Bernays Project: Text No. 19

Mathematische Existenz und Widerspruchsfreiheit (1950)

Mathematical existence and consistency

(*Etudes de Philosophie des sciences en hommage à Ferdinand Gonseth*,
Neuchatel: Editions du Griffon, pp. 11–25;
repr. in *Abhandlungen*, S. 92–106)

11/A92 | In der Philosophie der Mathematik ist es eine geläufige These, durch die man das Spezifische der Sachlage in der Mathematik zu kennzeichnen pflegt, daß Existenz im mathematischen Sinne nichts anderes bedeute als Widerspruchsfreiheit. Hiermit ist gemeint, daß für die Mathematik keine philosophische Existenzfrage bestehe. Jene These ist jedoch ihrem Inhalt nach nicht so einfach und auch nicht so selbstverständlich, wie es scheinen kann, und eine Betrachtung über sie mag geeignet sein, auf manche in der philosophischen Diskussion aktuellen Fragen ein Licht zu werfen.

Beginnen wir mit dem, wogegen sich die These richtet; sie steht ja offensichtlich in Opposition gegen die Ansicht, wonach den mathematischen Gegenständen ein ideales Sein zuzuschreiben ist (das heißt eine Existenzweise unabhängig einerseits vom Gedacht- oder Vorgestelltwerden, und andererseits auch von dem Auftreten als Bestimmungsstück von etwas Wirklichem), und wonach ferner die Existenzaussagen der Mathematik mit Bezug auf dieses ideale Sein zu verstehen sind. Gegen diese Auffassung spricht von vornherein der Umstand, daß hier ohne ersichtliche Notwendigkeit eine Voraussetzung eingeführt wird, die methodisch nichts leistet. Zur Verdeutlichung dessen mag es vorteilhaft sein, den Vergleich mit den Daseinsbehauptungen im naturwissenschaftlichen Gebiet heranzuziehen. Wie bekannt, hat man vom Standpunkt einer extrem phänomenalistischen Philosophie versucht, auch aus der Darstellung der Naturzusammenhänge die Annahme von Gegenständen, die unabhängig vom Wahrnehmen existieren, auszuschalten. Jedoch genügt bereits eine rohe Orientierung über unsere Erfahrung, um ersichtlich zu machen, daß ein solches Beginnen – abgesehen von den mannigfachen Hindernissen,

die sich seiner Durchführung entgegenstellen – auch vom Standpunkt des wissenschaftlichen Anliegens unangemessen ist. In terminis der Wahrnehmung allein gewinnen wir keine übersichtlichen Gesetzlichkeiten. Unsere Erlebniswelt müßte eine total andere sein, damit eine auf Begriffe des rein Wahrneh-
12 mungsmäßigen | gegründete Theorie erfolgreich sein könnte. So ist also das Ansetzen objektiv existierender Naturgegenständlichkeiten nicht etwa nur ei-
A93 ne Auswirkung unserer instinktiven Einstellung, sondern vom Stand|punkt der wissenschaftlichen Methodik sachgemäß. (Das gilt auch noch für die heutige Quantenphysik, wenngleich nach dieser eine völlig genaue Fixierbarkeit der Zustände nicht besteht.)

Stellen wir nun hiermit den Fall mathematischer Gegenständlichkeiten in Vergleich, so besteht da der offenkundige Unterschied, daß für die Verwendung der mathematischen Objekte im theoretischen und im konkreten Gebrauch eine losgelöste Existenz dieser Objekte (unabhängig von ihrem jeweiligen Auftreten als Bestimmungsstücke von etwas anderweit Gegenständlichem) keine Rolle spielt, während doch die Annahme objektiv physikalischer Gegenständlichkeiten nur dadurch ihren Erklärungswert besitzt, daß die betreffenden Gegenstände und Zustände als zu gewisser Zeit und an gewissem Ort vorhanden gesetzt werden.

Was wir hier bezüglich der mathematischen Objekte feststellen, gilt allgemein von allen den Gegenständen, die man als „ideelle Gegenstände" bezeichnen kann. Gemeint sind solche Gegenstände der Betrachtung, denen jedenfalls nicht direkt der Charakter des Wirklichen, genauer des selbständig Wirklichen, zuzuschreiben ist, wie zum Beispiel Gattungen, Gesamtheiten, Qualitäten, Formgestalten, Normen, Beziehungen, Begriffe. Die mathematischen Gegenstände gehören alle hierzu.

Man kann der Ansicht sein – und diese Ansicht ist ja von manchen Philosophen vertreten worden – daß alle Aussagen über ideelle Gegenstände bei genauer Ausdrucksweise auf Aussagen über Wirkliches zurückzuführen seien. Mit der Durchführung einer solchen Reduktion würde insbesondere auch eine Deutung der mathematischen Existenz-Aussagen geliefert. Hier erheben sich aber grundsätzliche Schwierigkeiten. Die Aufgabe der Reduktion erweist sich zunächst schon bei etwas genauerem Zusehen als gar nicht eindeutig bestimmt, da verschiedene Begriffe des Wirklichen auseinandertreten: mit dem „Wirklichen" kann etwa gemeint sein das objektiv Reale oder das erlebnismäßig Gegebene oder das konkret Dingliche. Je nach der Auffassung vom Wirklichen gestaltet sich die Aufgabe der Zurückführung völlig verschieden. Überdies aber hat es nicht den Anschein, als ob auf irgendeine dieser Arten die gewünschte Zurückführung in befriedigender Weise gelingen könne.

