten, zu den unmittelbaren Gegenständen einer Theorie macht, wie es ja bereits in der Booleschen Algebra geschieht.

Nur wird durch eine Theorie von dieser Art schwerlich die übliche mengentheoretische Betrachtungsweise für die Mathematik überhaupt entbehrlich gemacht.

Von einer ganz anderen Art einer Theorie der Funktionalität als derjeni-
gen in der Theorie der Kategorien handelt der Beitrag von | Haskell B. Curry A203
„Modified basic functionality in combinatory logic“.[1] Die von ihm aufge-
stellte typenfreie kombinatorische Logik steht in enger Beziehung zu dem
von Alonzo Church entwickelten λ-Kalkül und liefert einen Formalismus der
Darstellung konstruktiver Funktionalität durch | Zusammensetzungen gewis- 185
ser *atomic combinators*. Da der Wertbereich der Variablen, auf welche die Kombinatoren angewandt werden, zunächst ganz unbeschränkt ist, so stellen die Zusammensetzungen der Kombinatoren nicht ohne weiteres eine sinnvolle Funktionalität dar. Generell ergibt sich die Frage nach dem funktionalen Charakter der kombinatorischen Ausdrücke.

Die Funktionalitätseigenschaften kombinatorischer Ausbrüche sind in dem Lehrbuch der kombinatorischen Logik von Curry & Feys eingehend erörtert. Die vorliegende Abhandlung bringt zu den diesbezüglichen Ausführungen jenes Buches gewisse vereinfachende Modifikationen und gewisse Ergänzungen$_{d_2}$,$_{d_2}$ im Hinblick auf die neueren Anwendungen der Funktionale in der mathematischen Grundlagenforschung. Insbesondere beweist hier Curry einen Satz des folgenden Inhalts: Wenn für gewisse „atomische“ Kombinatoren der funktionale Charakter gegeben ist, so läßt sich für jeden aus diesen gebildeten kombinatorischen Ausdruck entscheiden, ob er einen funktionalen Charakter besitzt, und im positiven Falle läßt sich dieser Charakter bestimmen.

[1] *Vide* [**?**].

Seine generellen Ansichten über die Mathematik hat Curry anderwärts mehrfach auseinandergesetzt: in seiner Schrift *Outlines of a formalist philosophy of mathematics*, ferner in seinen Notre Dame Mathematical Lectures und in dem vorhin erwähnten Lehrbuch *Combinatory Logic.*[m]

Curry erklärt die Mathematik als die Wissenschaft von den formalen Systemen. Unter einem formalen System versteht er dabei eine formalisierte Theorie, für welche durch Festsetzungen bestimmt wird, wie die Sätze mit Hilfe von Prädikatoren aus Termen und die Terme aus primitiven Termen mittels Operatoren gebildet werden, und ferner, welche Sätze als „elementare Theoreme“ gelten. So wie die Terme aus den primitiven Termen rekursiv durch Anwendungen der Operatoren gewonnen werden, so werden die elementaren Theoreme rekursiv aus „Axiomen“ durch Anwendung von Ableitungsregeln gewonnen, wobei die Axiome gewisse schlechtweg als gültig postulierte Sätze sind. Die Feststellung der elementaren Theoreme als solcher rechnet Curry noch zu dem formalen System, im Unterschied von den weitergehenden Feststellungen über das System, den „$\varepsilon\pi\iota$-Theoremen“.

A204 Im ganzen unterscheiden sich diese Begriffsbildungen nicht erheblich | von denen der Hilbertschen Beweistheorie. Während aber diese als eine zusätzliche Unternehmung zu der vorhandenen Mathematik gedacht ist, stellen nach der Auffassung Curry$_{d_2}$'$_{d_2}$s die formalen Systeme überhaupt das
186 Thema der Mathematik dar. Es ist dabei nicht die Meinung, daß | man ein formales Gesamtsystem der Mathematik gewinnen könne. Vielmehr hebt Curry hervor, das Wesentliche der Mathematik liege nicht in einer speziellen Art formaler Systeme, sondern in formaler Struktur als solcher.

Mit dieser Formulierung kann man generell$_{d_2}$,$_{d_2}$ auch von einem nichtformalistischen Standpunkt einverstanden sein, sofern man unter formaler Struktur nicht nur die Strukturen formaler Systeme von der eben beschriebenen Art, sondern allgemein idealisierte Strukturen versteht. Strukturen sind es ja in der Tat, wovon die mathematischen Untersuchungen handeln.

Die Strukturen der formalen Systeme aber interessieren uns nur mittelbar. Diese Systeme dienen ja dazu, mathematische Theorien auf eine Form zu bringen, welche für die beweistheoretische Betrachtung geeignet ist.[6] Ma-

[6] Für die beweistheoretischen Betrachtungen sieht man sich übrigens veranlaßt – wie auch Curry erwähnt – unter Umständen den Rahmen des formalen Systems zu sprengen

---

[m] *Vide* [?], [?].

thematik aber ist doch gewiß nicht erst da vorhanden, wo diese Form der Theorien hergestellt ist.

Unter dem beweistheoretischen Aspekt allerdings können zumindest die meisten der mathematischen Theorien als Entfaltungen je eines formalen Systems dargestellt und betrachtet werden.

