Bernays Project: Text No. 26

Bemerkungen zur Philosophie der Mathematik (1969)

Remarks on the philosophy of mathematics

(*Akten des XIV. Internationalen Kongresses für Philosophie, Wien, Band III: Logik, Erkenntnis- und Wissenschaftstheorie, Sprachphilosophie, Ontologie und Metaphysik*, Wien: Herder, S. 192–198;
repr. in *Abhandlungen*, S. 170–175)

192/A170 | Wenn wir die Mathematik mit der Logik vergleichen in Hinsicht auf die Rolle, die den beiden Erkenntnisgebieten im philosophischen Denken zugewiesen wird, so finden wir in dieser Beziehung eine Verschiedenartigkeit unter den Philosophen.

Für die einen ist die Logik das Ausgezeichnete; nach ihnen ist das Logische im weiteren Sinne, der *λόγος*, das Vernünftige, und die Logik im engeren Sinn der Bestand an elementaren Einsichten, der bei allen Überlegungen zu Grunde zu legen ist, d. h. der Bestand an solchen Wahrheiten, die unabhängig von irgendeiner speziellen Sachhaltigkeit gültig sind. Die Logik im engeren Sinne (die „reine Logik“) hat danach einen erkenntnistheoretisch primären Status.

Ein anderer Ausgangspunkt ist derjenige, bei dem die Methode der Mathematik als Vorbild für alles wissenschaftliche Denken genommen wird. Während für die erstgenannte Ansicht das Logische das Selbstverständliche, das Unproblematische ist, ist nach der zweiten Ansicht das Mathematische das erkenntnistheoretisch Unproblematische. Verstehen ist danach letztlich
193 mathematisches Verstehen. Der Gedanke, daß alles ratio|nale Einsehen von der Art des mathematischen sein müsse, spielt ja insbesondere auch in den Argumentationen von David Hume eine wesentliche Rolle.

Für diese Ansicht galten lange Zeit die Elementa des Euklid als Repräsentant der mathematischen Methode. Dabei war man sich wohl oft nicht hinlänglich klar darüber, daß vom Standpunkt der Axiomatik das Euklidische Axiomensystem speziell ist (wofür ja schon ein Anzeichen darin gegeben war, daß bereits von den frühen Kommentatoren Vorschläge für die Ersetzung von Axiomen durch gleichwertige andere gemacht wurden). Es war wohl bei vielen – wenn auch wohl kaum bei den Autoren des griechischen Werkes – die Meinung, daß die Möglichkeit des strikten erfolgreichen Beweisens in der Geometrie auf der Evidenz der Axiome beruhe.

Bei dem Philosophieren nach axiomatischer Methode wurde allerdings zeitweise, insbesondere ja in der Schule von Christian Wolff, Evidenz auch als begriffliche Evidenz verstanden, so daß danach zwischen dem Logischen
A171 und dem Mathematischen nicht unterschieden | wurde. Der Satz vom Widerspruch (in den man meist das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten einbezog) wurde sozusagen als ein Zaubermittel angesehen, durch welches man mit Hilfe geeigneter Begriffsbildungen alle naturwissenschaftlichen und auch die metaphysischen Erkenntnisse gewinnen könne.

Wie Sie wissen, hat in Opposition gegen diese Philosophie Kant mit seiner Lehre von der reinen Anschauung das Moment des Anschaulichen in der Mathematik hervorgehoben. Aber auch nach Kant beruht die Möglichkeit der Geometrie als einer erfolgreichen deduktiven Wissenschaft auf der Evidenz der Axiome, d. h. bei ihm auf der anschaulichen Einsichtigkeit ihrer Existenzpostulate. Aus der Undeutlichkeit in der erkenntnistheoretischen Beurteilung der Geometrie des Euklid erklärt es sich, daß die Entdeckung der nichteuklidischen, Bolyai-Lobatschefskijschen Geometrie so umwälzend auf die philosophischen Lehrmeinungen wirkte.

Eine wesentliche Änderung des Aspekts ergab sich aber auch für die erste der beiden genannten Ansichten durch die Entwicklung der mathematischen Logik. Hier wurde es deutlich, daß die Logik als Disziplin (die sie ja schon bei Aristoteles war) nicht direkt in der Feststellung einzelner logischer Sachverhalte besteht, vielmehr etwas ist, das man besser als Metalogik bezeichnet, nämlich die Untersuchung der Beweismöglichkeiten in formal abgegrenzten Bereichen des Deduzierens. Und ferner zeigte sich, daß die Methode solcher Metalogik eine typisch mathematische ist.

