Bernays Project: Text No. 20

Zur Beurteilung der Situation in der beweistheoretischen Forschung[†] (1950)

An assessment of the situation in research on proof theory

(*Revue Internationale de Philosophie* 27/28, S. 9–13)

---

9 | Wenn ich hier in Kürze über die Situation in der beweistheoretischen Forschung spreche, so erscheint es als angezeigt, dass wir uns vergegenwärtigen, was das Kennzeichnende dieser Forschung ist: Es handelt sich um die systematische Untersuchung der Anwendungsweise und der Auswirkung des logischen Schliessens in den mathematischen Disciplinen, in denen die Begriffsbildungen und Voraussetzungen in solcher Weise fixiert sind, dass mit Hilfe der Ausdrucksmittel der symbolischen Logik eine strikte Formalisierung der Beweise möglich wird.

Wie Sie wissen, hat Hilbert diese Art der Untersuchung vor allem im Hinblick auf die Fragen der Widerspruchsfreiheit angeregt. Er hat aber von vornherein auch die Behandlung von Fragen der Vollständigkeit und der Entscheidbarkeit im Rahmen dieser Untersuchungen ins Auge gefasst, so bereits in dem Vortrag „Axiomatisches Denken" (1917, *vide* [**?**]). In dem Vortrag „Probleme der Grundlegung der Mathematik" in Bologna (1928, *vide* [**?**]) hat er bestimmte Fragen der Vollständigkeit ausführlicher formuliert.

Freilich hat dabei Hilbert sich Vieles sowohl hinsichtlich der zu gewinnenden Ergebnisse wie hinsichtlich der Methode einfacher vorgestellt, als es sich nachher erwies. Die Erkenntnis dieser grösseren Schwierigkeiten hat bei vielen die Vorstellung erweckt, als habe die beweistheoretische Forschung zu einem definitiven Misserfolg geführt. Ein Blick auf den tatsächlichen Stand der Dinge zeigt aber, dass davon keine Rede ist: die Methoden der beweis-
10 theoretischen Betrachtung befin|den sich in reichhaltiger Entwicklung, und in verschiedener Richtung sind erhebliche Resultate erreicht worden. Einige

[†]An additional last line of the article reads "Technische Hochschule, Zurich."

markante Erfolge in Richtung der Hilbert'schen Problemstellungen mögen hier aufgezählt werden.

1. Der Gödelsche Vollständigkeitssatz (Nachweis der Vollständigkeit des Prädikatenkalkuls der ersten Stufe) nebst den daran geknüpften Erweiterungen.

2. Es gelang, den Begriff der Entscheidbarkeit in solcher Weise zu präzisieren, dass auf Grund dieser Definition systematische Resultate ermöglicht wurden, so insbesondere der Nachweis der Unlösbarkeit des Entscheidungsproblems für den Prädikatenkalkul durch Church, und auf einem zweiten Wege durch Turing.

3. Während durch die letztgenannten Methoden nur Feststellungen von Unentscheidbarkeiten resultierten, gelang es andererseits Tarski, für bestimmte mathematisch nicht triviale Bereiche Entscheidungsverfahren anzugeben. Sowohl in Anknüpfung an diese Resultate wie auch durch die Ergänzungssätze zum Gödelschen Vollständigkeitssatz haben sich Anwendungen auf die Mathematik ergeben, welche auch für den nicht grundlagentheoretisch interessierten Mathematiker lohnend sind.