Gemeinsam ist den formalen Systemen ein zahlentheoretischer Charakter, der auf ihrem rekursiven Aufbau beruht. Dieser äußert sich insbesondere in der Anwendbarkeit des Gödelschen Numerierungsverfahrens, durch welches den Formeln einer formalisierten Theorie sowie auch den Formelfolgen natürliche Zahlen als ihre Nummern zugeordnet werden.[7] Dieses Verfahren enthält jeweils viele Momente willkürlicher Wahl, so daß verschiedene Numerierungen zu einem und demselben System gehören. Andererseits gibt es auch für eine und dieselbe mathematische Theorie verschiedene Formalisierungen, die durch | manchmal einfache, manchmal kompliziertere Übergänge A205
ineinander überführbar sind.

Man kann sich daher fragen, inwieweit sich für je zwei formale Systeme anhand der (nach einem gemeinsamen Verfahren ausgeführten) Gödelnumerierung erkennen läßt, ob sie die gleiche Theorie oder verschiedene zur formalen Darstellung bringen.

Eine Untersuchung in dieser Richtung wurde von John Myhill angestellt. Diese geht aus von der Kennzeichnung eines formalen Systems durch die Menge der Gödelnummern der beweisbaren Formeln. Myhill zeigt, daß für je zwei formale Systeme, welche beide eine gewisse Bedingung erfüllen, die auf ein Mindestmaß der Ausdrucksfähigkeit | hinauskommt, die kennzeichnen- 187
den Zahlenmengen sich mittels eines effektiven Rechenverfahrens, welches eine Permutation der Zahlenreihe liefert, umkehrbar eindeutig aufeinander abbilden lassen.

Sieht man nun daraufhin je zwei formale Systeme, welche die genannte Bedingung erfüllen, als gleichberechtigt an, so ergibt sich etwas Paradoxes: Unter den Systemen, welche jener Bedingung genügen, sind einerseits sehr

und zu „halbformalen“ Systemen überzugehen.

[7]Beiläufig sei darauf hingewiesen, daß die allgemeinere Methode der Gödel-Numerierung, wie sie in den *Grundlagen der Mathematik* (*vide* [**?**], pp. ■) angewendet wird, der allgemeinen Art der formalen Systeme bei Curry entspricht, während die übliche speziellere Methode, welche sich auf die Aufeinanderfolge der Zeichen in einer Formel stützt, jener Art formaler Systeme angepaßt ist, welche Curry als „logistische Systeme“ bezeichnet.

elementare zahlentheoretische Systeme, für welche sich in finiter Weise die Widerspruchsfreiheit erkennen läßt, andererseits aber auch die viel stärkeren formalen Systeme der Analysis und der Mengenlehre, so wahr diese widerspruchsfrei sind.

Dieses Ergebnis ist gewiß so zu deuten, daß die effektive umkehrbar eindeutige Abbildbarkeit der Mengen der Gödelnummern der beweisbaren Formeln für zwei formale Systeme nicht als hinlängliches Kriterium der Gleichberechtigung dieser Systeme gelten kann, und es fragt sich, wie wohl eine Verschärfung der Anforderung an die umkehrbar eindeutige Abbildung zu wählen ist, damit dadurch ein angemessenes Kriterium der Gleichberechtigung formaler Systeme gewonnen wird.

Diese Frage wird von Frau Marian Boykan Pour-El in ihrem Beitrag zu dem Symposium „A recursion-theoretic view of axiomatizable theories“[n] behandelt, worin sie einen Bericht gibt über neuere Untersuchungen betreffend die Beziehungen zwischen „rekursiv aufzählbaren“ (d. h. durch Kombination von elementaren Prozessen erzeugbaren) Zahlenmengen und formalisierten Theorien.

In einer gemeinsam von Frau Pour-El und Saul A. Kripke verfaßten Abhandlung wurde die Kennzeichnung solcher effektiver Abbildungen zwischen formalen Systemen angestrebt, welche die Beweisstruktur erhalten. Als ei-
A206 ne Bedingung für diese Erhaltung wird hier zunächst | gefordert, daß nicht nur die Beweisbarkeit, sondern auch Implikation und Negation erhalten bleiben. Es zeigt sich aber, daß diese Forderung noch nicht genügt, um mittels der Abbildungen eine angemessene Charakterisierung der Gleichberechtigung formaler Systeme zu erhalten. Es bleibt also hier noch eine Problematik bestehen. Einige genauere Problemstellungen in dieser Hinsicht werden von Frau Pour-El formuliert.

Der Beitrag von Richard Montague führt uns in das Gebiet der Semantik. Unter Semantik versteht man in der mathematischen Grundlagenforschung
188 und auch in der Schule des logischen Empirismus die | Untersuchungen, welche sich auf die Interpretationen von Formelsprachen beziehen, wie diese für die Formalisierung axiomatisch-deduktiver Systeme verwendet werden. Dabei erfolgen die Interpretationen mittels der mengentheoretischen Begriffs-

[n] *Vide* [**?**].

bildungen.

