Bernays Project: Text No. 9

Die Philosophie der Mathematik und die Hilbertsche Beweistheorie (1930)

The philosophy of mathematics and Hilbert's proof theory

(*Blätter für deutsche Philosophie* 4, 1930–1931, S. 326–367;
repr. in *Abhandlungen*, S. 17–61)

Teil I
Das Wesen der mathematischen Erkenntnis

326/A17| Wenn wir heute von der Grundlagenkrisis in der Mathematik oder von dem Streit zwischen „Formalismus" und „Intuitionismus" lesen und hören, so kann derjenige, der mit dem Betriebe der mathematischen Wissenschaft nicht vertraut ist, auf den Gedanken kommen, als sei diese Wissenschaft von Grund auf erschüttert. In Wirklichkeit bewegt sich die Mathematik jetzt schon seit langem in einem dermaßen glatten Fahrwasser, daß man eher einen Mangel an stärkeren Sensationen verspürt, obwohl es an bedeutenden systematischen Fortschritten und glänzenden Leistungen durchaus nicht fehlt.

Tatsächlich entspringt die gegenwärtige Diskussion über die Grundlagen der Mathematik auch gar nicht einer Notlage der Mathematik selbst. Diese befindet sich in einem völlig befriedigenden Zustande methodischer Sicherheit. Insbesondere ist die Beunruhigung durch die Paradoxien der Mengenlehre längst überwunden, seitdem man erkannt hat, daß zur Vermeidung der angetroffenen Widersprüche solche Beschränkungen ausreichen, welche die Ansprüche der mathematischen Theorien an die Mengenlehre nicht im geringsten antasten.

Die Problematik, die Schwierigkeiten und Meinungsverschiedenheiten beginnen vielmehr erst da, wo man nicht einfach nach den mathematischen Tatsachen, sondern nach den Erkenntnisgründen und nach der Abgrenzung der Mathematik fragt. Diese Fragen philosophischen Charakters haben eine besondere Dringlichkeit erhalten seit der Wandlung, welche die methodische Einstellung der Mathematik gegen Ende des 19. Jahrhunderts erfuhr.

Die kennzeichnenden Momente dieser Wandlung sind: das Vordringen des Mengenbegriffs, mit Hilfe dessen die strenge Begründung der Infinitesimalrechnung gelang, und ferner das Aufkommen der existentialen Axiomatik, d. h. der Methode der Entwicklung einer mathematischen Disziplin als Lehre von einem System von Dingen mit bestimmten Verknüpfungen, deren Eigenschaften den Inhalt der Axiome bilden. Dazu tritt noch, als Folge der beiden
A18 genannten | Momente, die Herstellung einer engeren Verbindung zwischen Mathematik und Logik.

327 | Diese Entwicklung stellte die Philosophie der Mathematik vor eine völlig neue Situation und vor ganz neue Einsichten und Probleme. Die Diskussion über die Grundlagen der Mathematik ist von da an nicht zur Ruhe gekommen. In dem gegenwärtigen Stadium dieser Diskussion steht im Vordergrund die Auseinandersetzung mit den Schwierigkeiten, welche durch die Rolle des Unendlichen in der Mathematik verursacht werden.

Das Problem des Unendlichen bildet aber nicht die erste und auch nicht die allgemeinste Frage, mit der man sich in der Philosophie der Mathematik auseinanderzusetzen hat. Hier handelt es sich zunächst darum, überhaupt Klarheit darüber zu gewinnen, worin das Spezifische der mathematischen Erkenntnis besteht. Wir wollen uns zuerst mit dieser Frage befassen und uns dabei – wenn auch nur in groben Zügen und ohne eine genau chronologische Anordnung – die Entwicklung der Ansichten in Erinnerung rufen.

1 Die Entwicklung der Auffassungen von der Mathematik

Die ältere Auffassung von der mathematischen Erkenntnis ging aus von der Zweiteilung der Mathematik in Arithmetik und Geometrie; für sie war die Mathematik charakterisiert als Lehre von zweierlei bestimmten Sachgebieten, dem der Zahlen und dem der geometrischen Figuren. Diese Zweiteilung ließ sich aber schon angesichts des Vordringens der arithmetischen Methode in der Geometrie nicht halten. Auch begnügte sich die Geometrie keineswegs damit, die Eigenschaften von Figuren zu studieren, sondern erweiterte sich zu einer allgemeinen Theorie der Mannigfaltigkeiten. Die völlig veränderte Situation der Geometrie fand einen besonders prägnanten Ausduck in Kleins Erlanger Programm, welches die verschiedenen Zweige der Geometrie unter dem Gesichtspunkt einer gruppentheoretischen Aufgabestellung systematisch zusammenfaßte.

Angesichts dieser Sachlage ergab sich die Möglichkeit, die Geometrie in die Arithmetik einzuordnen, und da die strenge Begründung der Infinitesimalrechnung durch Dedekind, Weierstraß und Cantor die allgemeineren Zahlbegriffe, wie sie die mathematische Größenlehre erfordert (rationale Zahl, reelle Zahl), auf die gewöhnlichen („natürlichen") Zahlen 1, 2, … zurückführte, so bildete sich die Auffassung, daß die natürlichen Zahlen das wahre Objekt der Mathematik bilden und daß die Mathematik eben in der *Lehre von den Zahlen* bestehe.

A19 | Diese Auffassung hat viele Anhänger. Für sie spricht der Umstand, daß alle mathematischen Gegenstände sich repräsentieren lassen durch Zahlen oder Zahlenkombinationen oder durch höhere Mengenbildungen, welche von der Zahlenreihe aus gewonnen werden. In grundsätzlicher Hinsicht ist aber
328 die | Charakterisierung der Mathematik als Lehre von den Zahlen schon darum unbefriedigend, weil dabei offen bleibt, was man denn als das Wesentliche an der Zahl betrachtet. Die Frage nach der Natur der mathematischen Erkenntnis wird hiermit verschoben auf die Frage nach der Natur der Zahlen.