4. Was die Fragen der Widerspruchsfreiheit betrifft, so ist zwar nicht ein Widerspruchsfreiheitsbeweis der vollen Analysis vom finiten Standpunkt, wohl aber ein solcher für die beschränkte Analysis (etwa im Sinne von Weyl oder im Sinne der verzweigten Stufentheorie) von einem konstruktiven Standpunkt gelungen. Zuerst wurde ein solcher Nachweis für den zahlentheoretischen Formalismus von Gentzen erbracht; Gentzen hatte aber auch schon die Ausdehnung seiner Methode auf die verzweigte Analysis in Aussicht genommen. Diese wurde dann von Lorenzen, Schütte und Ackermann durchgeführt, wobei auch die Beweismethode durchsichtiger wurde. Zu erwähnen ist auch ein neuer durchsichtiger Widerspruchsfreiheitsbeweis für die Zahlentheorie von Stenius. Bemerkenswert ist ferner, dass die Erweiterung des finiten Standpunktes zu dem im freieren Sinne konstruktiven Standpunkt es ermöglicht, Beweise zu betrachten, die nicht in vollem Sinne formalisiert zu sein brauchen, sondern Teile enthalten können, in denen metamathema-
11 tisch Herleitungen angegeben werden, | die jeweils von einem syntaktischen Zahlparameter abhängen. Dadurch kommt man über den Bereich derjenigen Systeme hinaus, auf welche das Unvollständigkeitstheorem von Gödel Anwendung findet.

Dieses bedeutende Theorem ist übrigens keineswegs bloss als ein negatives Ergebnis zu beurteilen, vielmehr hat es im Bereich der Beweistheorie eine ähnliche Rolle wie etwa die Entdeckung der Irrationalzahlen im Bereich der

Arithmetik.

5. Schliesslich hat man sich auch darum bemüht, die Feststellung der Widerspruchsfreiheit zu ergänzen im Sinne der allgemeineren Fragestellung: was kann aus der formalen Beweisbarkeit eines Satzes vom konstruktiven Standpunkt entnommen werden? In diese Richtung gehen die Untersuchungen von Kreisel.

Nach alledem wäre es offensichtlich ganz unangemessen, von einem allgemeinen Fiasko der Beweistheorie zu sprechen. Andererseits aber muss anerkannt werden, dass nicht nur das Wesentlichste auf diesem Gebiete zu tun bleibt, sondern dass bezüglich des Methodischen keine klare Entschiedenheit und keine Einhelligkeit besteht. Ich möchte in Bezug hierauf einige Punkte hervorheben.

Man spricht heute vielfach in einem etwas herablassenden Ton von der „naiven Mengenlehre". Wir müssen uns aber vergegenwärtigen, dass es jedenfalls naiv ist zu meinen, dass wir bei dem Rückzug auf den axiomatischen Standpunkt, wenn dieser nicht durch irgendeine inhaltliche Einstellung unterbaut ist, noch etwas Gleichwertiges wie vordem zur Verfügung haben. Der Rückzug auf die Axiomatik ist beim Falle der nichteuklidischen Geometrie deshalb weniger problematisch, weil wir da die Arithmetik und Mengenlehre als gegebene Erkenntnis zu Grunde legen. Im Rahmen der Arithmetik (Analysis) finden die Erörterungen über die möglichen Geometrien, insbesondere die modelltheoretischen Betrachtungen, statt. Indem dieser Rahmen angefochten wird und die Mengenlehre ihrerseits nur die Rolle einer axiomatischen Theorie erhält, wird es notwendig, einen anderen Rahmen zu Grunde zu legen, der als die eigentliche Arithmetik zu fungieren hat. In Hinsicht auf die Wahl dieses methodischen Rahmens sind verschiedene Auffassungen möglich.

12 Die Mindest-Anforderung an eine verschärfte Axiomati|sierung ist die, dass die Gegenstände nicht einem als vorgängig gedachten Bereich entnommen werden, sondern durch Erzeugungsprozesse konstituiert werden. Es kann aber dabei die Meinung sein, dass durch diese Erzeugungsprozesse der Umkreis der Gegenstände determiniert ist; bei dieser Auffassung erhält das *tertium non datur* seine Motivierung. In der Tat kann Offenheit eines Bereiches in zweierlei Sinn verstanden werden, einmal nur so, dass die Konstruktionsprozesse über jeden einzelnen Gegenstand hinausführen, und andererseits in dem Sinne, dass der resultierende Bereich überhaupt nicht eine mathematisch bestimmte Mannigfaltigkeit darstellt. Je nachdem die Zahlenreihe in dem erstgenannten oder in dem zweiten Sinne aufgefasst wird, hat man die