Im Falle einer formalen Sprache der ersten Stufe, mit nur einer Gattung von Individuenvariablen und von Individuenkonstanten und ohne Symbole mathematischer Funktionen, geschieht die Interpretation so, daß man einen Bereich (eine Menge) von Individuen zu$_a$ $\underline{\text{G}}_a$runde legt, ferner jeder Individuenkonstanten je ein Element des Individuenbereiches und jedem Prädikatensymbol mit einer Anzahl k von Argumenten je eine Menge geordneter k-tupel von Elementen des Individuenbereiches zuordnet. Ein k-stelliges Prädikaten-Symbol wird nun interpretiert durch ein k-stelliges Prädikat, welches auf ein k-tupel von Elementen des Individuenbereiches dann und nur dann zutrifft, wenn dieses der Menge von k-tupeln angehört, welche dem Symbol zugeordnet ist.

Auf$_a$ $\underline{\text{G}}_a$rund hiervon können nun die Begriffe der Erfüllung und der Erfüllbarkeit einer Formel im Sinne der üblichen Deutung der logischen Zeichen &, $\vee$, $\neg$, $\bigwedge x$, $\bigvee x$ (und, oder, nicht, für alle x, es gibt ein x so daß) rekursiv definiert werden:

Bei einer Primformel, d. h. einer Formel ohne logische Zeichen, die somit bloß aus einem Prädikatensymbol mit k Argumenten besteht, welche entweder Variablen oder Konstanten sind, versteht man unter einer *Erfüllung* eine Ersetzung der (als Argumente auftretenden) freien Individuenvariablen durch je ein Element des Individuenbereiches, derart, daß diese Elemente zusammen mit denen, welche den (als Argumente auftretenden) Individuenkonstanten zugeordnet sind, ein k-tupel ergeben, welches der Menge von k-tupeln angehört, die dem Prädikatensymbol zugeordnet ist. Man spricht auch dann von Erfüllung der Primformel, wenn alle k Argumente Konstanten sind, deren zu|geordnete Elemente ein k-tupel ergeben, welches der dem A207
Pradikatensymbol zugeordneten Menge angehört.

Eine Erfüllung einer Konjunktion A & B von Formeln A, B besteht aus einer Erfüllung von A und einer Erfüllung von B, bei welchen die gemeinsam in A und B auftretenden Individuenvariablen die gleiche Ersetzung erhalten.

Die Negation $\neg A$ von einer Formel A wird erfüllt durch eine Ersetzung der freien Variablen, bzw. (wenn keine solche vorhanden sind) ohne Ersetzung, dann und nur dann, wenn die Formel A durch die$_{a_2 - a_2}$Ersetzung, bzw. ohnehin, nicht erfüllt ist. | 189

Eine Erfüllung einer Formel $\bigvee x A(x)$ („es gibt ein x, so daß $A(x)$“) besteht in einer Erfüllung einer Formel $A(b)$, wobei b eine beliebige nicht in $A(x)$ auftretende freie Individuenvariable ist.

Hiermit ist Erfüllung bereits für beliebige Formeln erklärt, da sich die logischen Verknüpfungen $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, sowie die Allheit durch Konjunktion, Negation und den Existenzoperator $\bigvee$ ausdrücken lassen.

Eine Formel heißt *erfüllbar*, wenn es für sie eine Erfüllung gibt.

Für eine Formel ohne freie Variablen kommen bei gegebener Interpretation der Formelsprache nur die Möglichkeiten in Betracht, daß sie (ohnehin) erfüllt ist oder daß ihre Negation erfüllt ist; je nachdem heißt sie „wahr" (zutreffend) oder „falsch" (unzutreffend).

Alle diese Begriffe sind bezogen auf die verwendete Interpretation, d. h. auf den zu$_a$_G$_a$grunde$_{a_a}$gelegten Individuenbereich und die gewählten Zuordnungen.

In der Semantik wird aber auch ein erweiterter Begriff der Erfüllbarkeit gebraucht, bei welchem die Prädikat$_{a_2}$**s**$_{a_2}$zeichen als Variablen behandelt werden. Die Interpretation wird dann als wählbar genommen, und man erklärt eine Formel als erfüllbar, wenn sie bei geeigneter Interpretation erfüllbar (im vorherigen engeren Sinne) ist.

Man kann nun von diesen Begriffen mannigfaltige Anwendungen machen. Zunächst läßt sich feststellen, daß man aus zutreffenden Formeln durch Anwendungen der Regeln des Logik-Kalküls stets wieder zutreffende Formeln erhält, und zwar gilt dieses für jede Interpretation. Insbesondere folgt hiernach, daß jede beweisbare Formel des Logik-Kalküls (der ersten Stufe) bei jeder der betrachteten Interpretationen zutreffend ist. Daß auch umgekehrt, im Rahmen der Logik der ersten Stufe, jede Formel von dieser Eigenschaft durch den logischen Kalkül beweisbar ist, wird durch den Gödelschen Vollständigkeitssatz ausgesagt.