Jedoch erscheint diese Frage den ausgesprochenen Vertretern der Auffassung von der Mathematik als der Wissenschaft von den Zahlen als gänzlich müßig. Diese gehen von der Einstellung aus, wie sie dem mathematischen Denken die geläufige ist, daß nämlich die Zahlen eine Gattung von Dingen bilden, die ihrer Art nach uns völlig vertraut sind, dermaßen, daß eine Antwort auf die Frage nach der Natur der Zahlen nur darin bestehen könnte, etwas Bekanntes auf etwas weniger Bekanntes zurückzuführen. Den Grund für die Sonderstellung der Zahlen erblickt man von diesem Standpunkt aus darin, daß die Zahlen einen wesentlichen Bestandteil der Weltordnung ausmachen, die uns eben gerade in dem Maße streng wissenschaftlich verständlich ist, wie sie durch das Moment der Zahl beherrscht wird.

Dieser Ansicht, wonach die Zahl etwas ganz Absolutes und Letztes ist, trat bald, in der schon erwähnten Epoche der Ausbildung der Mengenlehre und der Axiomatik, die ganz andere Auffassung entgegen, welche eine besondere, eigentümliche Art der mathematischen Erkenntnisweise überhaupt bestreitet und die Behauptung vertritt, daß die Mathematik *aus reiner Logik* zu gewinnen sei. Zu dieser Auffassung wurde man naturgemäß hingeführt einerseits durch die Axiomatik und andererseits auch von der Mengenlehre aus.

Die neue methodische Wendung in der Axiomatik bestand in der Hervorkehrung der Tatsache, daß für die Entwicklung einer axiomatischen Theorie der Erkenntnischarakter ihrer Axiome gleichgültig ist. Die strenge Axiomatik verlangt, daß in den Beweisen keine anderen Erkenntnisse aus dem zu behandelnden Sachgebiet benutzt werden als die, welche ausdrücklich in den Axiomen formuliert sind. So ist schon bei Euklid die Axiomatik gemeint, wenn auch an gewissen Stellen das Programm nicht restlos durchgeführt ist.

Gemäß dieser Forderung wird durch die Entwicklung einer axiomatischen Theorie die logische Abhängigkeit der Lehrsätze von den Axiomen dargetan. Für diese logische Abhängigkeit ist es aber gleichgültig, ob die voran-
A20 gestellten Axiome wahre Sätze sind oder nicht; sie stellt einen | rein hypothetischen Zusammenhang dar: wenn es sich so verhält, wie die Axiome aussagen, dann gelten die Lehrsätze. Eine solche Loslösung der Deduktion von der Behauptung der Wahrheit der Ausgangssätze ist keineswegs eine müßige Spitzfindigkeit. Vielmehr kann eine axiomatische Entwicklung von Theorien, die ohne Rücksicht auf die Wahrheit der zum Ausgang genomme-
329 nen Grundsätze erfolgt, für unsere wissenschaftliche | Erkenntnis von hohem Wert sein, indem auf diese Weise einerseits Annahmen, deren Zutreffen zweifelhaft ist, durch die systematische Verfolgung ihrer logischen Konsequenzen einer Prüfung an Hand der Tatsachen zugänglich gemacht werden und ferner die *Möglichkeiten der Theorienbildung* a priori, nach Gesichtspunkten der systematischen Einfachheit, gleichsam auf Vorrat durch die Mathematik erforscht werden können. Mit der Entwicklung solcher Theorien übernimmt die Mathematik die Rolle derjenigen Disziplin, welche man früher als *mathematische Naturphilosophie* bezeichnete.

Indem man nun bei einem Axiomensystem von der Wahrheit der Axiome ganz absieht, wird auch die inhaltliche Auffassung der Grundbegriffe irrelevant, und man kommt so dazu, überhaupt *von allem anschaulichen Inhalt der Theorie zu abstrahieren.* Diese Abstraktion wird noch unterstützt durch ein zweites Moment, das in der neueren Axiomatik, wie sie vor allem in Hilberts *Grundlagen der Geometrie* zur Ausbildung gelangte, noch hinzukommt und welches überhaupt für die Gestaltung der neueren Mathematik wesentlich ist, nämlich die *existentiale* Fassung der Theorie.

Während Euklid sich die zu betrachtenden Figuren immer konstruiert denkt, geht die heutige Axiomatik aus von der Vorstellung eines von vornherein festliegenden *Systems von Dingen*. Man denkt sich z. B. in der Geometrie die Punkte, Geraden und Ebenen in ihrer Gesamtheit als ein solches System von Dingen. Innerhalb dieses Systems denkt man die Beziehungen der Inzidenz (das Liegen eines Punktes auf einer Geraden bzw. in einer Ebene), des Zwischenliegens (ein Punkt liegt zwischen zwei andern) und der Kongruenz als von vornherein bestimmt. Diese Beziehungen können nun, ohne Rücksicht auf ihre anschauliche Bedeutung, rein abstrakt als gewisse *Grundprädikate* charakterisiert werden. (Den Terminus „Prädikat" wollen wir auch im Falle einer Beziehung zwischen mehreren Gegenständen anwenden, so daß wir auch von Prädikaten mit mehreren Subjekten sprechen.[1])

A21 | So tritt nun z. B. an die Stelle des euklidischen Konstruktions-Postulates, welches die Möglichkeit der Verbindung zweier Punkte durch eine Gerade fordert, im Hilbertschen System das Existenzaxiom: Zu zwei Punkten gibt es stets eine Gerade, die mit jedem der beiden Punkte zusammengehört. „Zusammengehören" ist hier der abstrakte Ausdruck für die Inzidenz.