Anerkennung des *tertium non datur* in Bezug auf die Zahlen oder den intuitionistischen Standpunkt. Bei dem finiten Standpunkt kommt noch die Anforderung hinzu, dass die Überlegungen an Hand der Betrachtung von endlichen Konfigurationen verlaufen, somit insbesondere Annahmen in der Form allgemeiner Sätze ausgeschlossen werden.

Die maximale Anforderung an den methodischen Rahmen geht noch über die des finiten Standpunktes hinaus. Tatsächlich enthält dieser, zum Zweck der Möglichkeit systematischer Betrachtung, Existenzannahmen, die vom Standpunkt des eigentlich Konkreten nicht selbstverständlich sind. Die Anwendung solcher Existenzannahmen ist z. B. notwendig, wenn wir die Eliminierbarkeit der vollständigen Induktion, im Sinne von Lorenzen zeigen wollen. Ursprünglich wollte auch Hilbert den engeren Standpunkt einnehmen, der nicht den anschaulichen Allgemeinbegriff der Ziffer voraussetzt. Das ist unter anderem aus seinem Heidelberger Vortrag (1904, *vide* [**?**]) zu ersehen. Es war schon eine Art von Kompromiss, dass er sich zu dem in seinen Publikationen eingenommenen finiten Standpunkt entschloss. Wenn wir uns dieses klarmachen, dann erscheint die Nötigung, von dem finiten Standpunkt zu einem erweiterten konstruktiven Standpunkt überzugehen, nicht als so katastrophal.

Freilich wird eine philosophische Umstellung erfordert. Man meint vielfach, man müsse entweder eine absolute Evidenz annehmen, oder das Moment der Evidenz für die Wissenschaften überhaupt preisgeben. Anstelle dieses
13 „Alles oder Nichts“ | erscheint es als sachgemässer, dass wir uns die Auffassung von der Evidenz als etwas Erworbenem bilden. Der Mensch gewinnt Evidenzen, wie er das Gehen oder wie der Vogel das Fliegen lernt. Hiermit kommt man zu der sokratischen Anerkennung unseres grundsätzlichen Nicht-Vorauswissens. Wir können im Theoretischen nur Auffassungen und Standpunkte versuchen und eventuell mit ihnen geistigen Erfolg haben.

Es ist nicht die Meinung, dass mit diesen Auffassungen schon die Grundlagenproblematik im Prinzip überwunden sei. Aber wenigstens wird durch eine solche Bescheidung erreicht, dass wir durch Entdeckung von Antinomien nicht jeweils völlig aus dem Konzept gebracht werden. Solche Antinomien erscheinen dann vielmehr als lehrreiche Anhaltspunkte für die richtige Wahl unserer Ansätze und Methoden.

Die noch nicht überwundene Problematik in der Grundlagenforschung besteht in verschiedener Hinsicht: einmal in Hinsicht auf die Wahl des methodischen Standpunktes in der Grundlagenforschung, sowie auch auf die Wahl des deduktiven Rahmens, andererseits in Bezug auf die Auffassung von der

Mathematik. In betreff dieses zweiten Punktes ist eine Entscheidung an Hand der Grundlagenforschung selbst vielleicht nicht zu erwarten, jedoch in Hinsicht auf die ersten Fragen ist es wohl nicht zu unbescheiden, zu hoffen, dass die Gegenüberstellung der Ergebnisse der verschiedenen Forschungsrichtungen in absehbarer Zeit einer der Verfahrensweisen ein deutliches Übergewicht verleihen wird.[a]

15 | DISCUSSION

Arnold Schmidt: Meine Einführung von Widerspruchsfreiheitsgraden, die Herr Bernays erwähnte, sollte lediglich dazu dienen, die Problematik der Rolle, die die Widerspruchsfreiheit erkenntnistheoretisch zu spielen vermag, zu unterstreichen. [...]

