Bernays Project: Text No. 13

Sur le platonisme dans les mathématiques (Über den Platonismus in der Mathematik†) (1935)

Platonism in mathematics

(*L'enseignement mathematique* 24, S. 52–69;
repr. in *Abhandlungen*, S. 62–78)

A62 | Gestatten Sie, daß ich Ihnen meinerseits vom gegenwärtigen Stand der Forschungen über die Grundlagen der Mathematik berichte. Da es in diesem Bereich Fragen gibt, die offen bleiben, bin ich nicht in der Lage, Ihnen ein endgültiges Bild zu entwerfen. Es ist jedoch zu betonen, daß die Situation keineswegs so kritisch ist, wie man glauben könnte, wenn man jene Stimmen hört, die von einer Krise der Grundlagen sprechen. Dieser Ausdruck mag in gewisser Hinsicht gerechtfertigt erscheinen, aber er läßt leicht die Meinung aufkommen, daß die mathematische Wissenschaft in ihren Grundfesten erschüttert sei.

In Wahrheit gedeihen die mathematischen Wisenschaften in voller Sicherheit und Harmonie. Die Ideen von Dedekind, Poincare und Hilbert sind systematisch und mit großem Erfolg weiterentwickelt worden, ohne daß sich irgendeine Unstimmigkeit in den Ergebnissen zeigt.

Lediglich in philosophischer Hinsicht sind Einwände erhoben worden. Sie beziehen sich auf bestimmte Denkweisen, die der Infinitesimalrechnung und der Mengenlehre eigen sind. Diese Denkweisen sind zum erstenmal systematisch angewendet worden, als man den Methoden der Infinitesimalrechnung eine strenge Form gegeben hat. Man betrachtet die Gegenstände einer Theorie als die Elemente einer Gesamtheit und folgert daraus: Für jede Eigenschaft, die sich vermittels der Begriffe der Theorie ausdrückt, steht objektiv fest, ob es in der Gesamtheit ein Element gibt, das diese Eigenschaft besitzt oder nicht. Aus dieser Vorstellung läßt sich auch die folgende Alternative

† Vortrag, gehalten am 18. Juni 1934 im Zyklus der „Internationalen Vorträge für mathematische Wissenschaften“ in der Reihe: Mathematische Logik.

herleiten: Entweder alle Elemente einer Menge besitzen eine gegebene Eigenschaft, oder es gibt wenigstens eines, das diese Eigenschaft nicht besitzt.

Man findet in der Axiomatik der Geometrie – in der Form, die Hilbert ihr gegeben hat – ein Beispiel für diese Art der Theorienbildung. Wenn wir die Axiomatik Hilberts mit der Euklids vergleichen, wobei wir davon absehen, daß bei dem griechischen Mathematiker noch einige Axiome fehlen, so bemerken wir, daß Euklid von Figuren spricht, die erst zu konstruieren sind,
A63 während für Hilbert die Systeme der | Punkte, der Geraden und der Ebenen bereits von Anfang an existieren. Euklid postuliert: Man kann zwei Punkte durch eine Gerade verbinden; Hilbert dagegen stellt das Axiom auf: Sind zwei beliebige Punkte gegeben, so existiert eine Gerade, auf der beide Punkte liegen. „Existieren" bezieht sich hier auf das System der Geraden. Dieses Beispiel zeigt bereits, daß die Tendenz, von der wir sprechen, dahin geht, die Gegenstände als losgelöst von aller Bindung an das denkende Subjekt zu betrachten.

Da diese Tendenz vor allem in der Philosophie Platons zur Geltung gekommen ist, sei es mir gestattet, sie als „Platonismus" zu bezeichnen.

Der Wert der vom Platonismus inspirierten mathematischen Konzeptionen liegt darin, daß sie Modelle für das abstrakte Vorstellen liefern, die sich durch ihre Einfachheit und ihre logische Geschlossenheit auszeichnen. Diese repräsentieren, mit gewissen Extrapolationen, bestimmte Bereiche der Erfahrung und des Anschaulichen. Wir wissen indessen, daß man die theoretischen Systeme der Geometrie und der Physik arithmetisch darstellen kann. Aus diesem Grunde richten wir unsere Aufmerksamkeit auf den Platonismus in der Arithmetik. Ich spreche übrigens hier von der Arithmetik im weiteren Sinne, worin die Analysis und die Mengenlehre eingeschlossen ist.

Die schwächste der „platonistischen" Annahmen, die von der Arithmetik eingeführt worden sind, ist die von der Gesamtheit der ganzen Zahlen. Daraus resultiert das Prinzip des „tertium non datur" für die ganzen Zahlen: Wenn P ein Prädikat von ganzen Zahlen ist, dann trifft P entweder auf jede Zahl zu, oder es gibt wenigstens eine Zahl, die eine Ausnahme bildet.

Diese Alternative ist – kraft der genannten Annahme – eine unmittelbare Folge des logischen Prinzips des „tertium non datur"; in der Analysis wendet man sie fast ständig an. So folgert man beispielsweise vermittels dieser Alternative: Für zwei reelle Zahlen a und b, die durch konvergierende Reihen gegeben sind, gilt entweder $a = b$ oder $a < b$ oder $b < a$; desgleichen: eine Folge von positiven rationalen Zahlen nähert sich entweder beliebig der Null, oder aber es existiert eine positive rationale Zahl, die kleiner ist als alle

Zahlen der Folge.

Auf den ersten Blick erscheinen derartige Alternativen trivial, und man übersieht leicht, daß sich dort eine Annahme eingeschlichen hat.

Aber die Analysis gibt sich nicht mit dieser bescheidenen Art des Platonismus zufrieden; dieser kommt in stärkerem Maße in folgenden Begriffen zur Geltung: Zahlenmenge, Zahlenfolge und Funktion. Hier sieht man ab von den effektiven Möglichkeiten, eine Menge, eine Folge oder eine Funktion zu definieren.
A64 Diese Begriffe werden vielmehr in | einem „quasi-kombinatorischen“ Sinne gebraucht; darunter verstehe ich: im Sinne einer Analogie zwischen dem Unendlichen und dem Endlichen.