Was in dieser Beziehung insbesondere die Bemühungen der Schule des logischen Empirismus um eine „Einheitssprache“ der Wissenschaft anbelangt, so ist bemerkenswert, daß man neuerdings bewußtermaßen von dem Versuch der Reduktion aller Aussagen auf solche über Konkretes Abstand nimmt,
13/A94 wozu wohl besonders die Erfordernisse im |$_A$ Gebiet der Semantik (einer | Sinnesanalyse der syntaktischen Formen der Sprache) Anlaß gegeben haben.

Für unsere Erörterung werden wir hinsichtlich der Frage, ob sich die Einführung ideeller Gegenstände in der Wissenschaftssprache grundsätzlich vermeiden läßt, keine Voraussetzung zu Grunde legen. Die bestehende Situation ist jedenfalls die, daß wir in den Gebieten der Forschung (und sogar in der Betrachtungsweise des täglichen Lebens) allenthalben mit ideellen Gegenständen zu tun haben; und wir übernehmen hier diese geläufige Art der Betrachtung.

In dieser Einstellung ist noch keineswegs eine Annahme über eine selbständige Existenz ideeller Gegenstände enthalten. Es ist aber begreiflich, daß tatsächlich eine derartige Annahme oft an die ideellen Gegenstände geknüpft worden ist – zumal wenn wir uns der Ansicht von Ferdinand Gonseth anschließen, wonach der allgemeinere Gegenstandsbegriff aus einer primären gröberen Gegenstandsvorstellung erwächst, die in einer „physique de l’objet quelconque“ ihren Ausdruck findet. In Bezug auf die gröbere Dinglichkeit ist ja der Charakter des Objektiven aufs Engste verknüpft mit der Existenz unabhängig von unserem Wahrnehmen und Vorstellen, und so ist es leicht zu verstehen, daß wir auch bei den Gegenständen allgemeiner Art geneigt sind, den objektiven Charakter einem unabhängigen Existieren zuzuschreiben. Eine Nötigung hierzu besteht jedoch keineswegs. Insbesondere ist in dieser Hinsicht von Bedeutung, daß wenn wir uns einer Annahme über ideale Existenz enthalten, dieses uns nicht hindert, Existenzaussagen über ideelle Gegenstände zu verwenden, die ohne eine solche besondere Annahme interpretierbar sind. Wir wollen uns die wohl hauptsächlich in Betracht kommenden Fälle solcher Interpretationen vergegenwärtigen:

a) Mit Existenz eines ideellen Gegenstandes kann die deutliche und vollständige Vorstellbarkeit des Gegenstandes gemeint sein.

b) Existenz eines ideellen Gegenstandes von bestimmter Art kann besagen, daß dieser an etwas naturgegenständlich Gegebenem verwirklicht ist. So zum Beispiel besagt die Feststellung, daß ein gewisses Wort in einer Sprache verschiedene Bedeutungen besitzt, daß im Gebrauch dieser Sprache Verwendungen des Wortes in verschiedener Bedeutung vorkommen.

c) Eine Existenzbehauptung betreffend ideelle Gegenstände kann gemeint sein mit Bezug auf ein strukturiertes Gebilde, in welches jener Gegenstand als Bestandsstück eingeht. Beispiele hierfür sind Aussagen über Bestandteile einer Figur, etwa wenn wir sagen „die Konfiguration des Würfels enthält 12 Kanten", oder Aussagen über etwas, das in einem bestimmten Drama
14/A95 vorkommt, oder etwa über Bestimmungen, die im | römischen Recht enthalten sind. Wir wollen Existenz in diesem Sinne, das heißt Existenz im Rahmen einer umfassenden Struktur, „bezogene Existenz“ nennen.

d) Existenz von ideellen Gegenständen kann besagen, daß man bei gewissen Betrachtungen auf solche Gegenstände geführt wird. Zum Beispiel die Aussage, daß es Urteile gibt, in welchen Beziehungen als Subjekte auftreten, bringt zum Ausdruck, daß wir in der Bildung von Urteilen auch zu solchen Urteilen „zweiter Stufe“ (wie man sie nennt) geführt werden.

Im Fall *a)* ist die Existenz des ideellen Gegenstandes nichts anderes als die Vorstellungs-Gegenständlichkeit (im Sinne des eigentlichen Vorstellens); im Fall *b)* kommt die Existenz auf eine Naturwirklichkeit hinaus; im Falle *c)* handelt es sich um einen immanenten Sachverhalt innerhalb einer betrachteten Gesamtstruktur.

In diesen drei Fällen wird durch die Interpretation der Existenzaussage unmittelbar eine Art von inhaltlicher Reduktion gegeben. Beim Fall *d)* verhält es sich insofern anders, als das „geführt werden“ auf Gegenstände nicht im Sinne einer bloßen psychologischen Tatsächlichkeit, sondern im Sinne des objektiv Sachgemäßen zu verstehen ist. Hier wird Bezug genommen auf die Entwicklung der geistigen Situationen, mit den in ihr wirksamen Momenten der Freiheit und Verbindlichkeit, – Freiheit in dem Sinne, in welchem Gonseth von einer „charte de nos libertés“ spricht (zum Beispiel die Freiheit, zu einer als überblickbar vorgestellten Gesamtheit von Elementen ein weiteres Element hinzuzudenken), andererseits Verbindlichkeit, wie sie zum Beispiel darin besteht, daß die Mittel, die wir zur Beschreibung und zur geistigen Beherrschung von Gegenständlichkeiten verwenden, ihrerseits neue, und sogar eventuell komplexere Gegenständlichkeiten ergeben.

Doch auch bei dieser Deutung der Existenzaussagen wird nicht eine Annahme eines unabhängigen Existierens von idealen[a] Gegenständen eingeführt. Die Existenzaussage hält sich an den jeweiligen konzeptionellen Zusammenhang, und auf eine über diesen hinausgehende philosophische (ontologische)

[a]The text has “ideal” here, but “ideell” seems to be intended.