194 | Hiernach möchte es als angezeigt erscheinen, die Logik in die Mathematik einzuordnen. Daß man dieses zumeist nicht getan, sondern sich in der entgegengesetzten Richtung bemüht hat, erklärt sich wohl aus dem Mangel einer befriedigenden erkenntnistheoretischen Ansicht von der Mathematik. Der Terminus „mathematisch“ war sozusagen keine genügend vertraute philosophische Vokabel. Man suchte die Mathematik ihrerseits durch Einordnung in die Logik zu verstehen. Dieses gilt insbesondere von Gottlob Frege. Sie kennen gewiß die Fregesche Anzahldefinition im Rahmen seiner

Prädikatentheorie. Die hierbei angewendete Methode hat bis heute ihre Bedeutung für die Einordnung der Zahlentheorie in die Mengenlehre. Gegen die Auffassung aber, daß hiermit eine *erkenntnistheoretische* Zurückführung auf reine Logik erreicht sei, läßt sich verschiedenes einwenden (worüber vielleicht in einem Kreis von Interessierten diskutiert werden kann).

Eine andere Art der Auseinandersetzung mit der Frage der Beziehung von Mathematik und Logik besteht darin, daß man – wie es insbesondere R. Car-
A172 nap tut – beide zu dem Gebiete des Analytischen | zusammenfaßt. Dabei wird der Kantische Begriff des Analytischen grundsätzlich erweitert, worauf ja besonders E. W. Beth hinwies. Gleichwohl wird diesem in erweitertem Sinne Analytischen meist der gleiche Charakter der Selbstverständlichkeit zugeschrieben, der den im Kantischen Sinne analytischen Sätzen zukommt.

Wie Sie wissen, hat W. V. Quine gegen die Unterscheidung des Analytischen und Synthetischen grundsätzlich opponiert. Wenngleich seine Argumentationen vieles Zutreffende enthalten, so werden sie doch wohl dem Umstand nicht gerecht, daß mit der Unterscheidung des Analytischen im weiteren Sinne und des Synthetischen etwas Wesentliches getroffen ist, nämlich der Unterschied zwischen mathematischen Sachverhalten und Sachverhalten in der Naturwirklichkeit. Um nur einiges Diesbezügliche zu erwähnen: Mathematische Sätze werden in anderem Sinne begründet als physikalische Sätze. Die mathematischen Größen der Analysis sind für die Physik nur approximativ relevant. Ob zum Beispiel die Lichtgeschwindigkeit im Centimeter-Sekunden-System durch eine rationale oder eine irrationale Zahl gemessen wird, diese Frage hat schwerlich einen physikalischen Sinn.

Freilich, der grundsätzliche Unterschied zwischen dem Mathematischen und dem Naturwirklichen bildet keinen hinlänglichen Grund, um das Mathematische mit dem Logischen gleichzusetzen. Es erscheint als naturgemäß,
195 zur Logik nur dasjenige zu rechnen, was sich aus den allgemeinen | Bedingungen und Formen der Diskursivität (der Begrifflichkeit und des Urteilens) ergibt. Die Mathematik aber handelt von den möglichen Strukturen, und zwar insbesondere von den idealisierten Strukturen.

Hiermit ist einerseits die methodische Bedeutsamkeit der Logik ersichtlich, andrerseits aber auch, daß deren Rolle in gewissem Sinne anthropomorph ist. Dieses trifft nicht in gleicher Weise für die Mathematik zu, bei der wir veranlaßt werden, den Bereich des vorstellungsmäßig Überblickbaren in verschiedener Richtung zu überschreiten. Die Bedeutsamkeit der Mathematik für die Wissenschaft ergibt sich schon daraus, daß wir es in allen Gebieten der Forschung mit Strukturen zu tun haben (Strukturen der Ge-