Betrachten wir zum Beispiel die verschiedenen Funktionen, die jeder Zahl einer endlichen Reihe $1, 2, \ldots.., n$ eine Zahl der gleichen Reihe zuordnen. Es gibt n^n Funktionen dieser Art, und jede von ihnen erhält man durch n unabhängige Entscheidungen. Zum Unendlichen übergehend, stellt man sich nun Funktionen vor, die durch eine unendliche Zahl unabhängiger Entscheidungen erzeugt werden, durch welche jeder ganzen Zahl eine ganze Zahl zugeordnet wird, und man zieht die Gesamtheit dieser Funktionen in Betracht. Desgleichen betrachtet man eine Menge ganzer Zahlen als das Ergebnis unendlich vieler unabhängiger Akte, die für jede Zahl entscheiden, ob sie in der Menge enthalten oder nicht enthalten ist. Daran schließt sich die Idee der Gesamtheit dieser Mengen. In analoger Weise werden auch die Folgen und die Mengen reeller Zahlen betrachtet. Die Bildungsgesetze von speziellen Funktionen, Folgen oder Mengen sind – so gesehen – nur Methoden der Angabe eines Gegenstandes, der unabhängig von der Konstruktion und dieser vorgängig Existenz besitzt.

Das Auswahlprinzip ist eine direkte Anwendung der eben erwähnten quasikombinatorischen Auffassungen. Generell wird es in der Theorie der reellen Zahlen in folgender Form angewendet: Sei

$$M_1, M_2, \ldots..$$

eine Folge von nicht leeren Mengen reeller Zahlen; dann gibt es eine Folge

$$a_1, a_2, \ldots..$$

dergestalt, daß für jeden Index n, a_n Element von M_n ist. Das Prinzip gibt zur Kritik Anlaß, wenn die effektive Konstruktion der Zahlenfolge gefordert wird.

Ein ähnlicher Fall liegt vor bei den, nach Poincaré, imprädikativen Definitionen. Eine imprädikative Definition einer reellen Zahl ist dadurch gekennzeichnet, daß sie eine Bedingung des Inhalts enthält, daß alle reellen Zahlen eine bestimmte Eigenschaft P haben, oder eine Bedingung des Inhalts, es existiere eine reelle Zahl mit der Eigenschaft P.

Diese Art von Definitionen stützt sich auf die Annahme der Gesamtheit der Folgen ganzer Zahlen, da ja eine reelle Zahl durch einen Dezimalbruch dargestellt wird, d. h. durch eine spezielle Folge ganzer Zahlen.

Man verwendet sie insbesondere zum Beweis des Grundtheorems, daß eine beschränkte Menge reeller Zahlen immer eine obere Grenze, d. h. eine
A65 kleinste obere Schranke besitzt. In den Theorien von Cantor | erstrecken sich die platonistischen Begriffsbildungen weit über die Theorie der reellen Zahlen hinaus. Dies geschieht durch die iterierte Anwendung des quasikombinatorischen Funktionsbegriffes und durch die Verwendung von Vereinigungsprozessen. Das sind ja die bekannten Methoden der Mengenlehre.

Die platonistischen Konzeptionen der Analysis und der Mengenlehre haben auch in den modernen Theorien der Algebra und der Topologie Anwendung gefunden, wo sie sich als sehr fruchtbar erwiesen haben.

Dieser kurze Überblick mag genügen, um den Platonismus und seine Anwendung in der Mathematik zu charakterisieren. Diese Anwendung ist eine so übliche, daß es keine Übertreibung ist, wenn man sagt, der Platonismus sei heute herrschend in der Mathematik.

Andererseits sehen wir jedoch, daß diese Tendenz von Anfang an grundsätzlich kritisiert worden ist und viele Diskussionen verursacht hat. Die Kritik hat sich verstärkt durch die Entdeckung der Paradoxien der Mengenlehre, obwohl durch diese Antinomien nur der extreme Platonismus widerlegt wird.

Bisher haben wir nur einen beschränkten Platonismus behandelt, der nicht mehr prätendiert als – sozusagen – eine idealisierende Extrapolation eines Denkbereiches. Aber man ist hierbei nicht stehengeblieben. Viele Mathematiker und Philosophen interpretieren die Methoden des Platonismus im Sinne eines Begriffsrealismus und postulieren die Existenz einer Ideenwelt, die alle Gegenstände und Beziehungen der Mathematik enthält. Durch die Antinomie von Russell-Zermelo, aber auch durch andere Antinomien, hat sich dieser absolute Platonismus als unhaltbar erwiesen.

Wenn man diese Widersprüche in ihrer rein logischen Form zum erstenmal hört, wirken sie wie Wortspiele ohne ernstliche Bedeutung. Man muß jedoch bedenken, daß diese anscheinend spielerischen Formen der Paradoxien als Konsequenzen aus den Forderungen des absoluten Platonismus erhalten wurden.

Es geht in diesen Antinomien besonders darum, sichtbar zu machen, daß es unmöglich ist, folgende Dinge miteinander in Einklang zu bringen: den Gedanken der Gesamtheit aller mathematischen Gegenstände und die allgemeinen Begriffe von Menge und Funktion; in der Tat, die Gesamtheit selber würde einen Bereich von Elementen für weitere Mengen sowie von Argumenten und Werten für weitere Funktionen ergeben.

Wir müssen also auf den absoluten Platonismus verzichten. Dabei ist zu betonen, daß dieses fast die einzige Einschränkung ist, die sich aus den
A66 genannten Widersprüchen ergibt. Mancher mag das bedauern, da | man sich doch von allen Seiten auf die Paradoxien beruft. In der Tat wird jedoch durch das Erfordernis, die Paradoxien zu vermeiden, noch kein eindeutiges Programm festgelegt. Insbesondere wird der beschränkte Platonismus von diesen Antinomien überhaupt nicht berührt.