Modalitätsfrage wird nicht eingetreten. Ob eine solche überhaupt sinnvoll ist, bleibt dahingestellt.

Diese Überlegungen beziehen sich auf ideelle Gegenstände im allgemeinen. Wie steht es nun speziell mit den mathematischen Gegenständen, die ja, wie schon bemerkt, zu den ideellen Gegenständen gehören? Indem wir auf diese unsere eben angestellte Betrachtung zur Anwendung bringen, bemerken wir, daß wir schon eine Art der Antwort auf die Frage haben, was Existenz in der Mathematik bedeuten kann. Jedoch eine einfachere Antwort will ja
A96 die zur Erörterung stehende | These bieten, daß Existenz in Bezug auf mathematische Gegenstände gleichbedeutend ist mit Wider|spruchsfreiheit. Für die Diskussion dieser Behauptung haben wir nun schon verschiedene klärende Gesichtspunkte gewonnen. Wenden wir uns jetzt dieser Diskussion zu.

Hierfür möge zunächst die offensichtlich etwas abgekürzte Formulierung der Behauptung durch eine ausführlichere ersetzt werden. Gemeint ist gewiß: Existenz eines Gegenstandes (eines Gebildes, einer Struktur) mit gewissen geforderten Eigenschaften bedeutet im mathematischen Sinne nichts anderes als die Widerspruchsfreiheit jener geforderten Eigenschaften. Als einfaches Beispiel zur Erläuterung mag das folgende dienen. Es gibt eine gerade Primzahl, dagegen gibt es keine durch 6 teilbare Primzahl. In der Tat: die Eigenschaften „Primzahl“ und „geradzahlig“ sind vereinbar, dagegen die Eigenschaften „Primzahl“ und „durch 6 teilbar“ widersprechen sich. Beispiele wie dieses erwecken den Eindruck, daß die Erklärung der mathematischen Existenz durch Widerspruchsfreiheit völlig befriedigend sei. Es ist aber zu beachten, daß auch hier nicht eine Leistungsfähigkeit der Erklärung aufgezeigt wird; nämlich es wird nur vorgeführt, wie man aus dem Vorhandensein eines Beispiels auf die Widerspruchsfreiheit und andererseits aus einem Widerspruch auf die Nicht-Existenz schließt, aber nicht, wie man aus einer zuerst festgestellten Widerspruchsfreiheit auf Existenz schließt; und das wäre doch gerade der entscheidende Fall.

Diese eine Bemerkung genügt nun schon, um uns stutzig zu machen; denn wir werden darauf aufmerksam, daß ja in der Mathematik üblichermaßen die Existenzbehauptungen nicht aus Nachweisen von Widerspruchsfreiheit gefolgert werden, sondern daß umgekehrt die Nachweise von Widerspruchsfreiheit durch Aufweisungen von Modellen geliefert werden, wobei die Erfüllung der geforderten Eigenschaften jeweils im Sinne einer positiven Feststellung verifiziert wird. Mit anderen Worten: die üblichen Beweise für Widerspruchsfreiheit sind Nachweise der *Erfüllbarkeit* von Bedingungen, genauer: der Erfüllung von Bedingungen an einer ideellen Gegenständlichkeit.

Es war eine ungewohnte Neuerung, welche die Hilbertsche Beweistheorie dadurch brachte, daß hier Nachweise der Widerspruchsfreiheit in dem Sinne verlangt werden, daß die Unmöglichkeit des deduktiven Zustandekommens eines Widerspruchs gezeigt wird. Ein solcher Nachweis hat zur Voraussetzung, daß die in Betracht kommenden Verfahren des Deduzierens sich deutlich abgrenzen lassen. Die Technik für eine solche Präzisierung der Verfahren des logischen Schließens wird durch die Methoden der symbolischen Logik geliefert. Wir sind dadurch in der Lage, die in den mathemati-
A97 schen Theorien, insbesondere der Zah|lentheorie und der Theorie der Funktionen, gebrauchten Schlußweisen durch ein genau festgelegtes System von
16 Regeln zu umgrenzen. Das ist jedoch nur eine Abgrenzung der | *de facto* in den Theorien verwendeten Schlüsse. Zur Präzisierung eines uneingeschränkten Begriffes der Widerspruchsfreiheit gelangt man aber so im allgemeinen nicht; eine solche wird vielmehr nur für einen gewissen, verhältnismäßig elementaren Bereich der logisch-mathematischen Begriffsbildung erreicht. Für diesen läßt sich der Begriff des mathematischen Beweises so umgrenzen, daß man zeigen kann: jede Forderung, die nicht deduktiv auf einen Widerspruch führt, läßt sich (in einem genauer bestimmten Sinne) erfüllen. Bei diesem Gödelschen Vollständigkeitssatz wird besonders ersichtlich, daß das hier konstatierte Zusammenfallen von Widerspruchsfreiheit und Erfüllbarkeit nichts weniger als eine Selbstverständlichkeit, sondern wesentlich durch die Beschaffenheit des betrachteten Bereiches von Aussagen und Schlüssen bedingt ist. Geht man über den genannten Bereich hinaus, so führt die Präzisierung der Beweismethoden nicht mehr zur Übereinstimmung von Widerspruchsfreiheit und Erfüllbarkeit; diese Übereinstimmung läßt sich – wie wiederum von Gödel gezeigt wurde – im allgemeinen (bei naturgemäßen an den Begriff der Beweisbarkeit gestellten Anforderungen) nicht erreichen.