sellschaft, Strukturen der Ökonomie, Struktur des Erdkörpers, Strukturen der Pflanzen, der Lebensvorgänge, usw.). Dazu kommt die methodische Bedeutsamkeit der Mathematik auf Grund des Umstandes, daß in den meisten Wissenschaften, insbesondere den theoretischen, eine Art der Idealisierung der Gegenständlichkeit angewandt wird. F. Gonseth spricht in diesem Sinne von dem schematischen Charakter der wissenschaftlichen Beschreibung. Das
A173 Unterscheidende des theoretisch Exakten gegenüber dem Konkreten | wird auch von Stephan Körner besonders hervorgehoben. Wie sie wissen, ist es der Wissenschaft gelungen, die Naturzusammenhänge in einem großen Maße strukturell zu verstehen, und die Anwendbarkeit der Mathematik zur Kennzeichnung und Erklärung der Naturvorgänge reicht ja viel weiter, als es die Menschheit einst geahnt hat.

Der Erfolg und die Tragweite der Mathematik ist aber etwas ganz anderes als ihre vermeintliche Selbstverständlichkeit. Der Begriff des Selbstverständlichen ist wohl überhaupt philosophisch fragwürdig. Wir können von relativ Selbstverständlichem in dem Sinne sprechen, daß zum Beispiel für den Physiker die mathematischen Sachverhalte, für den Geologen die physikalischen Gesetze, für den Geschichtsforscher die allgemeinen psychologischen Eigenschaften des Menschen selbstverständlich sind. Es ist hier vielleicht deutlicher, anstatt vom Selbstverständlichen vom Vorgängigen (gemäß Gonseths Ausdruck „préalable") zu sprechen.

Jedenfalls ist die Mathematik nicht in dem Sinne selbstverständlich, daß für sie keine Probleme, oder wenigstens keine grundsätzlichen Probleme beständen. Man bedenke doch, daß es für die Analysis lange Zeit, trotz ihrer großen Erfolge im Formalen, keine deutliche Methodik gab, vielmehr die Forscher mehr oder minder auf ihren Instinkt angewiesen waren. Erst im 19. Jahrhundert ist man hier zu präzisen und deutlichen Methoden gelangt.
196 Die Theorie des Kontinuums von Dedekind und Cantor, | welche die Begründung dieser Methoden zum Abschluß brachte, ist aber, philosophisch betrachtet, gar nicht einfach. Es handelt sich dabei nicht um die Bewußtmachung von einer apriorischen Erkenntnis. Man mag eher davon sprechen, daß hier ein sehr gut gelungener Kompromiß zwischen dem Anschaulichen und den Anforderungen präziser Begrifflichkeit erreicht ist. Sie wissen ja auch, daß nicht alle Mathematiker mit dieser Theorie des Kontinuums einverstanden sind und daß der Brouwersche Intuitionismus eine andere Beschreibung des Kontinuums befürwortet – von der man freilich finden kann, daß dabei der Gesichtspunkt der strikten Arithmetisierung zuungunsten des geometrisch Befriedigenden überbetont ist.

Eine besonders bekannte und vielbesprochene Problematik ist diejenige, die sich an die Antinomien der Mengenlehre geknüpft hat. Wie Sie wissen, sind verschiedene Vorschläge zur Behebung der Antinomien gemacht worden. Besonders ist ja die Axiomatische Mengenlehre zu erwähnen, welche zeigt, daß zur Vermeidung der Antinomien eine so geringe Einschränkung des mengentheoretischen Verfahrens genügt, daß die Cantorschen Beweisführungen alle aufrechterhalten werden können. Das ursprüngliche Zermelosche Axio-
A174 mensystem der | Mengenlehre ist hernach noch, wie Sie wohl wissen, einerseits erweitert, andrerseits formal verschärft worden. Philosophisch kann das Verfahren der Lösung der Antinomien durch die axiomatische Mengenlehre in dem Sinne gedeutet werden, daß man die Antinomien als Anzeichen dafür nimmt, daß die Mathematik als Ganzes nicht ein mathematisches Objekt bildet und daß also die Mathematik nur als eine offene Mannigfaltigkeit verstanden werden kann.