330 | Im Sinne dieser Auffassung der Axiomatik stellen sich sowohl die Axiome wie die Lehrsätze einer axiomatischen Theorie als Aussagen über ein oder mehrere Prädikate dar, welche sich auf die Dinge eines zu Grunde gelegten Systems beziehen, und die Erkenntnis, welche uns der Beweis eines Lehrsatzes L liefert, der mit Hilfe der Axiome $A_1 \dots A_k$ geführt ist – wir wollen der Einfachheit halber annehmen, daß darin nur von *einem* Prädikat die Rede sei –, besteht in der Feststellung, daß, wenn für ein Prädikat die Aussagen $A_1 \dots A_k$ zutreffen, dann auch die Aussage L darauf zutrifft.

Was wir hier vor uns haben, ist aber ein ganz allgemeiner Satz über Prädikate, d. h. ein Satz der reinen Logik. In dieser Weise stellen sich die Ergebnisse einer axiomatischen Theorie, im Sinne der rein hypothetischen und existentialen Fassung der Axiomatik, als *Sätze der Logik* dar.

Diese Sätze sind allerdings nur dann von Bedeutung, wenn die in den Axiomen formulierten Anforderungen sich überhaupt durch ein System von Dingen mit gewissen auf sie bezogenen Prädikaten erfüllen lassen. Ist eine solche Erfüllung undenkbar, d. h. logisch unmöglich, so führt das Axiomensystem zu gar keiner Theorie, und die einzige logisch belangvolle Aussage

[1]Diese Bezeichnungsweise entspricht einem Vorschlag von Hilbert. Sie bietet gegenüber der üblichen Unterscheidung zwischen „Prädikaten" und „Relationen" für die Auffassung des prinzipiell Logischen gewisse Vorteile und steht auch mit dem gewöhnlichen Sinne des Wortes „Prädikat" im Einklang.

über das System ist dann die Feststellung des aus den Axiomen sich ergebenden Widerspruchs. Aus diesem Grunde besteht für jede axiomatische Theorie die Erforderlichkeit eines Nachweises der *Erfüllbarkeit*, d. h. der *Widerspruchsfreiheit* ihrer Axiome.

Dieser Nachweis geschieht nun im allgemeinen, sofern man nicht mit direkten endlichen Modell-Konstruktionen auskommt, durch die Methode der *Zurückführung auf die Arithmetik*, d. h. dadurch, daß man innerhalb des Bereiches der Arithmetik Gegenstände und Beziehungen aufweist, welche die zu untersuchenden Axiome erfüllen. Hiermit wird man von neuem vor die Frage nach dem Erkenntnischarakter der Arithmetik gestellt.

A22 Noch ehe diese Frage in dem geschilderten Zusammenhang mit der | Axiomatik akut wurde, hatte bereits die Mengenlehre und die Logistik in neuartiger Weise zu ihr Stellung genommen. Cantor zeigte, daß der Zahlbegriff sowohl im Sinne der Kardinalzahl (Anzahl) wie im Sinne der Ordinalzahl (Ordnungszahl) sich auf unendliche Mengen ausdehnen läßt. Die Theorie der natürlichen Zahlen und die Theorie der Maßzahlen (die Analysis) wurden als Teilgebiete in die allgemeine Mengenlehre eingeordnet. Büßte hiermit die natürliche Zahl von ihrer ausgezeichneten Rolle Wesentliches ein, so bildete doch auch für den Standpunkt Cantors die Reihe der Zahlen etwas unmittelbar Gegebenes, von dessen Betrachtung die Mengenlehre ihren Ausgang nahm.

331 | Hierbei blieb man aber nicht stehen, vielmehr gingen die Logiker bald zu der weitergehenden Behauptung über: die Mengen sind nichts anderes als Begriffsumfänge und die Mengenlehre ist gleichbedeutend mit der Umfangs-Logik, insbesondere ist auch die Lehre von den Zahlen aus reiner Logik abzuleiten.

Mit dieser These, daß die Mathematik aus reiner Logik zu gewinnen sei, wurde ein alter Lieblingsgedanke der rationalen Philosophie wieder aufgenommen, der durch die Kantische Lehre von der reinen Anschauung zurückgedrängt worden war.

Nun zeigte ohnehin schon die Entwicklung der Mathematik und der theoretischen Physik, daß die Kantische Theorie der Erfahrung jedenfalls einer grundsätzlichen Revision bedurfte, und den radikalen Gegnern der Philosophie Kants schien jetzt der Moment gekommen, diese Philosophie bereits in ihrer Anfangs-These, nämlich der Behauptung des synthetischen Charakters der Mathematik, zu entkräften.

Dieses ist aber doch nicht restlos gelungen. Ein erstes Symptom dafür, daß der Sachverhalt schwieriger und verwickelter war, als die Führer der logistischen Bewegung ihn sich dachten, zeigte sich in der Entdeckung der berühmten *mengentheoretischen Paradoxien*. Diese Entdeckung bildete historisch das Signal zum Einsetzen der Kritik. Wenn wir heute den Sachverhalt philosophisch erörtern wollen, so ist es befriedigender, die Überlegung direkt, ohne Heranziehung des dialektischen Argumentes der Paradoxien zu führen.

2 Das mathematische Element in der Logik – Die Fregeschen Anzahldefinitionen

Wir brauchen in der Tat, um auf die wesentlichen Gesichtspunkte zu kommen,
nur die neue Disziplin der theoretischen Logik, das Gedankenwerk der großen
A23 Logiker Frege, Schröder, Peano, Russell selbst zu | betrachten und zuzusehen,
was sie uns über das Verhältnis des Mathematischen zum Logischen lehrt.