Freilich besteht hier die Möglichkeit, den Begriff des Beweises – gemäß einem von Carnap und von Tarski ausgebildeten Verfahren – durch einen allgemeineren Begriff der „Folgerung“ so zu erweitern, daß für die sich daran knüpfenden Begriffe der logischen Gültigkeit und des Kontradiktorischen (zum Widerspruch führenden) die Alternative resultiert, daß jeder rein mathematische Satz entweder logisch gültig oder kontradiktorisch ist, und daß daher auch jede Anforderung an einen mathematischen Gegenstand entweder widerspruchsvoll oder durch einen Gegenstand erfüllt ist.

Hiermit scheint nun die Gleichsetzung von Existenz und Widerspruchsfreiheit ihre exakte Bestätigung zu finden. Sieht man aber genauer zu, so bemerkt man, daß hier das Entscheidende durch die Definitionen sozusagen vorweggenommen wird. Nämlich auf Grund der Definitionen gilt hier, daß eine mathematische Anforderung an einen mathematischen Gegenstand stets schon dann kontradiktorisch ist, wenn sie für keinen Gegenstand erfüllt ist. Die Übereinstimmung zwischen Widerspruchsfreiheit einer Anforderung und Erfüllung durch einen Gegenstand besagt hiernach im mathematischen Gebiet nicht mehr, als daß in einer Gattung G ein Gegenstand, welcher einer Bedingung B Genüge leistet, dann und nur dann existiert, wenn nicht jeder Gegenstand der Gattung G gegen die Bedingung B verstößt.

A98 | Das ist allerdings – vom Standpunkt der klassischen Mathematik und Logik – eine gültige Gleichwertigkeits-Beziehung. Doch die Verwendung dieser Äquivalenz zur Deutung der Existenzaussagen ist sicherlich unbefriedigend:
17 Wenn mit Bezug auf einen allgemeinen Satz die Behauptung, | daß dieser eine Ausnahme erleidet, als eine existentiale Aussage der inhaltlichen Erklärung als bedürftig erachtet wird, so ist die Negation jenes allgemeinen Satzes gewiß nicht inhaltlich deutlicher. Die Gleichwertigkeit der Negation eines allgemeinen Satzes mit einem Existenzsatz hat ja (in der klassischen Mathematik) unter anderem gerade die Rolle, daß durch sie der Sinn der Negation eines allgemeinen Satzes deutlicher expliziert wird. Kennzeichnend für diesen Umstand ist auch, daß der Brouwersche Intuitionismus, welcher jene Gleichwertigkeit nicht anerkennt, zugleich auch der schlichten Negation eines allgemeinen mathematischen Satzes überhaupt einen Sinn abspricht und an ihrer Stelle eine verschärfte Negation, die Absurdität, einführt, welche wiederum ein existentiales Moment in sich schließt (da „Absurdität" zu verstehen ist als effektive Möglichkeit der Widerlegung).

Die Schwierigkeiten, auf die wir hier geführt worden sind, rühren letzten Endes davon her, daß der Begriff der Widerspruchsfreiheit seinerseits gar nicht unproblematisch ist. Bei der Zustimmung, welche die Erklärung von mathematischer Existenz durch Widerspruchsfreiheit so weitgehend findet, spricht gewiß zu einem erheblichen Teil der Umstand mit, daß man sich auf Grund von einfachen Fällen, die man im Sinne hat, eine zu simple Vorstellung von dem macht, was Widerspruchsfreiheit (Verträglichkeit) von Bedingungen ist. Man stellt sich die Vereinbarkeit der Bedingungen als etwas dem Komplex der Bedingungen gleichsam direkt Anhaftendes vor, derart, daß man nur den Inhalt der Bedingungen deutlich auseinanderzulegen brauche, um zu sehen, ob sie miteinander einhellig sind oder nicht. Tatsächlich ist aber die Rolle der Bedingungen die, daß sie sich in funktionaler Verwendung und durch Kombination miteinander auswirken. Das, was auf solche Weise sich ergibt, ist nicht als Bestandteil in dem Gegebenen der Bedingungen enthalten.

Die irrtümliche Vorstellung von einer solchen Inhärenz ist es wohl auch, aus welcher die Meinung von dem tautologischen Charakter der mathematischen Sätze hervorgegangen ist.

Doch abgesehen von den Schwierigkeiten, die mit dem Begriff der Widerspruchsfreiheit und mit dem Verhältnis von Widerspruchsfreiheit und Erfüllbarkeit zusammenhängen, ist noch ein ganz anderer Gesichtspunkt, der uns darauf hinweist, daß es jedenfalls nicht durchweg in der Mathematik angemessen ist, Existenz als Widerspruchsfreiheit zu interpretieren. Betrachten
A99 wir den Fall von Existenz-Axiomen einer axio|matisch aufgebauten mathematischen Theorie. Wird hier die Existenzaussage als Behauptung von Widerspruchsfreiheit gedeutet, so ergibt sich insofern eine Verwirrung, als ja Widerspruchsfreiheit bei einer axiomatischen Theorie sich auf das Gesamtsystem der Axiome bezieht. Eine Anforderung, welche Widerspruchsfreiheit
18 betrifft, kann wohl als vorgängiges Postulat | für die Gestaltung eines Axiomensystems fungieren. Dagegen haben die aufgestellten Axiome – jedenfalls bei der gebräuchlichen Form der Axiomatik – stets den Sinn, Bindungen zu stiften. So besagt ein Existenz-Axiom nicht, daß wir einen gewissen Gegenstand unter bestimmten Bedingungen ansetzen *können*, sondern vielmehr, daß wir unter diesen Bedingungen gebunden sind, ihn anzusetzen.