Man betrachtet ferner die im Rahmen der ersten Stufe formalisierten
A208 | Axiomensysteme. Für ein solches bilden diejenigen Interpretationen, für welche die Axiome sowie gegebenenfalls die gemäß den Axiomenschematen gebildeten Formeln wahre Formeln sind, die „Modelle". Die gültigen Sätze der formalisierten Theorie sind diejenigen, die sich durch Formeln darstellen, welche für jedes Modell des Axiomensystems zutreffend sind. Daß jede Formel für einen (in diesem Sinne) gültigen Satz aus den formalisierten Axiomen mittels des Logik-Kalküls herleitbar ist, ergibt sich wiederum aus dem Vollständigkeitssatz. Mit anderen Worten besagt dieses, daß jeder durch eine
190 Formel der formalisierten | Theorie darstellbare, aber nicht aus den Axiomen ableitbare Satz durch ein Modell widerlegt werden kann, für welches die ihn darstellende Formel unzutreffend ist.

Alle diese Sachverhalte erhalten erst mittels der eingeführten semantischen Begriffe ihre genaue Formulierung. Obwohl diese Begriffe sich auf die Logik der ersten Stufe beziehen, führt ihre Definition und Anwendung doch über die erste Stufe hinaus; insbesondere ist der erweiterte Begriff der Erfüllbarkeit einer Formel ein Begriff der Logik der zweiten Stufe.

Die besprochenen Überlegungen der Semantik betreffen alle die extensionale Logik, mit der man ja für die mathematischen Beweisführungen auskommt. In seiner Abhandlung „Pragmatics and Intensional Logic“[o] geht nun Richard Montague darauf aus$_{d_2;d_2}$ zu zeigen, daß die Methoden der Semantik sich auch auf solche formalisierten Sprachen anwenden lassen, welche über die extensionale Logik hinausführen und daß insbesondere auch die Begriffe der Erfüllung einer Formel und der des Zutreffens sich für solche formalisierte Sprachen definieren lassen.

Montague behandelt verschiedene formale Sprachen, die er teils als pragmatische, teils als intensionale bezeichnet.

Die pragmatischen Sprachen werden charakterisiert durch das Vorkommen solcher Ausdrucksmittel, deren Interpretation die Kenntnis von Bezugs-Daten *(points of reference*, nach der Bezeichnung von Dana Scott) erfordert.

Solche Ausdrucksmittel sind insbesondere Zeitbestimmungen, z. B. durch das Wort „jetzt“ oder durch eine Zeitform der Konjugation. Unter intensionalen Sprachen werden solche verstanden, in denen Ausdrücke für Modalitäten oder für Stellungnahmen von Personen zu Behauptungen, wie „B ist der Ansicht, daß … “, auftreten.

Die Methode der Interpretation ist für pragmatische und intensionale Sprachen eine gemeinsame: Es wird eine Parametermenge zu$_a$ G$_a$runde gelegt; jeder Wert des Parameters bestimmt, je nach der Art der Sprache, | A209
ein Bezugsdatum oder eine „mögliche Welt“, und jede Interpretation erfolgt in Abhängigkeit von dem Wert des Parameters. Hierfür wird insbesondere jedem Parameterwert eine Menge von Individuen zugeordnet.

Die Durchführung dieses Ansatzes zur Definition der semantischen Begriffe wird für die betrachteten formalen Sprachen genau beschrieben.

Freilich mag es scheinen, daß die Anwendung dieses Verfahrens | für den 191
wissenschaftlichen Gebrauch manche Problematik hat. Pragmatische Sprachen werden doch in der Wissenschaft vor allem für empirische Forschungen

[o] *Vide* [**?**].

verwendet, für welche die Behandlung in der Art einer formalisierten axiomatischen Theorie im allgemeinen nicht angemessen ist. Insbesondere erscheint es als sehr gezwungen, daß jedem Zeitpunkt ein Individuenbereich zugeordnet $_{d_1}\mathbf{ist}_{d_1 a_1}\mathbf{wird}_{a_1}$. Erst recht erscheint eine solche Zuordnung in $_a\underline{\mathrm{B}}_a$ezug auf mögliche Welten als fragwürdig. Wir wissen ja nicht einmal, ob bei der wirklichen Welt in einer bestimmten Weise von einer Gesamtheit der Individuen gesprochen werden kann. So kann wohl die von Montague beschriebene Methode der erweiterten Semantik nur für gewisse Arten von Überlegungen Verwendung finden, bei denen man mit sehr starken Schematisierungen auskommt.

Leider können diese Fragen mit dem Autor selbst nicht mehr diskutiert werden, da er nicht mehr am Leben ist. Doch hat er in seinem Artikel verschiedene Fachgenossen genannt, mit denen er die Fragen besprochen hat.

Eine extreme Ansicht wird von Eduard Wette in seiner Abhandlung „Vom Unendlichen zum Endlichem“[p] vertreten. Er behauptet hier, daß es möglich sein sollte, Formalismen der klassischen Mathematik und sogar solche der Zahlentheorie als widerspruchsvoll zu erweisen. Er hat diesen Gedanken weiter verfolgt und in verschiedenen Abhandlungen und Vorträgen von seinen Überlegungen berichtet.