Es zeigt sich da sogleich eine eigenartige Doppelseitigkeit dieses Verhältnisses, welche sich schon an einer verschiedenartigen Fassung der Aufgabe der theoretischen Logik kundtut: während Frege bestrebt ist, die mathematischen Begriffe den Begriffsbildungen der Logik unterzuordnen, sucht Schröder umgekehrt den mathematischen Charakter der logischen Beziehungen hervorzukehren und entwickelt seine Theorie als eine „Algebra der Logik".

Doch besteht der Unterschied hier nur in der Betonung. In den verschie-
denen Systemen der Logistik finden wir nirgends den spezifisch logischen
Gesichtspunkt als allein beherrschend, sondern überall von vornherein mit
332 mathe|matischer Betrachtungsweise durchsetzt. Der mathematische Forma-
lismus und die mathematische Begriffsbildung erweist sich hier in ganz ana-
loger Weise wie im Gebiete der theoretischen Physik als das sachgemäße
Hilfsmittel zur Darstellung der Zusammenhänge und zur Gewinnung eines
systematischen Überblicks.

Allerdings ist es nicht der gewöhnliche Formalismus der Algebra und der Analysis, der hier angewandt wird, sondern ein neu geschaffener Kalkül, den die theoretische Logik an Hand der Formelsprache entwickelt, mit der sie die logischen Verknüpfungen darstellt. Daß dieser Kalkül und seine Theorie einen ausgesprochen mathematischen Charakter hat, darüber wird niemand, der ihn kennt, im Zweifel sein.

An diesem Sachverhalt stellt sich zunächst das Erfordernis heraus, den Begriff des Mathematischen unabhängig von dem faktischen Bestande an mathematischen Disziplinen durch eine grundsätzliche Charakterisierung der mathematischen Erkenntnisart abzugrenzen. Wenn wir dem nachgehen, was wir unter dem mathematischen Charakter einer Betrachtung verstehen, so zeigt sich, daß das Kennzeichnende in einer bestimmten Art der Abstraktion liegt, die dabei zur Geltung kommt. Diese Abstraktion, welche als die *formale* oder *mathematische Abstraktion* bezeichnet werden möge, besteht darin, daß von einem Gegenstand – „Gegenstand“ hier im weitesten Sinne genommen – die strukturellen Momente, d. h. die Art seiner Zusammensetzung aus Bestandteilen hervorgekehrt und ausschließlich in Betracht gezogen wird. Man kann demnach als mathematische Erkenntnis eine solche definieren, welche auf der *strukturellen* Betrachtung von Gegenständen beruht.

Was uns nun des weiteren die Beschäftigung mit der theoretischen Logik lehrt, das ist, daß in der Beziehung von Mathematik und Logik die
A24 mathematische Betrachtungsweise gegenüber der inhaltlich logischen | unter Umständen den Standpunkt der höheren Abstraktion bildet. Die schon erwähnte Analogie der theoretischen Logik zur theoretischen Physik erstreckt sich auch darauf, daß gerade so, wie die mathematische Gesetzlichkeit der theoretischen Physik durch ihre physikalische Deutung inhaltlich spezialisiert wird, auch die mathematischen Beziehungen der theoretischen Logik durch ihre inhaltlich logische Deutung eine Spezialisierung erfahren. *Die Gesetzlichkeit der logischen Beziehungen erscheint hier als ein spezielles Modell für einen mathematischen Formalismus.*

Dieses eigentümliche Verhältnis zwischen Logik und Mathematik, daß nicht nur die mathematischen Urteile und Schlüsse einer logischen Abstraktion, sondern auch die logischen Beziehungen einer mathematischen Abstraktion unterworfen werden können, hat seinen Grund in der Sonderstellung,
333 die das Sachgebiet | des Formalen gegenüber der Logik einnimmt. Während nämlich sonst von den spezifischen Bestimmungen eines jeden Sachgebietes in der Logik abstrahiert werden kann, ist das bei dem Gebiete des Formalen nicht möglich, weil *in die Logik selbst formale Momente wesentlich eingehen.*

Dieses gilt insbesondere für das *logische Schließen.* Die theoretische Logik lehrt, daß man einen logischen Beweis „formalisieren“ kann. Die Methode der Formalisierung besteht darin, daß zunächst die Ausgangssätze des Beweises mit Hilfe der logischen Formelsprache durch gewisse Formeln dargestellt werden und ferner die Prinzipien des logischen Schließens durch Regeln ersetzt werden, welche bestimmte Verfahren angeben, gemäß denen man von gegebenen Formeln zu weiteren Formeln gelangt. Das Ergebnis des Beweises stellt sich dar durch eine Endformel, welche auf Grund der Deutung der logischen Formelsprache den zu beweisenden Satz wiedergibt.

Hierbei kommt zur Geltung, daß alles logische Schließen, seinem Verlaufe nach betrachtet, auf eine begrenzte Anzahl von logischen Elementarprozessen zurückführbar ist, die sich genau und vollständig aufzählen lassen. Dadurch wird es möglich, die Fragen der *Beweisbarkeit* systematisch zu verfolgen. Es ergibt sich hier ein Feld der theoretischen Forschung, innerhalb dessen die in der traditionellen Logik aufgestellte Lehre von den verschieden möglichen Formen der kategorischen Schlüsse nur ein ganz spezielles Sonderproblem behandelt.

Der typisch mathematische Charakter der Theorie der Beweisbarkeit gibt sich besonders deutlich durch die Rolle der logischen *Symbolik* kund. Die Symbolik ist hier das *Hilfsmittel zum Vollzuge der formalen Abstraktion.* Der
A25 Übergang von der inhaltlich logischen zu der | formalen Einstellung findet in der Weise statt, daß wir von der ursprünglichen Bedeutung der logischen Symbole absehen und die Symbole selbst zu *Repräsentanten* formaler Objekte und Verknüpfungen machen.

