Bernays Project: Text No. 24

Die Mannigfaltigkeit der Direktiven für die Gestaltung geometrischer Axiomensysteme (1959)

The multiplicity of purposes in formulations of geometric axiom systems

(*The Axiomatic Method*, ed. by Henkin, Suppes, Tarski, Amsterdam: North-Holland, S. 1–15;
repr. in *Abhandlungen*, S. 142–154)

1/A142 | Bei der Betrachtung der Axiomatisierungen der Geometrie stehen wir unter dem Eindruck der großen Mannigfaltigkeit der Gesichtspunkte, unter denen die Axiomatisierung erfolgen kann und auch schon erfolgte. Die ursprüngliche einfache alte Vorstellung, wonach man schlechtweg von *den* Axiomen der Geometrie sprechen kann, ist nicht nur durch die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrien verdrängt, und ferner auch durch die Einsicht in die Möglichkeit verschiedener Axiomatisierungen einer und derselben Geometrie, sondern es sind überhaupt wesentlich verschiedene methodische Gesichtspunkte aufgetreten, unter denen man die Axiomatisierung der Geometrie unternommen hat und deren Zielsetzungen sogar in gewissen Beziehungen antagonistisch sind.

Der Keim für diese Mannigfaltigkeit ist bereits in der euklidischen Axiomatik zu finden. Für deren Gestaltung war der Umstand bestimmend, daß man hier an Hand der Geometrie zum ersten Mal auf die Problemstellung der Axiomatik geführt wurde. Die Geometrie ist hier sozusagen die Mathematik schlechthin. Das Verhältnis zur Zahlentheorie ist methodisch wohl kein völlig deutliches. In gewissen Teilen wird ein Stück Zahlentheorie mit Verwendung der anschaulichen Zahlvorstellung entwickelt. Ferner wird in der Proportionenlehre inhaltlich von dem Zahlbegriff Gebrauch gemacht, sogar mit einem impliziten Einschluß des Tertium non datur; allerdings scheint es, daß man dessen volle Verwendung zu vermeiden trachtete.

Während die methodische Sonderstellung des Zahlbegriffes hier nicht explicite hervortritt, wird der Größenbegriff ausdrücklich als inhaltliches Hilfs-

mittel an die Spitze gestellt, in einer Art übrigens, die wir heute nicht mehr
konzedieren können, indem nämlich von verschiedenen Gegenständlichkeiten
als selbstverständlich vorausgesetzt wird, daß sie Größencharakter haben.
Der Größenbegriff wird freilich auch der Axiomatisierung unterworfen; die
diesbezüglichen Axiome werden jedoch ausdrücklich als vorgängige (*κοιναὶ*
2 *ἐννοιαι*) von den übrigen Axiomen abgesondert. | Diese Axiome sind von
ähnlicher Art wie diejenigen, die man heute für die abelschen Gruppen auf-
stellt. Was aber auf Grund des damaligen methodischen Standpunktes un-
A143 terblieb, war, | daß nicht axiomatisch fixiert wurde, welche Gegenstände als
Größen anzusehen seien.

Um so mehr ist es zu bewundern, daß man damals schon auf das Besondere derjenigen Voraussetzung aufmerksam wurde, durch welche die archimedischen Größen, wie wir sie heute nennen, ausgezeichnet werden. Das Archimedische (Eudoxische) Axiom wird dann, in der an die Griechen anschließenden mittelalterlichen Tradition, insbesondere in den Untersuchungen der Araber über das Parallelenaxiom wesentlich benutzt. Auch bei dem Beweis von Saccheri zur Ausschließung der „Hypothese des stumpfen Winkels" tritt es als wesentlich auf. In der Tat ist ja diese Ausschließung ohne das Archimedische Axiom nicht möglich, da ja eine nicht-archimedische, schwach-sphärische (bzw. schwach-elliptische) Geometrie mit den Axiomen der euklidischen Geometrie, abgesehen vom Parallelenaxiom, im Einklang steht.

Bei allen diesen Untersuchungen tritt das zweite Stetigkeitsaxiom, welches im späteren 19. Jahrhundert formuliert wurde, noch nicht auf. Es konnte bei den Beweisführungen, für die es in Betracht kam – wie bei den Flächeninhalts- und Längenbestimmungen –, auf Grund der erwähnten Verwendung des Größenbegriffs, entbehrt werden, wonach es z. B. als selbstverständlich galt, daß die Kreisfläche sowie der Kreisumfang eine bestimmte Größe besitzen. An die Stelle der alten Größenlehre trat zum Beginn der Neuzeit als beherrschende übergeordnete Disziplin die Größenlehre der *Analysis*, die sich formal und dem Inhalt nach sehr reich entwickelte, noch ehe sie zu methodischer Deutlichkeit gelangte.

Freilich, bei der Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie spielte die Analysis zunächst keine erhebliche Rolle, wohl aber wird sie dominierend in den nachfolgenden Untersuchungen von Riemann und Helmholtz, und später von Lie, zur Kennzeichnung der drei ausgezeichneten Geometrien durch gewisse sehr allgemeine, analytisch faßbare Bedingungen. Charakteristisch für diese Behandlung der Geometrie ist insbesondere, daß man nicht nur die einzelnen Raumgebilde, sondern auch die Raummannigfaltigkeit selbst zum Gegenstand nimmt. In der Möglichkeit der Durchführung einer solchen Betrachtung zeigten sich die gewaltigen begrifflichen und formalen Mittel, welche die Mathematik in der Zwischenzeit gewonnen hatte; und in der Anlage der Problemstellung äußerte sich die begrifflich-spekulative Richtung, welche die Mathematik im Laufe des 19. Jahrhunderts einschlug.