Jedenfalls erhielt die Grundlagenkritik der Analysis von dieser Seite einen neuen Impuls, und unter den verschiedenen Möglichkeiten, den Widersprüchen auszuweichen, bot sich die der völligen Elimination des Platonismus als die radikalste an.

Sehen wir zu, wie diese Elimination sich vollziehen läßt. Sie geschieht in zwei Schritten entsprechend den beiden wesentlichen Annahmen des Platonismus. Der erste Schritt besteht darin, die Begriffe einer Menge, einer Folge, einer Funktion, die ich „quasi-kombinatorisch“ genannt habe, durch konstruktive Begriffe zu ersetzen. Der Gedanke einer unendlichen Zahl unabhängiger Bestimmungen wird verworfen. Man betont, daß eine unendliche Folge oder ein Dezimalbruch nur durch ein arithmetisches Gesetz festgelegt werden kann, und betrachtet das Kontinuum als eine Menge von Elementen, die durch derartige Gesetze definiert sind. Dieses Vorgehen erfolgt im Sinne der Tendenz zur vollkommenen Arithmetisierung der Analysis. In der Tat muß man zugestehen, daß in der gewöhnlichen Methode der Analysis die Arithmetisierung keine vollständige ist. Die Begriffsbildungen, die man hier anwendet, reduzieren sich nicht völlig – wie wir gesehen haben – auf den Begriff der ganzen Zahl und die logischen Begriffe.

Wenn wir indessen den Gedanken verfolgen, daß jede reelle Zahl durch ein arithmetisches Gesetz definiert ist, dann drängt sich die Idee der Gesamtheit der reellen Zahlen nicht mehr auf, und das Auswahlprinzip verliert seine Evidenz. Überdies sind wir dann genötigt, wofern wir nicht – wie Russell und Whitehead – zusätzliche Voraussetzungen einführen, auf verschiedene gebräuchliche Schlußweisen zu verzichten. Diese Konsequenzen hat vor allem Hermann Weyl in seinem Buch *Das Kontinuum* zur vollen Deutlichkeit gebracht.

Gehen wir nun zum zweiten Schritt der Elimination über. Er besteht darin, auf die Idee der Gesamtheit der ganzen Zahlen zu verzichten. Dieser Gesichtspunkt wurde zuerst von Kronecker geltend gemacht und später dann von Brouwer systematisch weiterentwickelt.

Obwohl viele von Ihnen im März eine authentische Darstellung dieser Methode von Prof. Brouwer selber erhalten haben, erlaube ich mir dennoch einige erklärende Worte.

In bezug auf Kronecker muß man zunächst ein Mißverständnis beseitigen, das durch den häufig zitierten Aphorismus nahegelegt wird: „Die natürlichen
A67 Zahlen sind von Gott geschaffen, alles andere in der | Mathematik ist Menschenwerk.“ Wenn das wirklich die Überzeugung von Kronecker gewesen wäre, hätte er die Vorstellung von der Gesamtheit der ganzen Zahlen anerkennen müssen.

In Wahrheit ist die Methode Kroneckers – und auch die von Brouwer – gerade dadurch charakterisiert, daß sie die Voraussetzung vermeidet, es gebe eine fertige Reihe der natürlichen Zahlen, die eine ideale Gegenständlichkeit (in platonistischem Sinne) bildet.

Man kann nach Kronecker und Brouwer von der Zahlenreihe nur im Sinne eines nie endenden Prozesses sprechen, der über jede erreichte Grenze hinausgeht.

Dieser Ausgangspunkt hat weitere Divergenzen zur Folge, vor allem in der Anwendung und Interpretation logischer Formen: Weder ein allgemeines Urteil über die natürlichen Zahlen noch ein Existenzurteil kann so aufgefaßt werden, daß es eine Eigenschaft der Zahlenreihe ausdrückt. Ein allgemeiner zahlentheoretischer Satz muß als eine Voraussage angesehen werden, daß eine gewisse Eigenschaft bei jeder Zahlenkonstruktion angetroffen wird. Die Behauptung der Existenz einer Zahl mit einer bestimmten Eigenschaft wird als Teilaussage einer bestimmten Behauptung interpretiert, die eine Zahl der fraglichen Eigenschaft angibt oder einen Weg weist, um zu einer solchen Zahl zu gelangen. Dieses nennt Hilbert ein „Partialurteil“.

Aus dem gleichen Grunde hat die Negation eines allgemeinen Satzes oder eines Existenzsatzes über die natürlichen Zahlen keinen unmittelbaren Sinn. Man muß die Negation verschärfen, um zu einer mathematischen Behauptung zu gelangen. Eine solche Verschärfung der Negation eines Satzes, welcher die Existenz einer Zahl mit einer Eigenschaft P aussagt, wird z. B. durch die Aussage geliefert, daß es eine Zahl der Eigenschaft P nicht geben kann oder daß die Annahme einer Zahl dieser Eigenschaft zu einem Widerspruch führt. Für solche verschärfte Negationen ist jedoch das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten nicht mehr anwendbar.

Auf diese Weise ergeben sich die für Brouwers „Intuitionismus“ charakteristischen Komplikationen. So kann man z.B. nicht generell die folgende Alternative anwenden: Eine unendliche Reihe mit positiven Gliedern ist entweder konvergent oder divergent; zwei konvergierende Summen repräsentieren entweder dieselbe reelle Zahl oder verschiedene Zahlen. In der Theorie der ganzen Zahlen und der algebraischen Zahlen lassen sich diese Schwierigkeiten vermeiden, und es gelingt hier, alle wesentlichen Theoreme und Begründungen aufrechtzuerhalten.

A68 In der Tat hat schon Kronecker gezeigt, daß die Theorie der alge- | braischen Zahlkörper sich nach seinem methodischen Programm entwickeln läßt, also ohne auf die Gesamtheit der ganzen Zahlen Bezug zu nehmen.[1]

Was die Analysis angeht, so wissen Sie, daß diese von Brouwer gemäß den Forderungen des Intuitionismus entwickelt wurde. Man muß allerdings dabei einige Theoreme der gebräuchlichen Analysis aufgeben, so z. B. den Fundamentalsatz, daß jede stetige Funktion in einem abgeschlossenen Intervall ein Maximum besitzt. Nur Weniges von der Mengenlehre bleibt in der intuitionistischen Mathematik erhalten.