Wird z. B. die hypothetische Beziehung

„wenn A, so B“

symbolisch durch

$$A \to B$$

dargestellt, so besteht der Übergang zum formalen Standpunkt darin, daß wir von jener Bedeutung des Symbols $\to$ abstrahieren und die Verknüpfung durch das „Zeichen“ $\to$ selbst als das zu Betrachtende nehmen. Hiermit tritt allerdings an die Stelle der ursprünglichen inhaltlichen Spezialisierung der Verknüpfung eine figürliche Spezialisierung; diese ist aber insofern unschädlich,
334 als sie ohne weiteres als ein unwesentliches Moment erfaßt wird. | Das mathematische Denken vollzieht eben an Hand der Symbolfigur die formale Abstraktion.

Die Methode der formalen Betrachtung ist hier nun nicht etwa künstlich herangebracht, sondern sie stellt sich fast zwangsmäßig ein, wenn man das logische Schließen in Hinsicht auf seine Auswirkung näher verfolgen will.

Überlegen wir nun, woran es denn liegt, daß die Untersuchung des logischen Schließens so sehr der mathematischen Methode bedarf, so finden wir folgenden Sachverhalt. Im Beweisen kommen zwei wesentliche Momente zur Zusammenwirkung: das Klarlegen der Begriffe, das Moment der *Reflexion* und das mathematische Moment der *Kombination.*

Soweit das Schließen nur auf der Klarlegung der Bedeutungen beruht, ist es im engsten Sinne analytisch; das Fortschreiten zu etwas Neuem kommt erst durch mathematische Kombination zustande.

Dieses kombinatorische Element erscheint leicht als so selbstverständlich, daß es gar nicht als besonderer Faktor beachtet wird. In der Philosophie besonders pflegte man immer nur dasjenige an einer deduktiv gewonnenen Erkenntnis als erkenntnistheoretisch problematisch und der Erörterung bedürftig anzusehen, was für den Beweis das Vorgegebene ist: die Ausgangssätze und die Regeln des Schließens. Dieser Standpunkt ist aber für das philosophische Verständnis der Mathematik unzulänglich; denn die typische Leistung eines mathematischen Beweises setzt gerade erst ein, nachdem die Ausgangssätze und die Schlußregeln schon festliegen, und das Erstaunliche der mathematischen Ergebnisse schwindet nicht, wenn wir die beweisbaren Sätze inhaltlich dadurch modifizieren, daß wir die obersten Voraussetzungen
A26 der Theorie | als Prämissen einführen und außerdem auch noch die Regeln des Schließens, im Sinne des formalen Standpunktes, ausdrücklich angeben.

Zur Verdeutlichung des Sachverhaltes kann uns der von Weyl angestellte Vergleich eines rein formal geführten Beweises mit einem Schachspiel dienen; den Ausgangssätzen beim Beweise entspricht die Ausgangsstellung im Spiel, den Regeln des Schließens entsprechen die Spielregeln. Nehmen wir nun an, ein scharfsinniger Schachmeister habe für eine gewisse Anfangsstellung A die Möglichkeit entdeckt, in 10 Zügen den Gegner mattzusetzen. Vom Standpunkt der üblichen Betrachtungsweise müssen wir dann sagen, daß diese Möglichkeit *logisch* durch die Anfangsstellung und die Spielregeln bestimmt ist. Andererseits kann man aber doch nicht behaupten, daß in der Angabe der Anfangsstellung A und der Spielregeln die Behauptung, daß in 10 Zügen mattgesetzt werden kann, sinnesmäßig enthalten ist. Der Anschein ei-
335 nes Widerspruches zwischen diesen Behauptungen schwindet, wenn | wir uns klarmachen, daß die „logische“ Auswirkung der Spielregeln auf *Kombination* beruht und sich daher nicht durch bloße Bedeutungsanalyse, sondern nur durch wirkliche Vorführung herausstellt.

Eine Vorführung in diesem Sinne ist aber jeder mathematische Beweis. Es sei hier an einem einfachen Spezialfall dargelegt, wie sich das kombinatorische Element in einem Beweise geltend macht.

Wir haben die Schlußregel: „wenn A ist und wenn aus A folgt B, so ist B“. Bei einem ins Formale übersetzten Beweise entspricht diesem Schlußprinzip die Regel, daß aus zwei Formeln A, $A \to B$ die Formel B entnommen werden kann. Nun werde in einer formalen Ableitung diese Regel angewandt, und zwar wollen wir annehmen, daß A und $A \to B$ nicht zu den Ausgangsformeln gehören. Dann haben wir eine Schlußreihe S, die zu A führt, und eine solche T, die zu $A \to B$ führt; und nun liefern die Formeln A, $A \to B$ gemäß der genannten Regel die Formel B.

Wollen wir zergliedern, was hier vorgeht, so müssen wir uns hüten, durch die Art der Bezeichnung den entscheidenden Punkt vorwegzunehmen. Nämlich die Endformel der Schlußreihe T ist zunächst nur als solche bestimmt, und es ist für die Erkenntnis ein neuer Schritt, daß die Übereinstimmung dieser Formel mit derjenigen festgestellt wird, welche aus der anderweit erhaltenen Formel A und der abzuleitenden Formel B durch Zusammenfügen mittels „$\to$“ entsteht.