3 | Die differentialgeometrische Behandlung der Grundlagen der Geometrie ist ja übrigens bis in die neueste Zeit durch Hermann Weyl sowie Elie Car-
A144 tan und Levi-Cività, in Anknüpfung an die allgemeine | Relativitätstheorie Einsteins, weiter entwickelt worden. So imponierend und elegant das in dieser Hinsicht Erreichte ist, so haben sich doch die Mathematiker vom grundlagentheoretischen Standpunkt damit nicht zufriedengegeben. Zunächst suchte man sich von der für die differentialgeometrische Methode wesentlichen Voraussetzung der Differenzierbarkeit der Abbildungsfunktionen zu befreien. Dafür bedurfte es der Ausbildung der Methoden einer allgemeinen Topologie, welche um die Wende des Jahrhunderts begann und seitdem eine so imposante Entwicklung genommen hat. Weitergehend trachtete man sich von der Voraussetzung des archimedischen Charakters der geometrischen Größen überhaupt unabhängig zu machen.

Diese Tendenz steht im Zeichen derjenigen Entwicklung, mit welcher die Analysis ihre vorher beherrschende Stellung in gewissem Maße eingebüßt hat. Dieses neue Stadium in der mathematischen Forschung knüpfte sich an die Auswirkung der schon erwähnten begrifflich-spekulativen Richtung der Mathematik im 19. Jahrhundert, wie sie insbesondere in der Schöpfung der allgemeinen Mengenlehre, in der schärferen Begründung der Analysis, in der Konstitution der mathematischen Logik und in der neuen Fassung der Axiomatik in Erscheinung trat.

Für dieses neue Stadium war zugleich charakteristisch, daß man wieder mehr auf die Methoden der alten griechischen Axiomatik zurückkam, wie es wiederholt in den Epochen geschah, in denen man auf begriffliche Präzision stärkeren Nachdruck legte. In Hilberts *Grundlagen der Geometrie*[a] finden wir einerseits dieses Zurückkommen auf die alte elementare Axiomatik, freilich in grundsätzlich veränderter methodischer Auffassung, andererseits als ein hauptsächliches Thema die möglichst weitgehende Ausschaltung des archimedischen Axioms: sowohl bei der Proportionenlehre wie beim

[a] *Vide* [**?**].

Flächeninhaltsbegriff sowie in der Begründung der Streckenrechnung. Diese Art der Axiomatisierung hatte übrigens für Hilbert nicht den Sinn der Ausschließlichkeit; er hat ja bald danach eine andere Art der Begründung danebengestellt, mit der zum ersten Mal das vorhin erwähnte Programm einer topologischen Grundlegung aufgestellt und durchgeführt wurde.

Etwa gleichzeitig mit Hilberts Grundlegung wurde auch in der Schule von Peano und Pieri die Axiomatisierung der Geometrie gepflegt. Bald folgten
4 auch die axiomatischen Untersuchungen von Veblen und R. L.|Moore; und es waren nunmehr die Forschungsrichtungen eingeschlagen, in denen sich auch heute die Beschäftigung mit den Grundlagen der Geometrie weiterbewegt. Als kennzeichnend hierfür haben wir eine Vielheit der methodischen Richtungen.

A145 | Die eine ist die, welche die Mannigfaltigkeit der kongruenten Transformationen durch möglichst allgemeine und prägnante Bedingungen zu kennzeichnen sucht, die zweite diejenige, welche die projektive Struktur des Raumes voranstellt und das Metrische auf das Projektive mit der von Cayley und Klein ausgebildeten Methode der projektiven Maßbestimmungen zurückzuführen trachtet, und die dritte die, welche auf eine elementare Axiomatisierung der vollen Kongruenzgeometrie ausgeht.

Verschiedene wesentlich neue Gesichtspunkte sind in der Entwicklung dieser Richtungen hinzugetreten. Einmal erhielt die projektive Axiomatik eine verstärkte Systematisierung mittels der Verbandstheorie. Ferner wurde man gewahr, daß man bei der Kennzeichnung der Gruppe der kongruenten Transformationen die mengentheoretischen und funktionentheoretischen Begriffsbildungen zurücktreten lassen kann, indem man die Transformationen durch sie bestimmende Gebilde festlegt. Damit kommt das Verfahren dem der elementaren Axiomatik nahe, da die Gruppenbeziehungen sich nun als Beziehungen zwischen geometrischen Gebilden darstellen.

Ich will aber hier nicht näher von diesen beiden Forschungsrichtungen der geometrischen Axiomatik sprechen, für die ja hier authentischere Vertreter anwesend sind, auch nicht von den Erfolgen, die mit Verwendung topologischer Methoden erzielt worden sind, worüber insbesondere neuere Abhandlungen von Freudenthal einen Überblick liefern, sondern mich den Fragen der an dritter Stelle genannten Richtung der Axiomatisierung zuwenden.

Selbst innerhalb dieser Richtung finden wir wiederum eine Mannigfaltigkeit von möglichen Zielsetzungen. Man kann einerseits darauf ausgehen, mit möglichst wenigen Grundelementen, etwa nur einem Grundprädikat und einer Gattung von Individuen, auszukommen. Andererseits kann man vornehmlich darauf gerichtet sein, natürliche Absonderungen von Teilen der Axiomatik hervortreten zu lassen. Diese Gesichtspunkte führen zu verschiedenen Alternativen.