Die Widersprüche, zu denen er gelangt, sind freilich nicht von der Art der bekannten mengentheoretischen Paradoxien, die sich ja verhältnismäßig leicht, manche sogar ganz populär darstellen lassen. Die Beweise, um die es sich bei Wette handelt, sind höchst kompliziert, sie werden von ihm nur beschrieben, nicht eigentlich vorgeführt. Diese Beschreibung gibt keine
A210 hinlängliche Handhabe für eine genaue Prüfung.[1*] | Und obwohl die Ausführungen Wettes einen starken Eindruck geben von seiner intensiven Gedankenarbeit, seiner Beschlagenheit in grundlagentheoretischen Techniken und seiner Sorgfalt in den Einzelheiten, so ist doch bei den sehr umfänglichen Überlegungen die Möglichkeit eines Versehens nicht auszuschließen. Verdächtig ist in dieser Beziehung, daß es bei dem Widerspruch in der axiomatischen Mengenlehre nicht sein Bewenden hat, daß vielmehr Wette durch die Verfol-

[1*] Eher schon könnte eine Prüfung ansetzen bei der inzwischen erschienenen Abhandlung „Contradiction within pure number theory because of a system-internal ‚consistency‘-deduction“ [**?**].

---

[p] *Vide* [**?**].

gung seiner Gedankengänge dazu geführt wird, auch die Analysis und sogar die Zahlentheorie, wie schon erwähnt, als widerspruchsvoll zu erklären.

Mit der Analysis und der Zahlentheorie kommen wir auf Gebiete, | in 192
denen unsere geistige Erfahrung uns ein hinlängliches Vertrauen verschafft hat.

Man kann freilich geltend machen, daß die Voraussetzungen, die in den Formalisierungen der klassischen Analysis implizite enthalten sind, in den tatsächlichen Beweisen der Theorien nur zum kleineren Teil zur Verwendung kommen und daß formal engere Abgrenzungen möglich sind, welche für die Beweisführungen der vorhandenen Theorien ausreichen, so daß unser durch geistige Erfahrung erlangtes Vertrauen sich eigentlich gar nicht auf die volle Formalisierung der Analysis bezieht. Vorschläge$_{d_2,d_2}$ für derartige engere Abgrenzungen sind von P. Lorenzen und G. Kreisel gemacht worden. Nach den Behauptungen Wettes würden aber auch solche Abgrenzungen nicht genügen, um das Auftreten von Widersprüchen auszuschließen.

Daß diese extremen Konsequenzen der Überlegungen Wettes ihm selber diese nicht verdächtig machen, erklärt sich dadurch, daß er in diesen Ergebnissen eine Bestätigung seiner philosophischen Ansichten erblickt, auf$_a$ G$_a$rund deren er gegen die üblichen Methoden der Mathematik, insbesondere gegen die Anwendung indirekter Schlußweisen und gegen das Operieren mit dem Unendlichen$_{a_2,a_2}$ opponiert.

In der Opposition, welche Wette im Namen eines strikten Finitismus gegen die indirekten Schlüsse richtet, geht er über Hilberts finiten Standpunkt und erst recht über den Brouwerschen Intuitionismus hinaus. Vom finiten Standpunkt und ebenso von Brouwer werden indirekte Schlüsse nur da beanstandet, wo sie zur Begründung positiver Behauptungen (Existenzbehauptungen) dienen sollen, nicht aber als Mittel für Unmöglichkeitsbeweise oder überhaupt zur Widerlegung von Annahmen. Wette sieht aber auch eine solche Anwendung indirekter Schlüsse als „problematisch“ an, wie er das gleich am Anfang seiner Abhandlung „Vom Unendlichen zum Endlichem“ in einer Auseinandersetzung mit dem Gödelschen Unableitbarkeitssatz zum
Ausdruck bringt. | A211

An manchen Stellen klingt es so, als ob er meine, mit seinen Überlegungen in Gegensatz zu diesem Theorem gelangt zu sein.[8]

[8]Vgl. die Bemerkungen $_{a_2}$**in *Dialectica* 24, 4**$_{a_2}$ auf S. 315, Zeile 14–16 und S. 316, Zeile 22–24. ■ seitens der Hrsg. anführen?■

Tatsächlich ist aber der Gödelsche Beweis seines Unableitbarkeitstheorems gar kein indirekter.[9] Es wird ein Verfahren angegeben, um für ein formales System F, das gewisse Vorbedingungen erfüllt, aus einem vorgelegten, in F selbst geführten Beweis der Widerspruchsfreiheit von F einen Widerspruch in F herzuleiten. Die dabei von F zu erfüllenden Vorbedingungen sind solche der Ausdrucksfähigkeit, der deduktiven Stärke und des strikt formalen Charakters. Dagegen wird zunächst nicht die Voraussetzung benutzt,
193 daß das System F widerspruchsfrei sei. | Erst durch eine nachträgliche Kontraposition folgert man, daß im Falle der Widerspruchsfreiheit des Systems F kein im Rahmen von F vollziehbarer Beweis der Widerspruchsfreiheit von F vorgelegt werden kann.

Doch schon ohne Anwendung dieser Kontraposition erhält man das Resultat; wenn ein formales System F den erwähnten Vorbedingungen genügt, so gewinnt man aus einem in F selbst geführten Widerspruchsfreiheitsbeweis in F die Herleitung eines Widerspruchs in F.

Gerade auf diesem Prinzip beruhen nun die Beweisführungen, mit denen Wette behauptet, die Widersprüchlichkeit der formalen Systeme der klassischen Mathematik zeigen zu können. Aus diesen Beweisführungen kann sich daher jedenfalls keine Unstimmigkeit mit dem Unableitbarkeitssatz ergeben. Auch dürfte auf diesem Wege schwerlich die Ablehnung der indirekten Schlüsse zu begründen sein.