Die Feststellung einer Identität ist keineswegs immer eine identische (tautologische) Feststellung. Die im vorliegenden Falle zu konstatierende Übereinstimmung kann nicht direkt aus dem Inhalt der formalen Schlußregeln und
A27 aus der Struktur der Ausgangsformeln ab|gelesen werden, sondern ist ablesbar erst aus derjenigen Struktur, welche durch die Anwendung der Schlußregeln, d. h. durch die Ausführung der Schlüsse gewonnen wird. Es liegt also hier tatsächlich ein kombinatorisches Element vor.[2]

Wenn wir uns in dieser Weise die Rolle des Mathematischen in der Logik klarmachen, so wird uns die Möglichkeit einer Einordnung der Arithmetik in das System der theoretischen Logik nicht erstaunlich erscheinen. Aber diese Einordnung verliert auch für unseren gewonnenen Standpunkt ihre erkenntnistheoretische Bedeutsamkeit. Denn wir wissen im voraus, daß durch die Einfügung der Arithmetik in die logische Systematik das formale Element
336 nicht | beseitigt wird. In Hinsicht auf das Formale stellt aber, wie wir fanden, die mathematische Betrachtung gegenüber der begrifflich logischen den Standpunkt der höheren Abstraktion dar. Wir können also für die mathematischen Erkenntnisse durch ihre Einordnung in die Logik gar keine höhere Allgemeinheit gewinnen, sondern vielmehr umgekehrt nur eine *Spezialisierung durch logische Interpretation*, d. h. eine Art von *logischer Einkleidung.*

Ein typisches Beispiel einer solchen logischen Einkleidung bildet die Methode, nach der die natürlichen Zahlen von Frege und im Anschluß an ihn,

[2]Die Behauptung, daß das logische Schließen „synthetische Elemente“ enthält, hat P. Hertz in seiner Schrift *Über das Denken* (*vide* [**?**]) vertreten. Seine Begründung dieser Behauptung, welche in einer demnächst erscheinenden Abhandlung über das Wesen des Logischen dargelegt wird, enthält den hier erörterten Gesichtspunkt, beruht aber außerdem noch auf anderen Überlegungen.

mit einer gewissen Modifikation, von Russell definiert werden.

Vergegenwärtigen wir uns kurz den Gedankengang der Fregeschen Theorie. Frege führt die Zahlen als Anzahlen (Kardinalzahlen) ein. Seine Ausgangsthesen sind folgende:

Die Anzahl kommt als Bestimmung einem *Prädikat* zu. Der Anzahlbegriff entspringt aus dem Begriff der Gleichzahligkeit. Zwei Prädikate heißen gleichzahlig, wenn die Dinge, auf welche das eine Prädikat zutrifft, denen, auf welche das andere Prädikat zutrifft, umkehrbar eindeutig zugeordnet werden können.

Werden die Prädikate in bezug auf die Gleichzahligkeit in Klassen eingeteilt, derart, daß alle Prädikate einer Klasse einander gleichzahlig und Prädikate verschiedener Klassen ungleichzahlig sind, so stellt eine jede Klasse die *Anzahl* dar, welche den zu ihr gehörenden Prädikaten zukommt.

Im Sinne dieser allgemeinen Anzahldefinition werden nun die einzelnen endlichen Zahlen wie 0, 1, 2, 3 folgendermaßen definiert:

A28 | 0 ist die Klasse der Prädikate, die auf kein Ding zutreffen. 1 ist die Klasse der „einzahligen“ Prädikate, und ein Prädikat P heißt einzahlig, wenn es ein Ding x gibt, auf welches P zutrifft, und kein anderes (von x verschiedenes) Ding, auf welches P zutrifft. Entsprechend heißt ein Prädikat P zweizahlig, wenn es ein Ding x und ein davon verschiedenes Ding y gibt, so daß P auf x und auf y zutrifft, und wenn es kein von x und y verschiedenes Ding gibt, auf das P zutrifft. 2 ist die Klasse der zweizahligen Prädikate. In analoger Weise sind die Zahlen 3, 4, 5 und weitere als Klassen zu erklären.

Den allgemeinen Begriff der endlichen Zahl definiert Frege, nachdem er vorher den Begriff einer auf eine Zahl unmittelbar folgenden Zahl eingeführt hat, in folgender Weise: Eine Zahl n heißt endlich, wenn auf n ein jedes solches Prädikat zutrifft, das auf 0 zutrifft und das, wenn es auf eine Zahl a zutrifft, auch auf die unmittelbar folgende Zahl zutrifft.

337 | Auf ähnliche Art wird auch der Begriff einer zu der Zahlenreihe von 0 bis n gehörenden Zahl erklärt. An diese Begriffsbildungen schließt sich die Ableitung der Grundsätze der Zahlentheorie aus dem Begriff der endlichen Zahl.

Wir wollen nun insbesondere die Fregeschen Definitionen für die einzelnen endlichen Zahlen betrachten. Nehmen wir etwa die Definition der Zahl 2, die erklärt ist als die Klasse der zweizahligen Prädikate. Gegen diese Erklärung besteht zunächst der Einwand, daß doch die Zugehörigkeit eines Prädikates zu der Klasse der zweizahligen Prädikate von außerlogischen Bedingungen abhängt und somit die Klasse gar kein logisches Objekt bildet.

Dieser Einwand erledigt sich jedoch, wenn wir uns in betreff der Auffassung von den Klassen (bzw. Mengen, Begriffsumfängen) dem Standpunkt der Russellschen Theorie anschließen. Hiernach bilden die Klassen (Begriffsumfänge) überhaupt keine eigentlichen Gegenstände, sondern sie fungieren nur als unselbständige Termini innerhalb eines umschriebenen Satzes. Ist z. B. K die Klasse der Dinge von der Eigenschaft E, d. h. der Umfang des Begriffes E, so haben wir nach Russell die Aussage, daß ein Ding a zu der Klasse K gehört, nur als eine Umschreibung anzusehen für die Aussage, daß das Ding a die Eigenschaft E hat.