So wird einerseits durch die Betrachtung der nichteuklidischen Geometrie die Voranstellung der „absoluten“ Geometrie nahegelegt. Andererseits hat auch ein solcher Aufbau manches für sich, bei dem die affine Vektorgeometrie vorangestellt wird, wie es am Anfang von Weyls | *Raum, Zeit, Materie*[b] geschieht. Diesen beiden Gesichtspunkten kann man schwerlich zugleich in einer Axiomatik Genüge tun. Ein anderes Beispiel ist dieses. Bei der Voranstellung der Axiome der Inzidenz und Anordnung ist es eine mögliche und elegante begriffliche Reduktion, daß man, nach dem Vorgehen von Veblen,
A146 den Begriff der | Kollinearität auf den Zwischen-Begriff zurückführt. Andererseits ist es für manche Überlegungen von Wichtigkeit, die von dem Anordnungsbegriff unabhängigen Folgerungen der Inzidenzaxiome abzusondern; so ist es ja wünschenswert, die Begründung der Streckenrechnung aus den Inzidenzaxiomen als unabhängig von den Anordnungsaxiomen zu erkennen. Wiederum bei der Theorie der Anordnung selbst hat man Ersparungen von Axiomen der linearen Anordnung durch Anwendung des Axioms von Pasch als möglich erkannt; andererseits ist in gewisser Hinsicht eine Anlage der Axiome zu bevorzugen, bei welcher die für die lineare Anordnung kennzeichnenden Axiome abgesondert werden.

Mit diesen Beispielen von Alternativen ist die Mannigfaltigkeit in den möglichen und auch den tatsächlich verfolgten Zielsetzungen nicht annähernd erschöpft. So ist es ein möglicher und sinngemäßer, wenn auch nicht obligatorischer regulativer Gesichtspunkt, daß die Axiome so formuliert werden sollen, daß sie sich jeweils nur auf ein beschränktes Raumstück beziehen. Dieser Gedanke ist implizite ja wohl schon in der euklidischen Axiomatik mitbestimmend; und es mag auch sein, daß der Anstoß, den man so frühzeitig an dem Parallelenaxiom genommen hat, gerade darauf beruht, daß in der euklidischen Formulierung der Begriff der genügend weiten Verlängerung auftritt. Die erstmalige explizite Durchführung des genannten Programmpunktes geschah durch Moritz Pasch, und es knüpfte sich daran die Einführung idealer Elemente mit Hilfe von Schnittpunktsätzen, eine seitdem in erfolgreicher Weise ausgestaltete Methode der Begründung der projektiven Geometrie.

Eine andere Art der möglichen zusätzlichen Aufgabestellung ist dieje-

[b] *Vide* [**?**].

nige, die Unschärfe unseres bildhaften Vorstellens begrifflich nachzuahmen, wie dieses ja Hjelmslev getan hat.[c] Das ergibt freilich nicht nur eine andere Art der Axiomatisierung, sondern überhaupt ein abweichendes Beziehungssystem, ein Verfahren, welches wohl wegen seiner Komplikation nicht viel Anklang gefunden hat. Doch auch ohne in dieser Richtung sich so weit von dem Üblichen zu entfernen, kann man etwas in gewisser Hinsicht Ähnliches anstreben, indem man den Begriff des Punktes als Gattungsbegriff vermei-
6 det, wie es ja in verschiedenen interessanten | neueren Axiomatisierungen geschieht, so insbesondere in derjenigen von Huntington.[d]

In solcher Weise zeigt sich auf mannigfachste Art, daß es kein eindeutiges Optimum für die Gestaltung eines geometrischen Axiomensystems gibt. Was übrigens die Reduktionen in Hinsicht der Grundbegriffe und der Dingarten betrifft, so ist ungeachtet des grundsätzlichen Interesses, welches jede solche Reduktionsmöglichkeit hat, doch immer daran zu erinnern, daß
A147 die tatsächliche Anwendung einer solchen | Reduktion sich nur dann empfiehlt, wenn damit eine übersichtliche Gestaltung des Axiomensystems erreicht wird.

Es lassen sich immerhin gewisse Direktiven für Reduktionen nennen, die wir generell akzeptieren können. Nehmen wir etwa als Beispiel die Hilbertsche Fassung der Axiomatik. Bei dieser werden einerseits die Geraden als eine Dinggattung genommen, andererseits die Halbstrahlen als Punktmengen eingeführt und anschließend dann die Winkel als geordnete Paare zweier von einem Punkt ausgehender Halbstrahlen, also als Paare von Mengen, erklärt. Hier sind tatsächlich Möglichkeiten der vereinfachenden Reduktion gegeben. Man mag verschiedener Meinung darüber sein, ob man anstatt der verschiedenen Gattungen „Punkt, Gerade, Ebene" nur eine Gattung der Punkte zu Grunde legen will, wobei dann anstelle der Inzidenzbeziehung die Beziehungen der Kollinearität und der Komplanarität von Punkten treten. In der verbandstheoretischen Behandlung werden ja die Geraden und Ebenen gleichstehend mit den Punkten als Dinge genommen. Hier steht man wiederum vor einer Alternative. Hingegen die Halbstrahlen als Punktmengen einzuführen, überschreitet jedenfalls den Rahmen der elementaren Geometrie und ist auch für diese nicht nötig. Generell können wir es wohl als Direktive nehmen, daß höhere Gattungen nicht ohne Erfordernis eingeführt werden sollen. Beim Fall der Winkeldefinition kann man das dadurch vermei-

[c] *Vide* [**?**].
[d] *Vide* [**?**].

den, daß man die Winkelaussagen auf Aussagen über Punkttripel reduziert, wie dieses ja von R. L. Moore[1*] durchgeführt wurde. Hier wird sogar noch eine weitere Reduktion erreicht, indem überhaupt die Winkelkongruenz mit Hilfe der Streckenkongruenz erklärt wird, doch findet hierbei wiederum auch eine gewisse Einbuße statt. Nämlich die Beweisführungen stützen sich dabei wesentlich auf die Kongruenz von ungleichsinnig zugeordneten Dreiecken. Daher ist diese Art der Axiomatisierung nicht geeignet für den Problemkreis derjenigen Hilbertschen Untersuchungen, welche sich auf das Verhältnis der gleichsinnigen Kongruenz zur Symmetrie beziehen. Diese Bemerkung betrifft
7 freilich auch die meisten der | Axiomatisierungen, bei denen der Begriff der Spiegelung an der Spitze steht.