Was andererseits Wettes Kritik an dem Operieren mit dem Unendlichen betrifft, so argumentiert er hier unter Berufung auf die Formalisierbarkeit der mathematischen Theorien und die Endlichkeit der symbolischen Formeln. In einem neueren Vortrag „On new paradoxes in formalized mathematics“ (Madison, Wisconsin, 1970)[q] sagt er: *“Is it not a magnificent joke of history that our symbolism tries* bona fide *to express each theorem on mathematical infinities and logical generalizations in the form of a string which is finite as well as particular?“*$_{d_2}$**Zwei Freizeilen**$_{d_2}$

Auf diese Frage läßt sich entgegnen, daß die einzelne Satzformel, welche die Aussage eines Theorems formalisiert, nicht für sich isoliert dieses leistet, sondern im Rahmen des jeweiligen formalen Systems, d. h. in Verbindung mit
A212 den Ausgangsformeln des Systems und seinen | Deduktionsregeln. Auf diese

[9] Indirekt nennt man einen Beweis, bei dem eine Annahme eingeführt wird, die sich anhand des Beweises als unzutreffend herausstellt.

---

[q] *Vide* [**?**].

Weise entspricht einer jeden Formel des Systems ihre „Folgerungsmenge“, d. i. die unbegrenzte Menge der aus ihr ableitbaren Formeln. Es kommt hierin die zahlentheoretische Struktur der formalen Systeme zur Geltung, die ja in der Anwendbarkeit des Gödelschen Numerierungsverfahrens ihren deutlichen Ausdruck findet.${}_{a_2}$

a_2

Man mag sich grundsätzlich fragen, warum wir uns in der Mathematik, wenigstens in der Arithmetik, nicht auf einen endlichen Rahmen beschränken. Hierauf ist die Antwort, daß das Unendliche in wesentlicher Beziehung einfacher ist als das vielzahlige Endliche. Ein Kreis ist viel einfacher zu kennzeichnen als ein approximierendes eingeschriebenes Polygon mit vielen Ecken. Eine Zahlentheorie in einem beschränkten Zahlenbereich erfordert etliche Komplikationen. Überdies: Wie | sollte die Abgrenzung des Bereiches 194
getroffen werden? Lassen wir sie beliebig, dann benutzen wir bereits wieder eine allgemeine Zahlenvariable als Parameter für die möglichen Abgrenzungen.

Nehmen wir aber eine bestimmte Abgrenzung, so ist deren Wahl mit einer unzuträglichen Willkür behaftet. Auch vom Standpunkt der Anwendungen ist das Verfahren problematisch: Wohl finden wir in der Physik Beschränkungen in den Größenordnungen, aber keine scharfe Grenze. Und wissen wir denn überhaupt, ob unsere heutige theoretische Physik alle möglichen Anwendungen der Mathematik umfaßt? Die Wissenschaft ist doch bei weitem nicht an einem Ende angelangt! Beiläufig: Endliche Geometrien (Geometrien mit nur endlich vielen Punkten), für welche die Euklidische Geometrie als Näherung gelten kann, hat man konstruiert.[10,r]

Eine Fragestellung, sozusagen in entgegengesetzter Richtung, ist diejenige, ob die zahlentheoretische Struktur der formalen Systeme bei der Formalisierung der Analysis und der Mengenlehre nicht in einem Mißverhältnis steht zu dem Auftreten der überabzählbaren Mengen in diesen Theorien${}_{d_2}\underline{,}{}_{d_2}$ und ob dieses Mißverhältnis nicht schuld ist an den Schwierigkeiten, die sich in den früher erwähnten Feststellungen über die Existenz von ${}_{d_2}\underline{\text{n}}_{d_2 a_2}\underline{\text{N}}_{a_2}$on-${}_{d_2}\underline{\text{s}}_{d_2 a_2}\underline{\text{S}}_{a_2}$tandard${}_{a_2}\underline{\text{-}}_{a_2}$Modellen der formalisierten Theorien sowie über die formale Unentscheidbarkeit der Kontinuumshypothese zeigen.

[10]Derartige Geometrien sind von G. Järnefelt, P. Kustaanheimo und B. Qvist betrachtet worden.

---

[r] *Vide* [redacted]).

In der neueren Grundlagenforschung sucht man jenem Mißverhältnis zu begegnen, indem man in den formalen Systemen einerseits unendliche Aus-
A213 drücke (nach Analogie der unendlichen Summen und Produkte | in der Analysis), andererseits überabzählbar viele Konstanten zuläßt. Ob auf diesem Wege die genannten Schwierigkeiten überwunden werden können, ist wohl zu bezweifeln. Jene Schwierigkeiten dürften vielmehr der Ausdruck dafür sein, daß die Mathematik in der Potentialität ihrer Begriffsbildungen durch kein formales System erschöpft wird – so wie ja schon an einer früheren Stelle bemerkt wurde, daß die axiomatische Mengenlehre nicht die anschauliche Handhabung der mengentheoretischen Vorstellungen als Methode unseres Denkens über Strukturen voll ersetzen kann.