Summarisch können wir sagen, daß der Intuitionismus für die Zahlentheorie angemessen ist, die halb-platonistische Methodik, welche die Vorstellung von der Gesamtheit der ganzen Zahlen verwendet, jedoch die quasikombinatorischen Begriffe vermeidet, für die Theorie der reellen Zahlen angemessen ist und die gebräuchliche platonistische Methodik für die geometrische Theorie des Kontinuums. Diese Situation ist keineswegs erstaunlich; ist es doch ein dem heutigen Mathematiker vertrautes Verfahren, in jeder

[1]Zu diesem Zweck hat Kronecker in seinen Vorlesungen u. a. ein Verfahren dargelegt, wie man den Begriff einer reellen algebraischen Zahl einführen kann, eine Methode, die man fast ganz vergessen hat, obwohl sie die einfachste ist, um diesen Begriff zu definieren. Die Methode besteht darin, die reellen algebraischen Zahhlen darzustellen durch die Zeichenwechsel von irreduziblen Polynomen einer Variablen mit ganzen rationalen Koeffizienten; ausgehend von dieser Definition führt man die Elementaroperationen und die Größenbeziehung für die reellen algebraischen Zahlen ein und stellt fest, daß die geläufigen Rechengesetze gültig sind; schließlich beweist man, daß ein Polynom mit algebraischen Koeffizienten, welches für zwei algebraische Argumente a und b Werte von verschiedenem Vorzeichen annimmt, zwischen a und b eine Nullstelle hat.

Disziplin nur die für sie notwendigen Voraussetzungen zu verwenden.

Durch diese Beschränkung gewinnt eine Theorie an methodischer Klarheit; und in dieser Richtung erweist sich der Intuitionismus als fruchtbar.

Aber wie Sie wissen, begnügt sich der Intuitionismus nicht mit dieser Rolle; er wendet sich gegen die gebräuchliche Mathematik und behauptet, allein die wahre Mathematik zu vertreten.

Andrerseits sind die Mathematiker im allgemeinen gar nicht bereit, die bewährten und eleganten Methoden der Analysis gegen eine kompliziertere Methodik einzutauschen, ohne daß es dafür eine zwingende Notwendigkeit
A69 gäbe. |

Man muß also die Frage grundsätzlich betrachten. Versuchen wir uns den Intuitionismus und seine Philosophie genauer zu vergegenwärtigen.

Die Instanz, auf die sich Brouwer beruft, ist die Evidenz. Er behauptet, daß die Vorstellungen, auf die sich der Intuitionismus stützt, uns in evidenter Weise durch die reine Anschauung gegeben sind. In dieser Berufung auf die reine Anschauung steht er zum Teil in Einklang mit Kant. Während aber für Kant eine reine Anschauung von Raum und Zeit existiert, erkennt Brouwer nur die Anschauung der Zeit an, von der er wie Kant die Zahlvorstellung ableitet.

Was diese philosophische Position angeht, muß man Brouwer, wie mir scheint, zwei wesentliche Dinge zugestehen: erstens, daß der Begriff der natürlichen Zahl einen anschaulichen Ursprung hat. Daran haben auch die Untersuchungen der Logiker, auf die ich später zurückkommen werde, nichts geändert. Zweitens ist zuzugestehen, daß man die Arithmetik und die Geometrie nicht in der Weise gleichstellen darf, wie Kant es getan hat. Die Vorstellung der Zahl ist elementarer als die geometrischen Vorstellungen.

Jedoch die Existenz einer geometrischen Anschauung völlig abzulehnen, erscheint als ein wenig voreilig. Lassen wir aber diese Frage hier beiseite; es gibt dringendere: Ist es wirklich sicher, daß sich die Evidenz der arithmetischen Anschauung genauso weit erstreckt, wie es zur Abgrenzung der intuitionistischen Arithmetik erforderlich ist? Und schließlich: Ist es möglich, eine scharfe Grenze zu ziehen zwischen dem, was evident und dem, was lediglich plausibel ist?

Ich glaube, diese beiden Fragen wird man verneinen müssen. Was zunächst die Evidenz im allgemeinen angeht, so wissen Sie, daß die Menschen – und selbst die Wissenschaftler – darüber verschiedener Meinung sind. Sogar ein und derselbe Mensch verwirft mitunter Annahmen, die ihm vorher als evident erschienen.

Ein Beispiel einer vieldiskutierten Evidenzfrage, über welche bis heute Meinungsverschiedenheit besteht, ist die der Evidenz des Parallelenaxioms. Ich glaube, daß die Kritik, die sich gegen dieses Axiom gerichtet hat, sich zum Teil durch die besondere Stellung erklärt, die es im System Euklids hat. Verschiedene andere Axiome waren hier weggelassen, so daß sich das Parallelenaxiom von den übrigen durch seine Komplikation unterschied.

Ich möchte mich begnügen, hierzu das folgende zu bemerken: Man kann überhaupt die geometrische Evidenz anzweifeln; man kann der Meinung sein, sie erstrecke sich nur auf topologische Gegebenheiten oder auch auf die Sachverhalte, die durch die projektiven Axiome ausgedrückt werden. Man kann
A70 andererseits behaupten, die geometrische Intuition | sei nicht exakt. Diese Ansichten sind konsequent, und zugunsten einer jeden von ihnen können Argumente angeführt werden. Aber zu behaupten, die metrische Geometrie besitze eine Evidenz, die auf diejenigen Gesetze beschränkt ist, die der euklidischen Geometrie mit derjenigen von Bolyai-Lobatschefskij gemeinsam sind, also eine exakte metrische Evidenz, die aber nicht die Existenz eines exakten Quadrats garantiert, eine solche Behauptung scheint mir sehr künstlich. Dennoch haben mehrere Mathematiker diese Ansicht vertreten.