Neben den allgemeinen Gesichtspunkten möchte ich als etwas Einzelnes eine spezielle Möglichkeit der Anlage eines elementaren Axiomensystems erwähnen, nämlich eine solche Axiomatik, bei welcher der Begriff „das Punk-
A148 tetripel a, b, c bildet bei b einen rechten Winkel“ als | einzige Grundbeziehung und die Punkte als einzige Grundgattung genommen werden, ein Programm, auf welches neuerdings durch eine Arbeit von Dana Scott hingewiesen worden ist.[2*] Die genannte Beziehung genügt der von Tarski festgestellten notwendigen Bedingung für ein allein ausreichendes Grundprädikat der Planimetrie.[3*] Im Vergleich mit dem für eine Axiomatik solcher Art vorbildlich gewordenen Verfahren Pieris,[4*] der ja in einer Axiomatisierung die Beziehung „b und c haben von a gleichen Abstand“ als Grundbegriff nahm, scheint hier insofern eine Erleichterung zu bestehen, als der Begriff der Kollinearität von Punkten sich enger an den des rechten Winkels als an den Pierischen Grundbegriff anschließt. Was freilich den Kongruenzbegriff anbelangt, so scheint sich für die Axiome der Kongruenz aus der betrachteten Reduktion keine Vereinfachung zu ergeben. Übrigens ist diese Axiomatisierung ebenso wie die genannte Pierische eine von denen, die keine Aussonderung der gleichsinnigen Kongruenz liefern.[1]

Für eine elementare Axiomatisierung der Geometrie stellt sich als be-

[1*] *Vide* [?]. (Die Fußnoten 1* bis 6* sind nachträgliche Hinzufügungen [to the reprint in the *Abhandlungen*].)

[2*] *Vide* [?].

[3*] *Vide* [?].

[4*] *Vide* [?].

[1]Einige Angaben über die Definitionen der Inzidenz-, Anordnungs- und Kongruenzbegriffe aus dem Begriff des rechten Winkels sowie über einen Teil des Axiomensystems finden sich im Anhang.

sondere Frage die der Gewinnung einer Vollständigkeit im Sinne der Kategorizität. Diese wird bei den meisten Axiomensystemen durch die Stetigkeitsaxiome erwirkt. Die Einführung dieser Axiome bedeutet aber, wie man weiß, eine Überschreitung des Rahmens der gewöhnlichen Prädikatenlogik, indem das archimedische Axiom den allgemeinen Zahlbegriff verwendet und das zweite Stetigkeitsaxiom den allgemeinen Prädikaten- oder Mengenbegriff. Wir haben seither aus den Untersuchungen Tarskis gelernt, daß wir eine Vollständigkeit, wenigstens im deduktiven Sinne, in einem elementaren Rahmen erreichen können, wobei das Bemerkenswerte ist, daß das Schnittaxiom in einer gewissen Formalisierung erhalten bleibt, während von dem Archimedischen Axiom abgesehen wird. Das Archimedische Axiom fällt ja insofern formal aus dem sonstigen Rahmen heraus, als es in logischer For-
8/A149 malisierung die Gestalt einer un|endlichen Alternative hat, während $|_A$ das
Schnittaxiom auf Grund seiner Form der Allgemeinheit sich durch ein Axiomenschema darstellen und dadurch in seiner Anwendung dem jeweiligen formalen Rahmen anpassen läßt – wobei dann für den elementaren Rahmen der Prädikatenlogik die Beweisbarkeit des Archimedischen Axioms aus dem Schnittaxiom verlorengeht. Freilich hat eine solche Beschränkung auf einen prädikatenlogischen Rahmen zur Folge, daß verschiedene Überlegungen nur metatheoretisch ausgeführt werden können, wie z. B. der Beweis des Satzes, daß ein einfach geschlossenes Polygon die Ebene zerlegt, und ebenso die Betrachtung über Ergänzungsgleichheit und Zerlegungsgleichheit von Polygonen. Man steht hier wieder einmal vor einer Alternative, nämlich der, ob man den Gesichtspunkt der Elementarität des logischen Rahmens voranstellen will, oder sich hinsichtlich des logischen Rahmens nicht beschränkt, wobei ja übrigens noch verschiedene Abstufungen in Betracht kommen.

In Bezug auf die Anwendung einer Logik der zweiten Stufe sei hier nur daran erinnert, daß eine solche sich ja im Rahmen der axiomatischen Mengenlehre in solcher Weise präzisieren läßt, daß keine fühlbare Einschränkung der Beweismethoden erfolgt. Auch das Skolemsche Paradoxon bereitet im Falle der Geometrie insofern keine eigentliche Verlegenheit, als man es dadurch ausschalten kann, daß man in den modelltheoretischen Betrachtungen den Mengenbegriff, der in einem der höheren Axiome auftritt, mit dem Mengenbegriff der Modelltheorie gleichsetzt.