Kapitel 28

Bernays Project: Text No. 29

Vorwort[†]
(1974)

Preface

(*Abhandlungen*, S. vii–x)

Avii | Von der Wissenschaftlichen Buchgesellschaft wurde mir das freundliche Anerbieten gemacht, meine in Zeitschriften veröffentlichten Aufsätze zur Philosophie der Mathematik gemeinsam in einem Sammelband zu publizieren. Gern nehme ich diesen Vorschlag an, zumal da mehrere der in Betracht kommenden Abhandlungen nur schwer zugänglich sind.

Der vorliegende Sammelband kann auch als vorläufiger Ersatz für eine zusammenfassende Behandlung der Philosophie der Mathematik[1] dienen, insbesondere, da meine Ansichten über die einschlägigen Fragen in dem Zeitraum, in welchen die in den Band aufgenommenen Publikationen fallen, sich fast nur insoweit gewandelt haben, als es durch die in der mathematischen Grundlagenforschung gewonnenen neuen Einsichten bedingt wurde.

[†]The last line reads:
Zürich, im Dezember 1974 Paul Bernays

[1]Eine solche schon seit längerem beabsichtigte (aber vorerst noch ausstehende) Monographie soll bei dem Verlag Duncker & Humblot erscheinen.

Aus der Vereinigung der verschiedenen Abhandlungen dürfte sich für den Leser eine hinlängliche Kennzeichnung der vertretenen Ansichten über die Mathematik ergeben.

Insbesondere in Hinsicht auf das, was man die „Grundlagenkrisis“ der Mathematik genannt hat, wird es – wie ich hoffe – ersichtlich sein, daß nach meiner Auffassung hier berechtigterweise nicht von Krisis in dem Sinne gesprochen werden kann, als ob die klassische Mathematik als fragwürdig erwiesen worden sei. Problematisches hat sich freilich in verschiedener Richtung ergeben.

Zunächst einmal ist man sich bewußt geworden, daß die Vorstellung von der Selbstverständlichkeit der Mathematik nicht berechtigt ist, sofern wir nicht unter dem Selbstverständlichen bloß das verstehen, was uns durch Gebrauch und Übung vertraut geworden ist. Eine solche Vertrautheit können auch Vorstellungen erlangen, die an sich nicht trivial sind, und wir können im Gebrauch solcher Vorstellungen praktische Sicherheit gewinnen. Die Idee einer absoluten Sicherheit ist vermutlich für das menschliche Denken überhaupt illusorisch.

Das Hinausgehen über das Triviale findet sich insbesondere bei all | den Aviii
Idealisierungen, die für die mathematische Begriffsbildung charakteristisch sind. Man ist sich darüber klargeworden, daß bereits der Allgemeinbegriff der natürlichen Zahl und der daran sich knüpfende Begriff der Zahlenreihe auf einer Idealisierung beruht.

Hier macht sich auch bereits eine Opposition geltend, welche eine Einschränkung der Beweismethoden verlangt. So wird in der eingeschränkten Methodik des Brouwerschen „Intuitionismus“ sowie bei derjenigen des „finiten“ Standpunktes, wie ihn Hilbert nannte, die Schlußweise vermieden, wonach ein Zahlenprädikat entweder auf alle Zahlen zutrifft, oder sonst mindestens eine Zahl existiert, auf die es nicht zutrifft. Erst recht wird hier diese Art der Anwendung des „tertium non datur“ vermieden in $_a\underline{\text{B}}_a$ezug auf Prädikate von Mengen und von Funktionen. Aber selbst bei solch eingeschränkter Methodik geht man in den rekursiven Erzeugungen von Funktionen über das konkret rechnerisch Durchführbare hinaus.

Die Vermeidung der genannten Anwendung des „tertium non datur“ macht sich übrigens für die elementare Zahlentheorie noch nicht wesentlich geltend. Für die Analysis aber bedeutet sie eine erhebliche Einschränkung.

Was die klassische Analysis betrifft, so war es anfangs die Meinung, daß mit deren Begründung nach den Methoden von Dedekind und Cantor eine restlose Arithmetisierung erreicht worden sei. Bald aber wurde unter dem

Gesichtspunkt der Forderung einer strikten Arithmetisierung die klassische Analysis kritisiert. Und diese Kritik verstärkte sich unter dem Einfluß der Anforderungen der finiten bzw. intuitionistischen Methodik. Im Rahmen der mathematischen Grundlagenforschung wurden dann verschiedene Programme für eine strikter arithmetische Behandlung der Analysis entwickelt.

Es wäre ungerecht, nicht anzuerkennen, daß diese verschiedenen Arten einer stärker arithmetisierten Analysis durchaus ihr mathematisches Interesse besitzen. Andererseits aber sollte zugestanden werden, daß es ein Vorurteil ist zu meinen, daß die Analysis unbedingt restlos arithmetisiert werden müsse. Bei der Analysis handelt es sich um die begriffliche Präzisierung geometrischer Vorstellungen. Durch die erwähnten Methoden von Dedekind und Cantor wird eine Anknüpfung an die Zahlentheorie erreicht, wobei aber noch *mengentheoretische* Begriffe hinzutreten. Wenn man sich darüber im klaren ist, daß diese Begriffe nicht restlos arithmetisch sind, so hat das Verfahren nichts Anstößiges.