Wir haben andrerseits auch, aufGrund unserer eingangs angestellten Betrachtungen, eine angemessene Auffassung der axiomatischen Existenz-Aussagen in Bereitschaft. Bedenken wir nämlich, daß ein Axiomensystem im Ganzen als eine Beschreibung eines gewissen Strukturgebildes sich betrachten läßt, zum Beispiel ein Axiomensystem der euklidischen Geometrie als Beschreibung der Struktur einer euklidischen Mannigfaltigkeit, so erkennen wir, daß die Existenz-Behauptungen innerhalb einer axiomatischen Theorie als Aussagen über *bezogene Existenz* aufgefaßt werden können: So wie in der Konfiguration eines Würfels von jeder Ecke drei Kanten ausgehen, so geht in der Mannigfaltigkeit des euklidischen Raumes durch je zwei verschiedene Punkte eine Gerade; und der Satz der euklidischen Geometrie, daß zu je zwei Punkten eine durch sie beide gehende Gerade existiert, bringt jenen Sachverhalt von bezogener Existenz zum Ausdruck.[1]

[1]Das sozusagen Unproblematische der bezogenen Existenz ist von Bruno von Freytag-Löringhoff in seiner Schrift *Die ontologischen Grundlagen der Mathematik* (*vide* [**?**]) hervorgehoben worden, der die vorliegende Untersuchung manche Anregungen verdankt. Der Verfasser spricht in diesem Sinne von dem „kleinen Existenzproblem“. Seine Ansicht unterscheidet sich jedoch von der hier dargelegten insofern, als er die Gleichsetzung von Existenz

Freilich ist zuzugeben, daß mit dem Gesichtspunkt der bezogenen Existenz, so angemessen er für die faktische Handhabung des Existenzbegriffes in der Mathematik ist, die philosophische Frage bezüglich der mathematischen Existenz gleichsam nur verschoben wird. Denn die bezogene Existenz ist ja
A100 wissenschaftlich bedeutungsvoll nur, sofern die | betreffende Gesamtstruktur, auf welche die Bezogenheit besteht, als mathematisch existent anzusehen ist. Es erhebt sich somit die Frage, wie es sich mit der Existenz jener Gesamt-Strukturen verhält, also etwa mit der Existenz der Zahlenreihe, der Existenz des Kontinuums, der Existenz der euklidischen Raum-Struktur und auch anderer Raum-Strukturen.

Hier treffen wir nun Beispiele, bei denen die Gleichsetzung von Existenz und Widerspruchsfreiheit ihre Berechtigung hat. So ist es berechtigt, wenn wir sagen, die Existenz der nichteuklidischen (Bolyai-Lobatschefskijschen)
19 | Geometrie besteht in ihrer Widerspruchsfreiheit. Aber selbst in einem solchen Falle verhält es sich doch so, daß der Nachweis der Widerspruchsfreiheit durch eine Aufweisung erfolgt, und daß hierbei die Behauptung der Widerspruchsfreiheit verschärft wird zur Feststellung der Existenz eines die Axiome erfüllenden Modells, – „Existenz“ hier bezogen auf den Rahmen der Arithmetik der reellen und komplexen Zahlen. Auf analoge Art lassen sich mannigfache Nachweise von Widerspruchsfreiheit im Sinne der Erfüllbarkeit erbringen, so der Nachweis der Widerspruchsfreiheit einer nichtarchimedischen Geometrie (das heißt einer Geometrie mit unendlich kleinen Strecken), ferner die Widerspruchsfreiheit des Rechnens mit den imaginären Größen, unter Zugrundelegung der Theorie der reellen Zahlen. Die meisten derartigen Modell-Konstruktionen erfolgen im Rahmen der Theorie des mathematischen Kontinuums (Theorie der reellen Zahlen). Für die Axiome des Kontinuums ihrerseits läßt sich wiederum, ausgehend von der Zahlenreihe, unter wesentlicher Hinzunahme mengentheoretischer Bildungsprozesse, die Erfüllbarkeit erkennen.

Wohin aber führen alle diese Reduktionen? Wir gelangen schließlich zur Bezugnahme auf einen ideellen Rahmen. Es ist ein Gedankensystem, das eine Art der methodischen Einstellung involviert, auf welches letzten Endes die mathematischen Existenz-Setzungen bezogen werden.

und Widerspruchsfreiheit als dem kleinen Existenzproblem angemessen erachtet, während im Vorliegenden der Gesichtspunkt der bezogenen Existenz gerade dem der Gleichsetzung von Existenz und Widerspruchsfreiheit als eine berichtigende Auffassung entgegengestellt wird.

Beschreibend können wir feststellen, daß der Mathematiker sich in diesem ideellen Rahmen mit Sicherheit bewegt und daß er hier über eine Art erworbener Evidenz verfügt (für welche sich Bildungen auch von komplizierterer Art, wie unendliche Zahlenfolgen, als etwas Gegenständliches darstellen). Die Widerspruchsfreiheit dieser Methodik ist in den mannigfachsten kombinierten Formen der Verwendung erprobt, so daß an ihrem Bestehen *de facto* nicht gezweifelt wird; sie bildet selbstverständlich die Vorbedingung dafür, daß die in dem ideellen Rahmen vollzogenen Existenzsetzungen Geltung haben. Wir bemerken aber hier wiederum, daß wir die Existenz nicht einfach mit der
A101 Widerspruchs|freiheit identifizieren können. Denn die Widerspruchsfreiheit bezieht sich auf den Rahmen als Ganzes, nicht auf das Einzelne als existierend Gesetzte.