Zum Schluß möchte ich hervorheben, daß der in meinen Ausführungen betonte Umstand, daß es in der Gestaltung der Axiomatik kein eindeutiges Optimum gibt, keineswegs bedeutet, daß die Erzeugnisse der geometrischen Axiomatik notwendig den Charakter des Unvollkommenen und Fragmentarischen tragen. Sie wissen, daß auf diesem Gebiete etliche Gestaltungen von großer Vollkommenheit und Abrundung erreicht worden sind. Gerade die Vielheit der möglichen Zielrichtungen bewirkt, daß durch das Neuere das Frühere im allgemeinen nicht schlechtweg überholt wird, während andererseits auch jede erreichte Vollkommenheit immer noch Platz läßt für weitere Aufgaben.

Anhang. *Bemerkungen zu der Aufgabe einer Axiomatisierung der euklidischen Planimetrie mit der einzigen Grundbeziehung $R(a, b, c)$: „das Punktetripel a, b, c bildet bei b einen rechten Winkel".* Die Axiomatisierung gelingt insoweit auf einfache Art, als nur die Beziehungen der Kollinearität und des
9 Parallelismus betrachtet werden. Für die Theorie der Kolli|nearität genügen die folgenden Axiome:

A1 $\neg R(a, b, a)$

A2 $R(a, b, c) \ \rightarrow\ R(c, b, a) \ \& \ \neg R(a, c, b)$ [2]

A3 $R(a, b, c) \ \& \ R(a, b, d) \ \& \ R(e, b, c) \ \rightarrow\ R(e, b, d)$

A4 $R(a, b, c) \ \& \ R(a, b, d) \ \& \ c \neq d \ \& \ R(e, c, b) \ \rightarrow\ R(e, c, d)$

A5 $a \neq b \ \rightarrow\ (Ex)R(a, b, x)$.[5*]

Dazu tritt die Definition der Beziehung $\mathrm{Koll}(a, b, c)$: „die Punkte a, b, c sind kollinear":

Definition 1. $\mathrm{Koll}(a, b, c) \ \leftrightarrow\ (x)(R(x, a, b) \rightarrow R(x, a, c)) \vee a = c.$

Es sind dann die folgenden Sätze beweisbar:

(1) $\mathrm{Koll}(a, b, c) \ \leftrightarrow\ a = b \vee a = c \vee b = c \vee (Ex)(R(x, a, b) \ \& \ R(x, a, c))$

(2) $\mathrm{Koll}(a, b, c) \ \rightarrow\ \mathrm{Koll}(a, c, b) \ \& \ \mathrm{Koll}(b, a, c)$

(3) $\mathrm{Koll}(a, b, c) \ \& \ \mathrm{Koll}(a, b, d) \ \& \ a \neq b \ \rightarrow\ \mathrm{Koll}(b, c, d)$

[2] Durch dieses Axiom wird bereits die elliptische Geometrie ausgeschlossen.

[5*] Paul de Witte hat darauf aufmerksam gemacht, daß A3 als Axiom entbehrlich ist, da die Formel aus A2, A4, A5 abgeleitet werden kann. (*vide* [**?**])

(4) $R(a,b,c)$ & $\mathrm{Koll}(b,c,d)$ & $b \neq d \;\rightarrow\; R(a,b,d)$

(5) $R(a,b,c) \;\rightarrow\; \neg\mathrm{Koll}(a,b,c)$

(6) $R(a,b,c)$ & $R(a,b,d) \;\rightarrow\; \mathrm{Koll}(b,c,d)$

(7) $R(a,b,c)$ & $R(a,b,d) \;\rightarrow\; \neg R(a,c,d)$.
Zum Beweis: $\mathrm{Koll}(c,d,b)$ & $c \neq b \;\rightarrow\; (R(a,c,d) \rightarrow R(a,c,b))$

(8) $R(a,b,c)$ & $R(a,b,d)$ & $R(a,e,c)$ & $R(a,e,d) \;\rightarrow\; c = d \vee b = e$.
Zum Beweis: $\mathrm{Koll}(b,c,d)$ & $\mathrm{Koll}(e,c,d)$ & $c \neq d \;\rightarrow\; \mathrm{Koll}(b,c,e)$
$\mathrm{Koll}(b,c,e)$ & $b \neq e$ & $R(a,b,c) \;\rightarrow\; R(a,b,e)$
$\mathrm{Koll}(e,c,b)$ & $b \neq e$ & $R(a,e,c) \;\rightarrow\; R(a,e,b)$
$R(a,b,e) \rightarrow \neg R(a,e,b)$.

Für die Theorie des Parallelismus nehmen wir zwei weitere Axiome hinzu:

A6 $a \neq b$ & $a \neq c \;\rightarrow\; (Ex)(R(x,a,b)$ & $R(x,a,c)) \vee$
$(Ex)(R(a,x,b)$ & $R(a,x,c)) \vee R(a,b,c) \vee R(a,c,b)$

10 | Das Axiom besagt in üblicher Ausdrucksweise, daß man von einem Punkte a außerhalb einer Geraden bc auf diese eine Senkrechte fällen kann. Die eindeutige Bestimmtheit der Senkrechten in Abhängigkeit von dem Punkt a und der Geraden bc ergibt sich mit Hilfe von (4) und (8).

A7 $R(a,b,c)$ & $R(b,c,d)$ & $R(c,d,a) \;\rightarrow\; R(d,a,b)$

Dieses ist eine Form des euklidischen Parallelenaxioms im engeren, winkelmetrischen Sinn.