Gewiß enthalten die Methoden der klassischen Analysis starke Idealisie-
Aix rungen. Diese beeinträchtigen aber nicht die praktische Sicher|heit. Tatsächlich wird ja hier eine Art von Anschaulichkeit gewonnen, die den Überlegungen eine große Sicherheit verleiht. –

Eine Problematik ist ferner entstanden im Zusammenhang mit der Entdeckung der Formalisierbarkeit der mathematischen Beweise anhand der symbolischen Logik. Diese Formalisierung kann ja als eine Verschärfung des axiomatischen Verfahrens angesehen werden. Es gelang auch, für die Disziplinen der Zahlentheorie, der Analysis und der Mengenlehre formale Systeme, bestehend je aus einer Symbolik und aus Regeln des Deduzierens, so aufzustellen, daß im Rahmen eines solchen Systems die bekannten Beweise der betreffenden Theorie sich formal darstellen lassen.

Formal-deduktive Systeme können auch unabhängig von bereits vorliegenden Theorien aufgestellt werden, und man kann dann umgekehrt nach inhaltlichen Deutungen (Modellen) für sie suchen. Das ist ein Thema der „Semantik“, welche sich generell mit den Beziehungen zwischen Theorien und formalen Systemen beschäftigt.

Eine andere Art der Forschung, welche sich an die Formalisierung mathematischer Theorien knüpft, besteht darin, daß man die formalisierten Beweise zum Gegenstand mathematischer Untersuchung macht. Es ist das die Aufgabenstellung der Hilbertschen Beweistheorie. Bei dieser handelt es sich insbesondere um die Untersuchung der inneren Widerspruchsfreiheit formalisierter Theorien. Hierfür ergibt sich bei den Theorien des Unendlichen die

Möglichkeit einer methodischen Reduktion, da ja die formalisierten Beweise endliche Objekte sind und auch die Widerspruchsfreiheit sich formal charakterisieren läßt. Widerspruchsfreiheitsbeweise dieser Art sind in der Tat für die formalisierte Zahlentheorie und die formalisierte Analysis gelungen, jedoch nicht mit so elementaren Mitteln wie Hilbert es anstrebte, der die Methoden solcher Beweise auf eine Kombinatorik gemäß dem finiten Standpunkt beschränken wollte. Es mußten stärkere Methoden des konstruktiven Beweisens herangezogen werden.

Dieses Erfordernis, in den Widerspruchsfreiheitsbeweisen die elementaren „finiten“ Methoden zu überschreiten, steht in Zusammenhang mit einer anderen Schwierigkeit, welche sich gemeinsam mit jener auf$_a$ $\underline{\text{G}}_a$rund von Ergebnissen von Kurt Gödel und Th. Skolem herausstellte: Es zeigte sich, daß ein formales System, wenn es die Bedingungen der strikten Kontrollierbarkeit erfüllt, die jeweils intendierte Theorie nicht vollständig auszudrücken vermag. Dieses äußert sich insbesondere darin, daß das formale System außer der normalen Deutung durch die intendierte Theorie auch abweichende Deutungen zuläßt, „$_d\underline{\text{n}}_{da}\underline{\text{N}}_a$on-$_d\underline{\text{s}}_{da}\underline{\text{S}}_a$tandard“-Modelle, wie sie genannt werden. | Ax

Man hat sich mit dieser Tatsache innerhalb der Grundlagenforschung auf verschiedene Arten auseinandergesetzt, einerseits indem man non-standard-Modelle des näheren studiert hat, andererseits indem man Möglichkeiten betrachtete, durch eine erweiterte Art der Formalisierung die non-standard-Modelle auszuschließen. Für die Zahlentheorie hat man zweierlei Verfahren einer solchen Erweiterung des Formalisierens in Betracht gezogen: einerseits die „unendliche Induktion“, andererseits die Zulassung unendlicher Konjunktionen und Disjunktionen. In beiden Fällen geht der finite Charakter der Beweisfiguren verloren.

Für die grundsätzliche Betrachtung ergibt sich so, daß die Rolle der Formalisierung keine so einfache ist, wie sie ihr ursprünglich zugedacht war, und zugleich auch dieses, daß wir die Forderung der Formalisierung nicht so unbedingt zu stellen haben. Ohnehin bedient sich die Semantik, ihrer Aufgabe gemäß, eines mengentheoretischen Denkens, welches nicht an ein formales System gebunden ist. –

Wie wir sehen, fehlt es nicht an Problematik für die Philosophie der Mathematik. Gleichwohl gilt aber doch, was ich in einer der Abhandlungen[2] aussprach: „Wenn wir die ... Auffassung zu$_a$ $\underline{\text{G}}_a$runde legen, wonach die

[2]„Die schematische Korrespondenz und die idealisierten Strukturen“ (*vide* Kap. 26, S. 397).

Mathematik die Wissenschaft von den idealisierten Strukturen ist, so haben wir damit für die Grundlagenforschung der Mathematik eine Haltung, welche uns vor übersteigerten Aporien und vor forcierten Konstruktionen bewahrt, und welche auch nicht angefochten wird, wenn die Grundlagenforschung vieles Erstaunliche zutage bringt.“