Durch die Anwendung der Methoden der formalen Präzisierung auf die Mengenlehre hat sich eine Spaltung der mengentheoretischen Betrachtung in die Aufstellung und deduktive Entwicklung formaler Systeme und einer Modelltheorie ergeben. Durch diese Spaltung haben die semantischen Paradoxien, die man zunächst bei der Behebung der rein mengentheoretischen Paradoxien außer acht lassen konnte, eine neue Ausgestaltung und Bedeutsamkeit erhalten, und so stehen wir heute vor einer neuen grundsätzlichen Problematik – welche freilich, ebenso wie seinerzeit die mengentheoretischen Antinomien, die Mathematik nicht in ihrer eigentlichen Forschung behelligt, die sich vielmehr in den verschiedenen Disziplinen mit großem Erfolg entfaltet.

Durch die vorangehenden Ausführungen werden uns folgende Gesichtspunkte für die Philosophie der Mathematik nahegelegt, die auch für die all-
197 gemeine Erkenntnistheorie von Belang sind: |

1. Es erscheint angemessen, der Mathematik eine Sachhaltigkeit zuzuschreiben, die aber verschieden ist von derjenigen des Naturwirklichen. Daß es außer der Objektivität des Naturwirklichen noch andere Arten der Objektivität geben kann, zeigt sich schon an der Objektivität in den Gebieten des Phänomenalen. Die Mathematik ist zwar insofern nicht phänomenologisch, als sie einerseits ja, wie schon erwähnt, vorwiegend von idealisierten Strukturen handelt und ferner durch die Methode des Deduzierens beherrscht wird. Bei der Idealisierung kommt die Anschaulichkeit mit der Begrifflichkeit in Kontakt. (Es ist daher wohl auch nicht angemessen, Anschaulichkeit und Begrifflichkeit so stark einander entgegenzusetzen, wie es in der Kantischen

Philosophie geschieht.)

Die Bedeutung der Mathematik für die theoretische Physik besteht darin, daß in dieser die Naturvorgänge durch mathematische Gegenständlichkeiten approximativ dargestellt werden.

2. Die Unterschiedlichkeit der Mathematik gegenüber der empirischen Forschung besagt nicht, daß wir in der Mathematik eine von vornherein gesicherte (apriorische) Erkenntnis haben. Es erscheint als notwendig zuzugestehen, daß wir auch in den Gebieten des Mathematischen lernen müssen
A175 und auch hier eine Erfahrung sui generis (wir | mögen sie „geistige Erfahrung“ nennen) haben. Damit geschieht der Rationalität der Mathematik kein Abbruch. Vielmehr erscheint es als ein Vorurteil vorauszusetzen, daß Rationalität notwendig mit Gewißheit verbunden sein müsse. Sichere Erkenntnis im einfachen, vollen Sinne haben wir fast nirgends. Das ist die alte sokratische Einsicht, die heute besonders auch in den Philosophien von F. Gonseth und K. Popper zur Geltung gebracht wird.

Gewiß ist zuzugeben, daß wir in den Überlegungen der Mathematik, und insbesondere in denen der elementaren Mathematik, eine besondere Art von Sicherheit besitzen, weil uns hier die Gegenstände einerseits anschaulich deutlich sind, und andererseits durch die Idealisierung der Gegenständlichkeit so gut wie alles abgestreift wird, was zu Subjektivität Anlaß gibt. – Wenn wir aber im populären Sinne von der Gewißheit sprechen, daß $2 \cdot 2 = 4$ ist, so denken wir doch an die konkreten Anwendungen dieses Satzes. Die Anwendung arithmetischer Sätze auf das Konkrete beruht ja aber auf empirischen Bedingungen, und für deren Erfülltsein haben wir auch nur eine empirische, wenn auch praktisch hinlängliche Sicherheit.

Indem wir die Koppelung von Rationalität und Gewißheit fallenlassen, gewinnen wir unter anderem die Möglichkeit, die *heuristische Rationalität* zu würdigen, die in der wissenschaftlichen Erkenntnis eine wesentliche Rolle spielt.

198 | Die Anerkennung der heuristischen Rationalität liefert insbesondere auch die Behebung der von David Hume zum Problem gemachten erkenntnistheoretischen Schwierigkeit: Wir können den rationalen Charakter der Annahme von notwendigen Zusammenhängen in der Natur anerkennen, ohne behaupten zu müssen, daß der Ansatz solcher Zusammenhänge den Erfolg garantiere; in Hinsicht dieses Erfolges sind wir in der Tat auf die Erfahrung angewiesen.