A151 | Die Parallelität wird nun definiert durch:

Definition 2. $\mathrm{Par}(a,b;c,d) \;\leftrightarrow\; a \neq b$ & $c \neq d$ & $(Ex)(Ey)(R(a,x,y)$ & $R(b,x,y)$ & $R(c,y,x)$ & $R(d,y,x))$

Als beweisbare Sätze ergeben sich:

(9) $\mathrm{Par}(a,b;c,d) \;\rightarrow\; \mathrm{Par}(b,a;c,d)$ & $(c,d;a,b)$

(10) $\mathrm{Par}(a,b;c,d) \;\rightarrow\; a \neq c$ & $a \neq d$ & $b \neq c$ & $b \neq d$

(11) $\mathrm{Par}(a,b;c,d) \;\leftrightarrow\; a \neq b$ & $c \neq d$ & $(Ex)(Eu)($
$(R(a,x,u) \vee x = a)$ & $(R(b,x,u) \vee x = b)$ &
$(R(x,u,c) \vee u = c)$ & $(R(x,u,d) \vee u = d)\,)$

Für den Beweis der Implikation von rechts nach links hat man zu zeigen, daß auf einer Geraden ab mindestens fünf verschiedene Punkte liegen, was mit Hilfe der Axiome A1–A6 gelingt.

$$\text{(12)}\ \ \mathrm{Par}(a,b;c,d) \ \rightarrow\ (x)((R(a,x,c) \vee x=a)\ \&\ (R(b,x,c) \vee x=b) \rightarrow R(x,c,d))$$

$$\text{(13)}\ \ \mathrm{Par}(a,b;c,d)\ \&\ \mathrm{Koll}(a,b,e)\ \&\ b \neq e \ \rightarrow\ \mathrm{Par}(b,e;c,d)$$

und daraus insbesondere

$$\text{(14)}\ \ \mathrm{Par}(a,b;c,d) \ \rightarrow\ \neg\mathrm{Koll}(a,b,c);$$

ferner

$$\text{(15)}\ \ \mathrm{Par}(a,b;c,d)\ \&\ \mathrm{Koll}(a,b,e) \ \rightarrow\ \neg\mathrm{Koll}(c,d,e)$$

$$\text{(16)}\ \ \neg\mathrm{Koll}(a,b,c) \ \rightarrow\ (Ex)\mathrm{Par}(a,b;c,x)$$

$$\text{(17)}\ \ \mathrm{Par}(a,b;c,d)\ \&\ \mathrm{Par}(a,b;c,e) \ \rightarrow\ \mathrm{Koll}(c,d,e)$$

$$\text{(18)}\ \ \mathrm{Par}(a,b;c,d)\ \&\ \mathrm{Par}(a,b;e,f) \ \rightarrow\ \mathrm{Par}(c,d;e,f) \vee (\mathrm{Koll}(e,c,d)\ \&\ \mathrm{Koll}(f,c,d)).$$

11 An den Begriff des Parallelismus knüpft sich noch der der Vektor|gleichheit: „ab und cd sind die Gegenseiten eines Parallelogramms“:

Definition 3. $\mathrm{Pag}(a,b;c,d) \ \leftrightarrow\ \mathrm{Par}(a,b;c,d)\ \&\ \mathrm{Par}(a,c;b,d)$

Man kann hiermit beweisen:

$$\text{(19)}\ \ \mathrm{Pag}(a,b;c,d) \ \rightarrow\ \mathrm{Pag}(c,d;a,b)\ \&\ \mathrm{Pag}(a,c;b,d)$$

$$\text{(20)}\ \ \mathrm{Pag}(a,b;c,d)\ \&\ \mathrm{Pag}(a,b;c,e) \ \rightarrow\ d=e$$

$$\text{(21)}\ \ \mathrm{Pag}(a,b;c,d) \ \rightarrow\ \neg\mathrm{Koll}(a,b,c).$$

Für den Beweis des Existenzsatzes

$$\text{(22)}\ \ \neg\mathrm{Koll}(a,b,c) \ \rightarrow\ (Ex)\mathrm{Pag}(a,b;c,x)$$

bedarf es noch eines weiteren Axioms:

$$\text{A8}\ \ R(a,b,c) \ \rightarrow\ (Ex)(R(a,c,x)\ \&\ R(c,b,x)).$$

Mit Hilfe dieses Axioms ist generell beweisbar, daß zwei verschiedene, nicht parallele Geraden einen Schnittpunkt besitzen:

$$(23)\ \neg\mathrm{Koll}(a,b,c)\ \&\ \neg\mathrm{Par}(a,b;c,d)\ \rightarrow\ (Ex)(\mathrm{Koll}(a,b,x)\ \&\ \mathrm{Koll}(c,d,x)).$$ – [6*]

A152 Ob sich im Ganzen eine übersichtliche Axiomatik mit dem Grund|begriff R erreichen läßt, bleibe dahingestellt. Wir begnügen uns hier damit, Definitionen für die wesentlichen weiteren Begriffe aufzustellen. Für diese läßt sich immerhin eine gewisse Übersichtlichkeit erreichen.

An die Figur des Parallelogramms knüpfen sich die folgenden zwei verschiedenen Definitionen der Beziehung „a ist Mittelpunkt der Strecke bc“:

Definition $\mathbf{4_1}$. $Mp_1(a;b,c)\ \leftrightarrow\ (Ex)(Ey)(\mathrm{Pag}(b,x;y,c)\ \&\ \mathrm{Koll}(a,b,c)\ \&\ \mathrm{Koll}(a,x,y))$

Definition $\mathbf{4_2}$. $Mp_2(a;b,c)\ \leftrightarrow\ (Ex)(Ey)(\mathrm{Pag}(x,y;a,b)\ \&\ \mathrm{Pag}(x,y;c,a))$.