Überlegen wir uns den Sachverhalt des Näheren am Beispiel der Zahlenreihe. Die Setzung der Zahlenreihe ist in dem Rahmen unseres mathematischen Operierens inbegriffen. Was aber bedeutet Widerspruchsfreiheit der Zahlenreihe? Wenn wir uns zur Beantwortung dieser Frage begnügen, daran zu appellieren, daß eine unbegrenzte Fortsetzung des Zählprozesses in einer idealisierenden Vorstellungsart auffaßbar ist, dann verstehen wir die Existenz als Gegenständlichkeit, – sei es nun, daß wir die Zahlenreihe bloß als einen Bereich von ideellen Gegenständen oder, gemäß einer verstärkten Idealisierung, selbst als ein Strukturgebilde auffassen, – und | entnehmen erst aus der Gegenständlichkeit die Widerspruchsfreiheit. Soll aber Widerspruchsfreiheit von der logischen Seite her eingesehen werden, so müssen einerseits die in der Vorstellung der Zahlenreihe enthaltenen Bedingungen begrifflich gefaßt werden, und wir müssen andererseits eine genauere Vorstellung von dem, was logische Folgerung ist, zu Grunde legen.

Wir werden dabei auch gewahr, daß der Begriff der logischen Folgerung durch die Möglichkeit der Zusammensetzung der Folgerungs-Prozesse zu einer ähnlichen Art einer unbegrenzten Mannigfaltigkeit wie derjenigen der Zahlenreihe Anlaß gibt. Ferner zeigt sich, daß der Bereich des Logischen in engerem oder weiterem Sinne gefaßt werden kann und dadurch hinsichtlich seiner angemessenen Abgrenzung einer Problematik unterliegt.

Wir kommen hiermit in das Fragengebiet der mathematisch-logischen Grundlagen-Forschung, dessen Umstrittenheit in einem starken Kontrast steht zu der erwähnten Sicherheit des mathematischen Operierens im Rahmen der üblichen Methoden.

Mit den hier vorliegenden Schwierigkeiten hat es folgende Bewandtnis: Der übliche Rahmen des mathematischen Operierens ist zwar für den Ge-

brauch in den klassischen Theorien hinlänglich bestimmt; es bleiben aber dabei doch hinsichtlich der Abgrenzung und Art der Fundamentierung gewisse Unbestimmtheiten. Wenn man diese zu beheben trachtet, so sieht man sich vor Alternativen gestellt, und in der Entscheidung über diese treten verschiedene Auffassungen auseinander. Die Verschiedenheit der Ansichten macht sich insbesondere geltend bei dem Bestreben, die Fundamentierung der Mathematik von einem Standpunkt der Voraussetzungslosigkeit zu gewinnen, derart, daß man sich nur auf das absolut Selbstverständliche bzw. das absolut Evidente stützt. Es zeigt sich da, daß über die Frage, was als
A102 selbstverständlich | bzw. als völlig evident anzusehen ist, durchaus keine Einhelligkeit besteht.

Diese Meinungsverschiedenheit ist nun freilich weniger irritierend, wenn man sich von dem Gedanken des Erfordernisses einer voraussetzungslosen, von einem völlig *a priori* bestimmten Ausgangspunkt zu gewinnenden Begründung frei macht und dafür jenen erkenntnistheoretischen Gesichtspunkt der Philosophie Gonseths übernimmt, wonach der Charakter einer Dualität, durch das Zusammenwirken rationaler und erfahrungsmäßiger Momente, nicht auf die naturwissenschaftliche Erkenntnis beschränkt ist, sondern sich in allen Erkenntnisgebieten findet. Speziell für die abstrakten Gebiete des Mathematischen und Logischen bedeutet dieses, daß auch hier die Gedankenbildungen nicht rein *a priori* festgelegt sind, sondern vielmehr aus einer Art des geistigen Experimentierens erwachsen. Diese Auffassung finden wir bei der Betrachtung der mathematischen Grundlagen-Forschung bestätigt. Es zeigt
21 sich hier in der Tat, daß man sich genötigt | sieht, den methodischen Rahmen durch Probieren den Erfordernissen der Aufgabe anzupassen. Ein solches Experimentieren, das vom Standpunkt der traditionellen Auffassung als Ausdruck des Mißlingens beurteilt werden muß, erscheint unter dem Gesichtspunkt der geistigen Erfahrung als durchaus sachgemäß. Insbesondere sind von diesem Standpunkt die Versuche, die sich als nicht durchführbar erwiesen haben, nicht *eo ipso* als methodische Fehler anzusprechen, sondern können (wenn sie sinngemäß angesetzt und konsequent ausgeführt sind) als Etappen des geistigen Experimentierens Würdigung verdienen. Auch die Mehrheit der konkurrierenden Grundlegungs-Unternehmungen hat bei dieser Auffassung nichts Anstößiges, sondern erscheint in Analogie zu der Vielheit konkurrierender Theorien, wie wir sie in etlichen Entwicklungsstadien naturwissenschaftlicher Forschung antreffen.

Wenn wir nun die sich hier bietende, mindestens partielle methodische Analogie der Grundlagen-Spekulationen zur theoretischen Naturforschung

näher ins Auge fassen, so bringt uns das auf den Gedanken, daß mit jeder genaueren Abgrenzung eines methodischen Rahmens für die Mathematik (bzw. für ein Gebiet der Mathematik) ein gewisser Bereich von mathematischer Tatsächlichkeit intendiert wird, und daß diese Tatsächlichkeit in gewissem Maße von der besonderen Gestaltung jenes Rahmens unabhängig ist. Wir können uns das an der geometrischen Axiomatik klarmachen. Die euklidische Geometrie läßt sich, wie man weiß, auf mannigfache Arten axiomatisch entwickeln. Von der besonderen Art aber, wie das geschieht, ist die resultierende Struktur-Gesetzlichkeit der euklidischen Geometrie unabhängig.
A103 In | einem ähnlichen Sinne sind die Beziehungen in der Theorie des mathematischen Kontinuums und der sich an sie schließenden Disziplinen unabhängig von der besonderen Art, wie die reellen Zahlen eingeführt werden, und erst recht von der besonderen Methode einer grundlagentheoretischen Fundierung. Jene Beziehungen, auf die wir sozusagen zwangsmäßig geführt werden, sobald wir uns auf gewisse Arten des Kalkuls und des mathematischen Operierens einlassen, haben für eine grundlagentheoretische Untersuchung die Rolle des Gegebenen, dessen genauere theoretische Fixierung zur Aufgabe steht. Die Art dieser Fixierung kann Momente der Problematik enthalten, von denen jenes gleichsam Gegebene nicht betroffen wird.