Es ging uns hier darum, die Schwierigkeiten aufzuzeigen, denen man begegnet, wenn man den Bereich der Evidenz abgrenzen will. Diese Schwierigkeiten ändern jedoch nichts daran, daß es unbestreitbare Evidenzen gibt, und der Intuitionismus weist jedenfalls solche Evidenzen auf. Aber bewegt er sich wirklich nur im Bereich dieser elementaren Evidenzen? Dies steht nicht völlig außer Zweifel, und zwar aus folgendem Grunde: Der Intuitionismus läßt gänzlich die Möglichkeit außer acht, daß die Rechenoperationen, die für die Anwendung der rekursiven Definitionen erfordert werden, für sehr große Zahlen keine konkrete Bedeutung mehr besitzen. Ausgehend von zwei ganzen Zahlen k, l, gelangt man ohne weiteres zu k^l; dieser Prozeß führt nach wenigen Schritten zu Zahlen, die unsere Vorstellungskraft und sogar die in der Naturwissenschaft vorkommenden Zahlen übertreffen, z. B.

$$67^{\left(257^{729}\right)} .$$

Der Intuitionismus ebenso wie die gewöhnliche Mathematik behauptet, eine solche Zahl könne durch eine Dezimalentwicklung dargestellt werden. Könnte man nicht die Kritik, die der Intuitionismus an den Existenzbehauptungen übt, weiterführen und die Frage aufwerfen: Was bedeutet die Behauptung der Existenz einer Dezimalentwicklung der eben genannten Zahl, da wir doch nicht wirklich imstande sind, sie uns zu verschaffen? Brouwer beruft sich auf die Anschauung; aber man kann bezweifeln, ob es hier wirklich eine anschauliche Evidenz gibt. Wird hier nicht vielmehr die allgemeine Methode der Analogie angewandt, die darin besteht, die Beziehungen, die an den berechenbaren Zahlen verifiziert werden können, auf die unzugänglichen Zahlen auszudehnen? In der Tat ist die Anwendung dieser Analogie um so stärker motiviert, als es keine scharfe Unterscheidung zwischen zugänglichen und unzugänglichen Zahlen gibt.

Man könnte hier den Begriff eines „ausführbaren Prozesses" bilden und die rekursiven Definitionen so verstehen, daß ihre Anwendung auf ausführbare Rechenoperationen beschränkt ist. Um Widersprüche zu vermeiden, müßte man sich allerdings davor hüten, das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten
A71 auf den Begriff „ausführbar" anzuwenden; | aber eine solche Beschränkung versteht sich für den Intuitionismus ja von selbst.

Ich hoffe, ich werde richtig verstanden: Ich bin weit davon entfernt, zu empfehlen, daß man die Arithmetik mit der genannten Einschränkung betreiben solle. Ich möchte nur zeigen, daß der Intuitionismus sich auf Behauptungen stützt, die zweifelhaft sind und von denen man sich im Prinzip lösen könnte; die dadurch resultierende Theorie wäre freilich ziemlich dürftig.

Es steht also nicht völlig außer Zweifel, daß der Bereich der vollen Evidenz sich auf den ganzen Intuitionismus erstreckt. Andererseits bejahen mehrere Mathematiker die volle Evidenz der intuitionistischen Arithmetik und behaupten ebenso die Evidenz der Vorstellung der Zahlenreihe in folgendem Sinne: Um die Existenz einer Zahl zu beweisen, ist es nicht nötig, für diese Zahl direkt oder durch Rekursion eine obere Schranke aufzuweisen. Übrigens haben wir ja eben gesehen, wie weit die Angabe einer solchen Schranke im allgemeinen von einer wirklich konkreten Vorführung entfernt ist.

Kurz gesagt, der Gesichtspunkt der anschaulichen Evidenz liefert keine eindeutige Entscheidung zugunsten des Intuitionismus.

Außerdem muß man beachten, daß die Evidenzen, auf die sich der Intuitionismus in seinen Überlegungen stützt, nicht alle den Charakter der Unmittelbarkeit besitzen; es treten auch abstrakte Betrachtungen hinzu. In der Tat verwendet man beim Intuitionismus häufig Formulierungen, die eine allgemeine Hypothese der Form enhalten: „Wenn jede Zahl n die Eigenschaft $A(n)$ besitzt, dann hat man B." Eine solche Formulierung wird im Sinne des Intuitionismus folgendermaßen interpretiert: „Wenn erwiesen ist, daß jede Zahl n die Eigenschaft $A(n)$ besitzt, dann B." Hier liegt ein Bedingungssatz von abstraktem Charakter vor; da nämlich im Intuitionismus die Beweis-methoden nicht festgelegt sind, ist die Bedingung, daß etwas bewiesen sei, nicht anschaulich bestimmt. Es ist richtig, daß man die genannte Formulierung auch im Sinne eines Partialurteils auffassen kann, d. h. als Angabe einer Überlegung, die von der genannten Bedingung zu dem Schlußsatz B führt, und zwar einer Überlegung, die man effektiv vorlegt. (Das entspricht ungefähr der Interpretation, die Kolmogoroff von dem Intuitionismus gibt.) Jedenfalls muß die Schlußfolgerung von der Annahme der Gültigkeit bzw. der Erwiesenheit eines allgemeinen Satzes ausgehen, einer Annahme, die nicht anschaulich bestimmt ist. Es ist also eine abstrakte Überlegung.

In dem hier betrachteten Beispiel ist das abstrakte Element immerhin
A72 noch eingeschränkt. Der abstrakte Charakter nimmt aber zu, wenn | man die Hypothesen übereinanderschichtet, d. h. wenn man Behauptungen wie die folgenden aufstellt: „Wenn man aus der Annahme, daß $A(n)$ für jede beliebige Zahl n gilt, auf B schließen kann, gibt es auch Cöder: „wenn aus der Annahme, daß die Annahme A auf einen Widerspruch führt, ein Widerspruch folgt, gilt B“ oder in kürzerer Form: „wenn die Absurdität von A absurd ist, gilt B“. Man kann in der Übereinanderschaltung solcher abstrakter Bedingungssätze noch weiter gehen.