Im Sinne der zweiten Definition kann man die Möglichkeit der Verdoppelung einer Strecke beweisen:

$$(24)\ a \neq b\ \rightarrow\ (Eu)Mp_2(a;b,u).$$

Die Existenz des Mittelpunktes einer Strecke im Sinne der Df. 4_1, d. h.

$$(25)\ b \neq c\ \rightarrow\ (Eu)Mp_1(u;b,c),$$

12 läßt sich beweisen, wenn man noch das Axiom hinzunimmt: |

A9 $\mathrm{Par}(a,b;c,d)\ \&\ \mathrm{Par}(a,c;b,d)\ \rightarrow\ \neg\mathrm{Par}(a,d;b,c)$.
(Im Parallelogramm schneiden sich die Diagonalen.)

Durch Spezialisierung der zur Definition von Mp_1 gehörigen Figur erhalten wir eine Definition der Beziehung „a,b,c bilden ein gleichschenkliges Dreieck mit der Spitze in a“:

Definition $\mathbf{5_1}$. $Ist_1(a;b,c)\ \leftrightarrow\ (Eu)(Ev)(\mathrm{Pag}(a,b;c,v)\ \&\ R(a,u,b)\ \&\ R(a,u,c)\ \&\ R(b,u,v))$.

Mit Hilfe von Mp_1 und Ist_1 können wir den Pierischen Grundbegriff: „a hat von b und c gleichen Abstand“ definieren:

[6*] Das Vorderglied $\neg\mathrm{Koll}(a,b,c)$ ist, wie man leicht einsieht, entbehrlich.

Definition 6. $Is_1(a;b,c) \;\leftrightarrow\; b = c \vee Mp_1(a;b,c) \vee Ist_1(a;b,c)$.

Eine andere Art der Definition des Begriffes *Is* beruht auf der Verwendung der Symmetrie. Hierzu dient folgender Hilfsbegriff: „a, b, c, d, e bilden ein ‚normales' Quintupel":

Definition 7. $Qn(a,b,c,d,e) \;\leftrightarrow\; R(a,c,b) \;\&\; R(a,d,b) \;\&\; R(a,e,c) \;\&$
$R(a,e,d) \;\&\; R(b,e,c) \;\&\; c \neq d$.

Mit Hilfe von Qn erhalten wir eine weitere Art der Definition für *Mp* und *Ist*:

Definition 4₃. $Mp_3(a;b,c) \;\leftrightarrow\; (Ex)(Ey)Qn(x,y,b,c,a)$

Definition 5₂. $Ist_2(a;b,c) \;\leftrightarrow\; (Ex)(Ey)Qn(a,x,b,c,y)$,

aus denen sich Is_2 entsprechend wie Is_1 definieren läßt.

Ferner schließt sich hieran noch die Definition der Spiegelbildlichkeit von Punkten a, b in Bezug auf eine Gerade cd:

Definition 8. $\mathrm{Sym}(a,b;c,d) \;\leftrightarrow\; c \neq d \;\&\; (Ex)(Ey)(Ez)(\mathrm{Koll}(x,c,d) \;\&$
$\mathrm{Koll}(y,c,d) \;\&\; Qn(x,y,a,b,z))$.–

A153 | Für die Definition der Streckenkongruenz brauchen wir schließlich noch den Begriff der gleichsinnigen Kongruenz auf einer Geraden: „die Strecken ab und cd sind kollinear, kongruent und gleichgerichtet":

Definition 9₁. $Lg_1(a,b;c,d) \;\leftrightarrow\; \mathrm{Koll}(a,b,c) \;\&$
$(Ex)(Ey)(\mathrm{Pag}(a,x;b,y) \;\&\; \mathrm{Pag}(c,x;d,y))$,

oder auch:

Definition 9₂. $Lg_2(a,b;c,d) \;\leftrightarrow$
$\mathrm{Koll}(a,b,c) \;\&\; a \neq b \;\&\; (Ex)(Mp(x;b,c) \;\&\; Mp(x;a,d)) \;\vee$
$(a = d \;\&\; Mp(a;b,c)) \vee (b = c \;\&\; Mp(b;a,d))$,

13 | (wobei für *Mp* eine der drei obigen Definitionen genommen werden kann). Nunmehr kann im Ganzen (mit jeder der beiden Definitionen von *Lg*) die Streckenkongruenz definiert werden:

Definition 10. $Kg(a,b;c,d) \;\leftrightarrow\; Lg(a,b;c,d) \vee Lg(a,b;d,c) \;\vee$
$(a = b \;\&\; Is_1(a;b,d)) \vee (Ex)(\mathrm{Pag}(a,b;c,x) \;\&\; Is_1(c;x,d))$.