Der so gewonnene Gesichtspunkt der Gegenüberstellung einer mathematischen Tatsächlichkeit und eines zur Fixierung dieser Tatsächlichkeit gestalteten methodischen Rahmens vereinigt sich auch gut mit den Ergebnissen der beschreibenden Analyse, welcher Rolin Wavre das Verhältnis von Erfindung und Entdeckung in der mathematischen Forschung unterworfen hat. Worauf
22 hier hingewiesen wird, das ist die Verflochtenheit | der beiden Momente: einerseits der Erfindung von Begriffsbildungen, andererseits der Entdeckung von gesetzlichen Beziehungen zwischen den konzipierten Gegenständlichkeiten, sowie ferner der Umstand, daß die begriffliche Erfindung ausgerichtet ist auf das Entdecken.

Was das Letztere betrifft, so verhält es sich ja vielfach so, daß die Erfindung gelenkt wird von einer mehr oder minder deutlich schon vorhandenen Entdeckung, und daß sie dazu dient, diese zur begrifflichen Bestimmtheit zu führen und dadurch auch der Mitteilung zugänglich zu machen. Die Nötigung zur Anpassung der Begriffe an die Erfordernisse des Ausdrucks für etwas Objektives besteht dabei ebenso wie bei entsprechenden Situationen in der theoretischen Naturwissenschaft. So sind die Begriffe des Differentialquotienten und des Rationalitätsbereiches ebenso im Hinblick auf etwas auszudrückendes Objektives eingeführt worden wie die Begriffe der Entropie und des elektrischen Feldes.

Einen Fall von methodisch gleicher Art nehmen wir für die Konstituierung eines Rahmens der mathematischen Deduktion an, wenn wir von einer durch jenen Rahmen zu explizierenden mathematischen Tatsächlichkeit sprechen.

Machen wir nun von dieser Betrachtungsweise Anwendung auf unsere Frage der mathematischen Existenz, so ergibt sich daraus eine wesentliche Ergänzung unserer früheren Feststellung, daß die Existenz-Aussagen in un-
A104 seren mathematischen Theorien letzten Endes auf ein | Gedankensystem bezogen sind, das als methodischer Rahmen fungiert. Diese Bezogenheit der Existenzaussagen erscheint nunmehr weitgehend dadurch kompensiert, daß die wesentlichen Eigenschaften der durch den methodischen Rahmen intendierten Tatsächlichkeit sozusagen invariant sind gegenüber den Besonderheiten (dem Erfindungsmäßigen) jenes Rahmens.

Hier ist ferner noch zu bemerken, daß die mathematische Tatsächlichkeit sich auch insofern von jedwedem abgegrenzten methodischen Rahmen abhebt, als sie durch einen solchen niemals ganz erschöpft wird. Es erwachsen vielmehr aus der Konzeption eines deduktiven Rahmens jeweils weitere mathematische Beziehungen, die ihn überschreiten.

Doch – so mag man fragen – kommen wir mit einer solchen Auffassung von mathematischer Tatsächlichkeit nicht zurück auf die Annahme einer idealen Existenz der mathematischen Gegenstände, die wir doch im Eingang unserer Betrachtung als unmotiviert abgelehnt haben? Um auf diese Frage zu erwidern, müssen wir uns auf die Grenzen der Analogie zwischen mathematischer und physikalischer Tatsächlichkeit besinnen. Hier handelt es sich um etwas sehr Elementares.

In der Zweckbestimmung der naturwissenschaftlichen Begriffsbildung liegt
23 es, daß sie uns eine orientierende Deutung der Umwelt liefern will. | Es spielt daher in der Naturwissenschaft die Modalität des faktisch Wirklichen eine ausgezeichnete Rolle, und im Vergleich mit dieser Wirklichkeit stellt sich alle sonstige Existenz, von der die Rede sein kann, als nur uneigentliche Existenz dar, – so wenn wir von dem Bestehen naturgesetzlicher Beziehungen sprechen. Und zwar gilt das, obwohl ja die Aussagen betreffend das Bestehen von Naturgesetzen inhaltlich über das im Bereich des Faktischen Feststellbare hinausgehen.

In der Mathematik haben wir keinen so prägnanten Modalitäts-Unterschied. Für die Betrachtungsweise des Mathematikers stellt sich das einzelne mathematische Gegenständliche nicht als etwas in eminenterem Sinne Existierendes dar als die gesetzlichen Beziehungen. Ja, man kann sagen, daß hier ein Unterschied zwischen einem direkt Gegenständlichen und einer Gesetzlichkeit, der jenes unterliegt, überhaupt nicht in deutlichem Sinne besteht, da sich etliche Gesetzlichkeiten durch formale Entwicklungen darstellen, die ihrerseits den Charakter des direkt Gegenständlichen besitzen. Sogar Axiomensysteme lassen sich als strukturelle Gebilde betrachten. Wir haben daher in der Mathematik keinen Anlaß, Existenz in einem grundsätzlich anderen Sinne anzunehmen, als wir das Bestehen von gesetzlichen Beziehungen annehmen.