Verbinden wir nun diese Auffassung mit den Fregeschen Anzahldefinitionen, so kommen wir dazu, die Zahl 2 statt durch die Klasse der zweizahligen Prädikate durch denjenigen Begriff zu definieren, dessen Umfang diese Klasse bildet. Die Zahl 2 wird also identifiziert mit der *Eigenschaft der Zweizahlig-*
A29 *keit* eines Prädikates, d. h. mit der | Eigenschaft eines Prädikates, auf ein Ding x und auf ein von x verschiedenes[3] Ding y zuzutreffen, aber auf kein von x und von y verschiedenes Ding zuzutreffen.

Für die Beurteilung dieser Definition kommt es wesentlich darauf an, in welchem Sinne hier das Definieren gemeint ist und mit welchem Anspruch es geschieht. Was hier gezeigt werden soll, ist, daß diese Definition nicht als eine Wiedergabe der wahren Bedeutung des Anzahlbegriffes „zwei" gelten kann, durch welche dieser Begriff, von allen unwesentlichen Zutaten befreit, in seiner logischen Reinheit enthüllt würde, sondern daß gerade das spezifisch logische Element an der Definition eine unwesentliche Hinzufügung ist.

Nämlich die Zweizahligkeit eines Prädikates P bedeutet ja nichts anderes, als daß es zwei Dinge gibt, auf die das Prädikat P zutrifft. Hier sondern sich drei begriffliche Momente voneinander ab: der Begriff „zwei Dinge", das
338 existentiale Moment und das Zutreffen des Prädikates P. Dabei steht der | Begriffsinhalt „zwei Dinge" nicht in einer sinnesmäßigen Abhängigkeit von einem der beiden anderen Begriffsinhalte. „Zwei Dinge" bedeutet schon etwas ohne die Behauptung der Existenz von zwei Dingen, und auch ohne die Bezugnahme auf ein Prädikat, welches auf die zwei Dinge zutrifft; es bedeutet einfach: „ein Ding und noch ein Ding".

An dieser simplen Definition erweist sich der Anzahlbegriff als ein elementarer *Strukturbegriff*. Der Anschein, als ob dieser Begriff aus den Elementen der Logik gewonnen würde, entsteht bei der betrachteten logischen Anzahl-

[3]Der Einfachheit halber sollen hier die Erörterungen über den Begriff der Verschiedenheit, bzw. den dazu kontradiktorischen Begriff der Identität, übergangen werden.

definition nur dadurch, daß der Begriff mit logischen Elementen, nämlich der existentialen Form und der Subjekt-Prädikat-Beziehung verkoppelt wird, welche an sich für den Anzahlbegriff unwesentlich sind. Wir haben also hier in der Tat eine *logische Einkleidung* eines formalen Begriffes vor.

Das Fazit aus diesen Überlegungen ist, daß die Behauptung der Logisten, die Mathematik sei eine rein logische Erkenntnis, sich gerade durch die nähere Betrachtung der theoretischen Logik als unscharf und mißverständlich erweist. Jene Behauptung besteht nur dann zu Recht, wenn wir den Begriff des Mathematischen im Sinne der historischen Abgrenzung übernehmen, dagegen den Begriff des Logischen systematisch erweitern. Durch diese Begriffsbestimmung wird aber das erkenntnistheoretisch Wesentliche verdeckt, das
A30 für die Mathematik Eigentümliche wird übergangen. |

3 Die formale Abstraktion

Als das Charakteristische an der mathematischen Erkenntnisweise haben wir die formale Abstraktion, d. h. die Einstellung auf die strukturelle Seite der Gegenstände festgestellt und damit das Feld des Mathematischen in grundsätzlicher Weise abgegrenzt. Wollen wir den Begriff des Logischen gleichfalls erkenntnistheoretisch fassen, so führt uns das dazu, aus dem Gesamtgebiet der Lehre von den Begriffen, Urteilen und Schlüssen, welches gemeinhin als Logik bezeichnet wird, ein engeres Teilgebiet, die *reflektierende oder philosophische Logik*, auszusondern, d. h. den Bereich der *im eigentlichen Sinne analytischen* Erkenntnisse, welche aus dem reinen *Bedeutungsbewußtsein* entspringen. An diese philosophische Logik schließt sich die systematische Logik an, indem sie ihre Ausgangselemente und ihre Prinzipien aus den Ergebnissen der philosophischen Logik entnimmt und nach mathematischer Methode aus diesen eine Theorie entwickelt.

Auf diese Weise wird der Anteil der wahrhaft analytischen Erkenntnis von dem der mathematischen Erkenntnis deutlich abgesondert, und es kommt da-
339 mit zur Geltung, was einerseits an *Kants Lehre von der reinen An|schauung*, andererseits an der Behauptung der Logisten das Berechtigte ist. Wir können den Kantischen Grundgedanken, daß das mathematische Erkennen und überhaupt die *erfolgreiche Anwendung des logischen Schließens auf einer anschaulichen Evidenz beruhe*, ablösen von der besonderen Ausgestaltung, welche Kant diesem Gedanken in seiner Lehre von Raum und Zeit gegeben hat. Dadurch gewinnen wir zugleich die Möglichkeit, dem ganz elementaren Cha-

rakter der mathematischen Evidenz und der Abstraktionshöhe der mathematischen Einstellung gerecht zu werden, auf deren Betonung die Behauptung von dem logischen Charakter der Mathematik abzielt.

Auch über die Rolle der Zahl in der Mathematik gibt unsere gewonnene Auffassung eine einfache Auskunft: die Mathematik haben wir erklärt als die Erkenntnis, die auf der formalen (strukturellen) Betrachtung von Gegenständen beruht. Die Zahlen aber bilden als Anzahlen die *einfachsten formalen Bestimmungen* und als Ordnungszahlen die *einfachsten formalen Objekte*.