Durch die systematische Anwendung solcher abstrakter Schlußfolgerungen hat Brouwer die Methoden von Kronecker überschritten, und es gelang ihm so, eine allgemeine intuitionistische Logik aufzustellen, die von Heyting systematisiert wurde.

Betrachtet man diese intuitionistische Logik, in welcher der Begriff der Folgerung unbeschränkt angewendet wird, und vergleicht man die Methode, die hier angewendet wird, mit der gewöhnlichen Methode, so bemerkt man, daß es nicht das wesentliche Charakteristikum des Intuitionismus ist, sich für das mathematische Verfahren ausschließlich auf anschauliche Evidenz zu stützen, sondern vielmehr Bezug zu nehmen auf das denkende und handelnde Subjekt.

Das ist eine grundsätzliche methodische Haltung. Sie steht im Gegensatz zu der üblichen Art, Mathematik zu betreiben, die darin besteht, bei der Aufstellung von Theorien von dem denkenden Subjekt möglichst zu abstrahieren.

Diese Feststellung läßt uns daran zweifeln, ob der Intuitionismus die einzige Methode der mathematischen Überlegung ist. Denn selbst wenn wir zugeben, daß die Tendenz zur Loslösung vom denkenden Subjekt im Platonismus zu weit getrieben worden ist, müssen wir darum noch nicht glauben, die Wahrheit liege im anderen Extrem. Indem wir die beiden uns offenstehenden

Möglichkeiten betrachten, werden wir vielmehr suchen, durch ihre Ausnutzung eine Anpassung der Methode an den Charakter des Gegenstands der jeweilig behandelten Disziplin zu bewirken.

Für die Zahlentheorie zum Beispiel ist es am natürlichsten, den anschaulichen Begriff der Zahl zu verwenden. In der Tat kann man auf diese Art die Zahlentheorie begründen, ohne ein Axiom der vollständigen Induktion oder ein Unendlichkeitsaxiom einzuführen, wie man es einerseits bei Peano, andererseits bei Russell findet.

Will man den anschaulichen Zahlenbegriff vermeiden, so wird man veranlaßt, einen Begriff höherer Allgemeinheit einzuführen, wie den Allgemeinbegriff einer Behauptung, einer Funktion oder einer beliebigen Zuordnung; diese
A73 Begriffe sind jedoch ohne weiteres nicht | scharf abgegrenzt. Sie lassen sich freilich axiomatisch präzisieren, wie das in der axiomatischen Mengenlehre geschieht, aber dann wird das Axiomensystem sehr kompliziert.

Sie wissen, daß Frege versucht hat, die Arithmetik aus der reinen Logik abzuleiten, indem er diese als die allgemeine Theorie der Gesamtheit der mathematischen Gegenstände ansah. Obwohl dieser Unternehmung, die einem absoluten Platonismus entspricht, durch den Widerspruch von Russell-Zermelo die Grundlage entzogen wurde, hat die logische Schule doch nicht den Gedanken aufgegeben, die Arithmetik in ein System der Logik einzuordnen. Anstelle eines absoluten Platonismus hat man dabei axiomatische Voraussetzungen eingeführt. Hierdurch verliert nun allerdings das so gewonnene System den rein logischen Charakter.

Im System der *Principia Mathematica* sind es nicht nur die Axiome des Unendlichen und der Reduzierbarkeit, die über die reine Logik hinausgehen, sondern bereits die Grundannahme eines universellen Bereiches der Individuen und eines Bereiches der Grundprädikate hat nicht rein logischen Charakter. Daß uns eine Dingwelt zur Verfügung stehe, die gleichsam für die theoretische Behandlung präpariert ist, in der die Gegenständlichkeiten in Subjekte und Prädikate getrennt sind, dies ist in der Tat eine Annahme ad hoc.

Aber selbst mit solchen zusätzlichen Annahmen gelingt es nicht, die Arithmetik dem System der Logik ganz einzuverleiben. Da dieses System sich nach festen Regeln formal aufbaut, müßte man jedes Theorem der Arithmetik mit Hilfe einer bestimmten Reihe von Anwendungen der Regeln, ausgehend von gewissen der Grundaussagen des Systems, gewinnen können. Das ist nun aber nicht der Fall: Nämlich, wie Kurt Gödel bewiesen hat, überschreitet die Arithmetik jeden gegebenen Formalismus. (Die gleiche Feststellung gilt übrigens für die axiomatische Mengenlehre.)

Das Vorhaben, die Arithmetik aus der Logik abzuleiten, ist aus der traditionellen Ansicht hervorgegangen, die Logik stehe zur Arithmetik in der Beziehung des Allgemeinen zum Besonderen. Tatsächlich aber ist die mathematische Abstraktion, wie mir scheint, nicht von geringerem Grade, vielmehr nur anders gerichtet als die logische Abstraktion.

Alle diese Erwägungen vermindern jedoch keineswegs den Wert der Untersuchungen der Logiker, welche auf die systematische Entwicklung der Logik und auf die Formalisierung der mathematischen Beweise gerichtet sind. Hier sollte nur die These verfochten werden, daß für die Zahlentheorie die
A74 anschauliche Methode der Begründung die angemessenste ist. |

Im Gegensatz dazu erscheint in der Theorie des Kontinuums – also im Gebiete der Analysis – die intuitionistische Methode als ziemlich künstlich. Die Idee des Kontinuums ist eine geometrische Idee, welche durch die Analysis in arithmetischer Sprache ausgedrückt wird.

Ist die Methode der intuitionistischen Darstellung des Kontinuums der Idee des Kontinuums besser angepaßt als die übliche Methode?