So werden die verschiedenen Bedenken behoben, welche unserer Auf-
A105 fassung von der Bezogenheit der mathematischen Existenz-Aussagen | auf ein System der Begrifflichkeit (einen deduktiven Rahmen) entgegenzustehen scheinen: Ungeachtet der verschiedenen Möglichkeiten der Anlage eines solchen Systems der Begrifflichkeit bedeutet diese Auffassung keinen Relativismus. Wir können vielmehr die Idee einer mathematischen Tatsächlichkeit uns bilden, die von dem jeweils Besonderen der Anlage des deduktiven Rahmens unabhängig ist. Der Gedanke einer solchen mathematischen Tatsächlichkeit bedeutet andrerseits nicht ein Zurückkommen auf die Ansicht von einer selbständigen Existenz der mathematischen Gegenstände. Es handelt sich dabei nicht um ein Dasein, sondern um beziehungsmäßige, strukturelle Bindungen und um das Hervorgehen (Induziert-werden) von ideellen Gegenständen aus anderen solchen Gegenständen.

Unsere Betrachtung der mathematischen Existenz erfordert aber doch, um nicht einseitig zu sein, noch einen ergänzenden Gesichtspunkt. Wir haben diese Betrachtung im Sinne der Einstellung des rein auf die Gegenständlichkeit gerichteten Mathematikers ausgeführt. Gedenken wir aber unseres methodischen Vergleiches zwischen den mathematischen (grundlagentheoretischen) Ansätzen und denen der Physik, so kann uns das darauf aufmerksam machen, daß jene Analogie auch noch in einem Punkte besteht, den wir noch nicht vermerkt haben: So wie die theoretische Sprache und die theoretische
24 Einstellung der Physik als wesentliche Ergänzung die | Einstellung und Sprache des Experimentators hat, so wird auch in der Mathematik die theoretische Einstellung ergänzt durch eine Betrachtungsweise, die auf das Prozeßhafte der mathematischen Betätigung gerichtet ist. Hier haben wir mit Existenzaussagen zu tun, die sich nicht auf abstrakte Entitäten beziehen, sondern auf Rechenausdrücke, auf formale Entwicklungen, Operationen, Definitionen, Lösungsverfahren usw. Die Bedeutsamkeit einer solchen konstruktiven Betrachtungsweise und Ausdrucksweise – wie sie insbesondere bei dem Brouwerschen Intuitionismus und für die Methode der Hilbertschen Beweistheorie

zur Anwendung kommt – wird auch derjenige Mathematiker anerkennen, der nicht gewillt ist, sich mit einer ausschließlich konstruktiven Mathematik, und daher ebensowenig mit einer Tätigkeits-Sprache der Mathematik als alleiniger mathematischer Ausdrucksform zu begnügen.

In diesem Sinne sei noch in Bezug auf das Hilbertsche Unternehmen einer vom operativen (konstruktiven) Standpunkt verfahrenden Beweistheorie hervorgehoben, daß das wissenschaftstheoretische Interesse an diesem keineswegs an jene philosophische Lehrmeinung des „Formalismus" gebunden ist, welche aus der ursprünglichen Fassung der Aufgabenstellung der Be-
A106 weistheorie erwachsen ist. Insbesondere | brauchen wir, um die methodische Fruchtbarkeit der Beweistheorie zu würdigen, nicht die Auffassung, daß die Theorien, welche (für den beweistheoretischen Zweck) der symbolischen Formalisierung unterworfen werden, von da ab mit dem Schema ihres symbolischen Formalismus schlechtweg gleichzusetzen und somit bloß noch als ein technischer Apparat zu betrachten seien.

Auch ist zu beachten, daß durch die beweistheoretische Untersuchung der Widerspruchsfreiheit jene Art der Motivierung des Begriffssystems unserer heutigen Mathematik nicht ihre Bedeutung verliert, welche durch die Anknüpfung an die Probleme erfolgt, aus denen (in mehreren Etappen) das Begriffssystem erwachsen ist. Eine solche Motivierung wird vielmehr bei der Inangriffnahme der beweistheoretischen Untersuchung als schon geleistet angenommen.[2]

Schließlich sei noch bezüglich der Methoden der konstruktiven Beweistheorie, und auch derjenigen des Brouwerschen Intuitionismus, daran erinnert, daß man mit diesen nicht etwa im Bereich des eigentlich Vorstellungs-Gegenständlichen verbleibt. Der Begriff des Effektiven wird hier im Sinne einer Anpassung an die theoretischen Erfordernisse idealisiert und | erweitert, – freilich auf eine grundsätzlich elementarere Art, als es in der üblichen Mathematik geschieht. Der methodische Standpunkt ist daher auch hier nicht ein solcher der Voraussetzungslosigkeit, sondern wir haben es wiederum mit einem ideellen Rahmen zu tun, der generelle Arten der Setzung in sich schließt. Unsere vorherigen Betrachtungen finden darum auch auf diese konstruktive Mathematik Anwendung.

[2][1] Was die Aufgabe einer *systematischen* Motivierung der Begriffsbildungen der klassischen Mathematik betrifft, so kommen wir damit auf das bereits erwähnte Problem der Gewinnung eines möglichst geeigneten und befriedigenden deduktiven Rahmens, welches ein Hauptthema der heutigen mathematischen Grundlagen-Forschung bildet.

Im ganzen weisen unsere Überlegungen darauf hin, daß es nicht angezeigt ist, den methodischen Unterschied zwischen der Mathematik und den Wissenschaften vom Faktischen, der unleugbar besteht, zu übertreiben, noch auch, die philosophischen Probleme, die sich an die Mathematik knüpfen, zu unterschätzen.