Zu den Erweiterungen, die der finite Standpunkt im Laufe seiner Entwicklung erfahren hat, möchte ich anmerken, dass das Tertium non datur bei allen Stufen dieser Entwicklung ausgeschlossen bleibt.

Was das Evidenzproblem angeht, so wird man in einer gewissen Analogie zur Interpetation des Kantischen Apriori sagen dürfen, dass der Einzelne zwar Evidenzen durch Nachdenken erlernen kann, dass aber die Kriterien für Evidenz von solcher Erfahrung unabhängig sein müssen, um trügerische Evidenz, die durch Gewöhnung entstehen kann, auszuschliessen. So sehr ich anerkenne, dass uns Sachverhalte, die nicht auf den ersten Blick evident sind, durch eine gründliche Klärung evident werden können, möchte ich doch andererseits betonen, dass es meines Erachtens nur *einerlei* Evidenz, also keine relative, gestufte geben kann. Die Aufgabe des Beweises besteht, von hier aus gesehen, darin, Nichtevidentes auf Evidentes zurückzuführen.

Paul Bernays: Was den ersten Punkt betrifft, so besteht keine Meinungs-
16 verschiedenheit. Was die zweite Bemerkung | angeht, so mache ich darauf aufmerksam, dass ich keine Geschichte habe schreiben wollen. Wäre dies der Fall gewesen, so würde ich fünf Stufen der Meta-Mathematik unterschieden

[a]The next page (p. 14) contains an abstract of Tarski's lecture on decision problems at the same meeting, followed by a discussion of both talks that covers the remaining pages (pp. 15–21); participants of the discussion, besides those mentioned below, were Quine, Dingler, Bar-Hillel, and Perelmann. The excerpt below includes all those remarks and replies that are related to Bernays' talk.

haben: 1. finiten Standpunkt, 2. definiten Standpunkt ((1) mit Existenzannahmen), 3. Intuitionismus, 4. tertium non datur, 5. imprädikative Begriffsbildung. Diese Ordnung gibt mehr und mehr Freiheit. Während es möglich gewesen ist, intime Übereinstimmungen anzuweisen zwischen Intuitionismus (3) und klassischem Standpunkt (4), ist dies nicht gelungen für (4) und (5), obwohl Gentzen darum gerungen hatte. Der entscheidende Punkt liegt also jenseits der Einführung des tertium non datur. Ich möchte endlich sagen, dass man Evidenz nicht bloss objektiv konstruieren, und subjektive Bestimmthei-
18 ten nicht vergessen darf. [. . . |. . .]
[In Erwiderung auf Behmann, der das Helmholtz-Argument für die Evidenz nicht-euklidischer Geometrien heranzog]: Obwohl es für anders gebildete Wesen eine andere Evidenz geben könnte, so ist jedoch unser Anliegen festzustellen, was Evidenz für uns ist. [. . .]

19 *Alfred Tarski*: [. . . | . . .] Furthermore I should like to remark that there seems to be a tendency among mathematical logicians to overemphasize the importance of consistency problems [. . .]. Gentzen's proof of the consistency of arithmetic is undoubtedly a very interesting metamathematical result, which may prove very stimulating and fruitful. I cannot say, however, that the consistency of arithmetic is now much more evident to me (at any rate, perhaps, to use the terminology of the differential calculus, more than by an epsilon) than it was before the proof was given.

Paul Bernays: My thought has not been rightly interpreted. I did not wish to say that Gentzen's proof made arithmetic or truths about arithmetic more evident. But I tried to stress that some mathematical methods simultaneously show deducibility and validity. [. . .]