Hermann Weyl will uns dieses glauben machen. Er wirft der üblichen Analysis vor, das Kontinuum in einzelne Punkte zu zerhacken. Aber trifft dieser Vorwurf nicht eher den Halbplatonismus, der das Kontinuum als eine Menge von arithmetischen Gesetzen betrachtet, als die gebräuchliche Methode? In der Tat besteht doch für die gebräuchliche Methode eine durchaus befriedigende Analogie zwischen der Art, wie sich ein fester Punkt aus dem Kontinuum löst, und der Art, wie eine durch ein arithmetisches Gesetz definierte reelle Zahl sich aus der Gesamtheit der reellen Zahlen löst, in der die einzelnen Elemente im allgemeinen nur implizite auftreten zufolge des quasi-kombinatorischen Begriffes einer Zahlenfolge.

Diese Analogie scheint mir der Natur des Kontinuums angemessener zu sein, als diejenige, die der Intuitionismus zwischen dem fließenden Charakter des Kontinuums und den Ungewißheiten der ungelösten arithmetischen Probleme aufstellt.

Es ist wahr, daß in der gebräuchlichen Analysis der Begriff einer stetigen Funktion und auch derjenige einer differenzierbaren Funktion eine Allgemeinheit besitzt, welche bei weitem unsere anschauliche Vorstellung von einer Kurve übersteigt. Trotzdem gelingt es in dieser Analysis, den Satz vom Maximum einer stetigen Funktion und das Rolle'sche Theorem zu beweisen; auf diese Weise kommt man der anschaulichen Vorstellung näher.

Die intuitionistische Methode dagegen geht zwar von einem viel eingeschränkteren Begriff der Funktion aus, gelangt aber nicht zu so einfachen Theoremen wie die eben erwähnten, vielmehr muß sie diese durch kompliziertere Theoreme ersetzen. Das rührt davon her, daß die intuitionistische Vorstellung nicht jenen Charakter der Geschlossenheit besitzt, der zweifellos zur geometrischen Vorstellung des Kontinuums gehört. Und es ist auch dieser Charakter, der einer vollkommenen Arithmetisierung des Kontinuums entgegensteht.

Durch diese Überlegungen werden wir darauf aufmerksam, daß der Dualismus von Arithmetik und Geometrie in Beziehung steht mit dem Gegensatz von Intuitionismus und Platonismus. Die Arithmetik wird beherrscht durch den Zahlbegriff. Dieser ist ursprünglich anschaulich; es tritt dann aber die
A75 platonistische Vorstellung von der Gesamtheit | der natürlichen Zahlen hinzu. In der Geometrie dagegen ist die platonistische Vorstellung des Raumes die beherrschende. Ausgehend von dieser aber finden dann Konstruktionen von Figuren als Prozesse im intuitionistischen Sinne statt.

So zeigt es sich, daß die beiden Tendenzen, die intuitionistische und die platonistische, ihre natürliche Rolle haben; sie ergänzen sich und man muß sich Gewalt antun, will man auf eine von beiden verzichten.

Aber der Dualismus dieser beiden Tendenzen, ebenso wie der von Arithmetik und Geometrie, hat nicht den Charakter einer vollen Symmetrie. Wie wir bereits bemerkt haben, ist es nicht angängig, Arithmetik und Geometrie ganz auf gleiche Stufe zu stellen: Der Zahlbegriff ist für unsern Geist unmittelbarer als die Vorstellung des Raumes. Desgleichen muß man anerkennen, daß die Annahmen des Platonismus einen Charakter von Transzendenz haben, der sich nicht im Intuitionismus findet.

Dieser Charakter von Transzendenz macht eine gewisse Vorsicht hinsichtlich jeder platonistischen Annahme erforderlich. Denn selbst wenn eine solche Annahme keineswegs willkürlich ist und sich mit Natürlichkeit einstellt, so kann es dennoch sein, daß die Vorstellungsweise, aus der sie hervorgeht, nur eine beschränkte Anwendung erlaubt, bei deren Überschreitung man in einen Widerspruch geraten würde.

Auf diese Möglichkeit müssen wir um so mehr acht haben, als wir durch das Streben nach Einfachheit angewiesen sind, unseren methodischen Prinzipien einen möglichst großen Anwendungsbereich zu geben. Und die Notwendigkeit einer Einschränkung wird oft nicht bemerkt.

So war es der Fall, wie wir gesehen haben, bei der Vorstellung der Totalität, die vom absoluten Platonismus zu weit erstreckt worden ist. Hierbei zeigte sich die Notwendigkeit einer Einschränkung durch die Entdeckung des

Widerspruchs von Russell-Zermelo.

Es ist daher wünschenswert, eine Methode zu finden, die uns garantiert, daß die platonistischen Annahmen, die den mathematischen Theorien zugrunde liegen, nicht die erlaubten Grenzen überschreiten. Die Annahmen, um die es sich dabei handelt, kommen hinaus auf Vorstellungen von Gesamtheiten und auf das Prinzip der Analogie oder der Permanenz der Gesetze. Und die Bedingung, welche die Anwendung dieser Leitgedanken einschränkt, ist keine andere als die der Widerspruchsfreiheit der Folgerungen, die sich aus jenen zugrundegelegten Annahmen ergeben.

Wie Sie wissen, geht Hilbert darauf aus, uns eine solche Garantie der
A76 Widerspruchsfreiheit zu geben, und seine Beweistheorie zielt darauf ab. |

Diese Theorie stützt sich teilweise auf die Ergebnisse der Logiker. Wie diese gezeigt haben, lassen sich die Beweise, die in der Arithmetik, in der Analysis und in der Mengenlehre geführt werden, formalisieren, d. h. sie können mit Hilfe logischer Symbole durch rechnerische Verfahren ausgedrückt werden, die sich nach festen Regeln vollziehen. Den Ausgangssätzen entsprechen dabei Ausgangsformeln und einer logischen Folgerung entspricht die Ableitung einer Formel aus einer oder mehreren Formeln gemäß einer bestimmten Regel. Bei dieser Formalisierung wird eine platonistische Annahme dargestellt durch eine Ausgangsformel oder durch eine Regel des Übergangs von erhaltenen Formeln zu weiteren Formeln. Auf diese Weise wird die Untersuchung nach Beweismöglichkeiten zurückgeführt auf Probleme, wie man sie in der elementaren Zahlentheorie antrifft. Insbesondere erhält man einen Beweis der Widerspruchsfreiheit einer Theorie, wenn es gelingt, zu zeigen, daß es unmöglich ist, zwei kontradiktorische Formeln A und $\overline{A}$ (die Überstreichung stellt die Negation dar) abzuleiten. Diese Unmöglichkeitsbehauptung, um deren Beweis es sich handelt, hat die gleiche Struktur wie z. B. die Behauptung, daß es unmöglich ist, die Gleichung $a^2 = 2b^2$ durch zwei ganze Zahlen a und b zu erfüllen.