Durch eine Definition analog derjenigen von Lg_2 kann man auch die Kongruenz von Winkeln mit gleichem Scheitelpunkt als sechsstellige Beziehung einführen, nachdem man vorher den Begriff der Winkelhalbierenden eingeführt hat: „d ($\neq a$) liegt auf der Halbierenden des Winkels $b\,a\,c$“:

Definition 11. $\mathrm{Wh}(a, d; b, c) \;\leftrightarrow\; \neg\mathrm{Koll}(a, d, c)\ \&$
$$(Ex)(Ey)(Ez)(\mathrm{Koll}(a, c, x)\ \&\ \mathrm{Koll}(a, d, y)\ \&\ Qn(a, y, b, x, z)).$$

In Anbetracht des sehr zusammengesetzten Charakters dieser Kongruenzbeziehung Kg wird man in der Axiomatisierung die Gesetze über Kg auf solche der als Bestandteile des definierenden Ausdrucks auftretenden Begriffe zurückführen. Dabei bestehen auf Grund der Mehrheit der Definitionen von Mp, Ist, Is Alternativen in Hinsicht darauf, ob man in stärkerem Maße die Beziehungen des Parallelismus oder die der Symmetrie heranzieht. Auf jeden Fall dürfte das Axiom der Vektorgeometrie

A10. $\mathrm{Pag}(a, b; p, q)\ \&\ \mathrm{Pag}(b, c; q, r) \;\rightarrow$
$$\mathrm{Pag}(a, c; p, r) \vee (\mathrm{Koll}(a, c, p)\ \&\ \mathrm{Koll}(a, c, r))$$

oder ein gleichwertiges zweckmäßig sein. Im Ganzen könnte man sich hierbei als Ziel setzen, das in der euklidischen Planimetrie vorliegende Zusammenspiel von Parallelismus und Spiegelung auf eine möglichst symmetrische Art zur Darstellung zu bringen.

Was endlich die Zwischenbeziehung betrifft, so ist die Figur für die Definition der Beziehung „a liegt zwischen b und c“ schon als Bestandteil in derjenigen von Qn enthalten. Nämlich wir können definieren:

Definition 12. $\mathrm{Zw}(a; b, c) \;\leftrightarrow\; (Ex)(R(b, a, x)\ \&\ R(c, a, x)\ \&\ R(b, x, c)).$

Für diesen Begriff sind zunächst beweisbar:

A154 (26) $\neg\mathrm{Zw}(a; b, b)$ |

13 (27) $\mathrm{Zw}(a; b, c) \;\rightarrow\; \mathrm{Zw}(a; c, b)$ |

(28) $\mathrm{Zw}(a; b, c) \;\rightarrow\; \mathrm{Koll}(a, b, c)$

und ferner mit Benutzung von A5, A6 und A8

(29) $a \neq b \;\rightarrow\; (Ex)\mathrm{Zw}(x; a, b)\ \&\ (Ex)\mathrm{Zw}(b; a, x).$

Für die Gewinnung der weiteren Eigenschaften des Zwischenbegriffes können die folgenden Axiome dienen:

A11 $R(a,b,c)$ & $R(a,b,d)$ & $R(c,a,d)$ & $R(e,c,b) \;\rightarrow\; \neg R(b,e,d)$

A12 $R(a,b,d)$ & $R(d,b,c)$ & $a \neq c \;\rightarrow\;$ Zw$(a;b,c) \vee$ Zw$(b;a,c) \vee$ Zw$(c;a,b)$

A13 Zw$(a;b,c)$ & Zw$(b;a,d) \;\rightarrow\;$ Zw$(a;c,d)$

A14 $R(a,b,d)$ & $R(d,b,c)$ & $R(a,c,e)$ & Zw$(d;a,e) \;\rightarrow\;$ Zw$(b;a,c)$

Aus diesem Axiom kann man in einigen Schritten den allgemeineren Satz gewinnen:

(30) Zw$(b;a,c)$ & Koll(a,d,e) & Par$(b,d;c,e) \;\rightarrow\;$ Zw$(d;a,e)$

Dieses gelingt mit Verwendung des Satzes

(31) $R(a,b,e)$ & $R(e,b,c)$ & $R(b,a,d)$ &
$R(b,c,f)$ & $R(b,e,d)$ & $R(b,e,f)$ & Zw$(b;a,c) \;\rightarrow\;$ Zw$(e;d,f)$.

welcher sich aus dem vorhin erwähnten Axiom A10 ableiten läßt.

Mit Hilfe von (30) und dem Axiom A13 läßt sich beweisen:

(32) $\neg$Koll(a,b,c) & Zw$(b;a,d)$ & Zw$(e;b,c) \;\rightarrow$
(Ex)(Koll(e,d,x) & Zw$(x;a,c)$).

d. h. das Axiom von Pasch in der engeren Veblenschen Fassung. –

Anschließend sei noch die folgende Definition von *Kg* mittels der Begriffe *Is* und *Zw* erwähnt, welche auf einer Konstruktion von Euklid beruht:

Definition 13. $Kg^*(a,b;c,d) \;\leftrightarrow\; (Ex)(Ey)(Ez)(Is(x,a;c)$ &
Zw$(y;a,x)$ & Zw$(z;c,x)$ & $Is(a;b,y)$ & $Is(c;d,z)$ & $Is(x;y,z))$.

(Für *Is* kann hier nach Belieben Is_1 oder Is_2 genommen werden.)

Von einer Axiomatik wie der hier geschilderten, bei der die Kollinearität und die Zwischenbeziehung mit der Orthogonalität verkoppelt wird, kann
15 man freilich nicht verlangen, daß sie eine Absonderung der Axiome | des Linearen liefert. Ferner ist die Anlage hier von vornherein im Hinblick auf die Planimetrie beschränkt, da die Definition der Kollinearität im Mehrdimensionalen nicht mehr anwendbar ist. Auch die Beschränkung auf die euklidische Geometrie wird schon an früher Stelle eingeführt. Andererseits kann diese Axiomatisierung sich besonders dafür eignen, die große Einfachheit und Eleganz der Gesetzlichkeit der euklidischen Planimetrie hervortreten zu lassen.