Somit wird durch die symbolische Reduktion die Frage der Widerspruchsfreiheit einer Theorie auf eine Frage von elementar-arithmetischem Charakter zurückgeführt.

Ausgehend von diesem Grundgedanken hat Hilbert ein detailliertes Programm einer Beweistheorie entworfen und zugleich auch die Leitgedanken für die Durchführung angegeben. Seine Absicht war dabei, sich an anschauliche kombinatorische Überlegungen zu halten; auf diese wollte er sich gemäß seinem „finiten Standpunkt" beschränken.

In diesem Rahmen des Finiten wurde die Theorie bis zu einem gewissen

Punkt entwickelt. Dazu haben mehrere Mathematiker beigetragen: Ackermann, von Neumann, Skolem, Herbrand, Gödel, Gentzen.

Diese Untersuchungen sind indessen nicht über einen verhältnismäßig beschränkten Bereich hinausgekommen. Man gelangte in der Tat nicht einmal dazu, die Widerspruchsfreiheit der axiomatischen Zahlentheorie zu beweisen. Andererseits weiß man, daß die Formalisierung dieser Theorie sich vollziehen läßt, indem man zu dem gewöhnlichen Logikkalkül die formalisierten Axiome von Peano sowie die rekursiven Definitionen der Summe $a + b$ und des Produktes $a.b$ hinzufügt.

Diese Situation wurde geklärt durch ein allgemeines Theorem von Gödel, gemäß welchem ein Beweis der Widerspruchsfreiheit einer formalisierten Theo-
A77 rie nicht dargestellt werden kann mit Hilfe dieses | Formalismus selbst. Aus diesem Theorem erhält man folgendes speziellere Ergebnis: Es ist unmöglich, mit elementaren kombinatorischen Methoden die Widerspruchsfreiheit einer solchen formalisierten Theorie zu beweisen, im Rahmen deren man jeden Beweis eines arithmetischen Satzes darstellen kann, der mit den elementaren kombinatorischen Methoden geführt ist.

Nun läßt sich dieser Satz, wie es scheint, auf den Formalismus der axiomatischen Zahlentheorie anwenden. Wenigstens haben uns alle bisher unternommenen Versuche kein einziges Beispiel eines elementaren kombinatorischen Beweises geliefert, den man nicht in diesem Formalismus darstellen könnte, und die Methoden, durch welche es in den betrachteten Fällen gelingt, einen Beweis in den genannten Formalismus zu übersetzen, scheinen generell hierfür zu genügen. Indem wir uns auf diesen Anschein stützen,[1] gelangen wir zu der Folgerung, daß ein stärkeres Mittel als die elementaren Kombinations-Methoden notwendig ist, um die Widerspruchsfreiheit der axiomatischen Zahlentheorie zu beweisen.

Eine Entdeckung von Gödel und Gentzen führt uns zu einer solchen stärkeren Methode. Sie haben unabhängig voneinander gezeigt, daß die Widerspruchsfreiheit der intuitionistischen Arithmetik die Widerspruchsfreiheit der axiomatischen Zahlentheorie nach sich zieht. Zu diesem Ergebnis gelangten sie mit Hilfe der Formalisierung der intuitionistischen Logik und

[1]Wenn man sich anschickt zu zeigen, daß es möglich ist, jeden elementaren kombinatorischen Beweis eines arithmetischen Satzes in den Formalismus der axiomatischen Zahlentheorie zu übersetzen, sieht man sich der Schwierigkeit gegenüber, den Bereich der elementaren kombinatorischen Methoden genau abzugrenzen.

Arithmetik, wie sie von Heyting durchgeführt wurde. Die Überlegung ist verhältnismäßig einfach und erfordert nur elementare Methoden. Um aus dem genannten Ergebnis den Schluß zu ziehen, daß die axiomatische Zahlentheorie widerspruchsfrei ist, genügt es, sich auf die Widerspruchsfreiheit der intuitionistischen Arithmetik zu stützen.

Dieser Beweis der Widerspruchsfreiheit der axiomatischen Zahlentheorie zeigt uns unter anderem, daß der Intuitionismus durch seine abstrakten Folgerungsweisen die elementaren kombinatorischen Methoden wesentlich überschreitet.

Es stellt sich nun die Frage, ob die verstärkte Methodik der Beweistheorie,
die sich durch die Zulassung der abstrakten Folgerungsweisen des Intuitionis-
A78 mus ergibt, uns in den Stand setzt, die Wider- | spruchsfreiheit der Analysis
zu beweisen. Die Beantwortung dieser Frage würde sehr wichtig und sogar
entscheidend sein im Hinblick auf die Beweistheorie wie auch, so scheint es
mir, in Hinsicht auf die Rolle, die dem Intuitionismus zuzuschreiben ist.

Die Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik sind in vollem Gange. Mehrere grundsätzliche Fragen bleiben offen, und wir wissen nicht, was uns in diesem Bereich noch zu entdecken beschieden ist. Jedenfalls erwecken diese Untersuchungen in ihren wechselnden Aspekten unsere Neugier – ein Gefühl, das nur in geringerem Maße von den klassischen Bereichen der Mathematik hervorgebracht wird, die bereits eine größere Vollkommenheit erreicht haben.