Die Anzahlbegriffe bieten der philosophischen Erörterung eine besondere Schwierigkeit durch ihre kategoriale Sonderstellung, die sich auch in der Sprache an dem Erfordernis einer eigenen Gattung von Zahlworten geltend macht. Wir brauchen uns hier auf die Erörterung nicht des näheren einzulassen, sondern nur darauf zu achten, daß die Anzahlbestimmungen die
A31 Zusammensetzung eines Gesamtkomplexes | des Gegebenen oder des Vorgestellten aus Bestandteilen betreffen, also gerade das, was die strukturelle Seite eines Gegenstandes ausmacht. Und zwar sind es die elementarsten Struktur-Merkmale, welche durch die Anzahlen geliefert werden. So treten denn auch die Anzahlen in allen Gebieten auf, die der formalen Betrachtung zugänglich sind; insbesondere treffen wir innerhalb der theoretischen Logik die Anzahl in der mannigfachsten Weise an, z. B. als Anzahl der Subjekte eines Prädikates (oder wie man sagt: als Anzahl der Argumente einer logischen Funktion), als Anzahl der in einen logischen Satz eingehenden variablen Prädikate, als Anzahl der Anwendungen einer logischen Operation innerhalb einer Begriffsbildung oder innerhalb eines Satzes, als Anzahl der Sätze innerhalb einer Schlußfigur, als die Stufenzahl eines logischen Ausdrucks, d. h. als die Höchstzahl der darin vorkommenden Übereinanderschaltungen der Subjekt-Prädikat-Beziehungen (im Sinne des Aufstiegs von Gegenständen einer Theorie zu den Prädikaten, von den Prädikaten zu den Prädikaten-Prädikaten, von diesen wieder zu ihren Prädikaten usw.).

Die Anzahlen liefern uns aber nur formale *Bestimmungen*, noch nicht for-
340 male Objekte. Z. B. in der Vorstellung der Dreizahl liegt noch nicht | die Vereinigung der drei Dinge zu einem Gegenstand. Die Verbindung mehrerer Dinge zu einem Gegenstand erfordert eine Form der Anordnung. Die einfachste Ordnungsform ist die der bloßen Aufeinanderfolge, welche zum Begriff der *Ordnungszahl* führt. Die Ordnungszahl ist an und für sich auch nicht als Gegenstand bestimmt, sie ist nur ein Stellenzeiger. Wir können sie aber gegenständlich normieren, indem wir als *Stellenzeiger die einfachsten aus der*

Form der Aufeinanderfolge entspringenden Strukturen wählen. Entsprechend der zweifachen Möglichkeit, die Zahlenreihe mit der 1 oder mit der 0 zu beginnen, kommen zwei Arten der Normierung in Betracht. Bei der einen liegt zu Grunde eine Sorte von Dingen und eine Form der Anfügung eines Dinges; die Objekte sind Figuren, welche mit einem Ding der betreffenden Sorte beginnen und endigen, und wo auf jedes Ding, welches noch nicht das Ende der Figur bildet, ein angefügtes Ding jener Sorte folgt. Bei der anderen Art der Normierung haben wir ein Ausgangsding und einen Prozeß; die Objekte sind dann das Ausgangsding selbst und ferner die Figuren, welche man, mit dem Ausgangsding beginnend, durch einmalige oder wiederholte Anwendung jenes Prozesses erhält.

Wollen wir, im Sinne der einen oder anderen Normierung, die Ordnungszahlen als eindeutige Objekte, frei von allen unwesentlichen Zutaten haben, so müssen wir jeweils das bloße *Schema* der betreffenden Wiederholungsfigur als
A32 Objekt nehmen, was eine sehr hohe Abstrak|tion erfordert. Es steht uns aber frei, diese rein formalen Objekte durch konkrete Objekte („Zahlzeichen“) zu repräsentieren; diese enthalten dann unwesentliche, willkürlich hinzugefügte Beschaffenheiten, welche aber auch als solche ohne weiteres erfaßt werden. Dieses Verfahren erfolgt jeweils auf Grund einer bestimmten Verabredung, die im Rahmen einer und derselben Betrachtung festgehalten werden muß.[4] Eine solche Verabredung, im Sinne der ersten Normierung, ist die, wonach sich die ersten Ordnungszahlen durch die Figuren $1, 11, 111, 1111$ darstellen. Gemäß einer der zweiten Normierung entsprechenden Verabredung stellen sich die ersten Ordnungszahlen dar durch die Figuren 0, $0'$, $0''$, $0'''$, $0''''$.

Indem wir so von der strukturellen Seite her einen einfachen Zugang zu den Zahlen finden, erhält unsere Auffassung über den Charakter der
341 mathe|matischen Erkenntnis eine neue Bestätigung. Denn die beherrschende Rolle der Zahl in der Mathematik wird von dieser Auffassung aus verständlich, und unsere Charakterisierung der Mathematik als Lehre von den Strukturen erscheint als die sachgemäße Erweiterung der anfangs erwähnten Behauptung, daß die Zahlen das eigentliche Objekt der Mathematik bilden.

[4]Der Philosoph ist geneigt, dieses Verhältnis der Repräsentation als einen Bedeutungszusammenhang anzusprechen. Man hat aber zu beachten, daß gegenüber dem gewöhnlichen Verhältnis von Wort und Bedeutung hier der wesentliche Unterschied besteht, daß der repräsentierende Gegenstand in seiner Beschaffenheit die wesentlichen Eigenschaften des repräsentierten Objektes enthält, so daß die zu untersuchenden Beziehungen der repräsentierten Objekte sich auch an den Repräsentanten vorfinden und durch die Betrachtung der Repräsentanten selbst festgestellt werden können.

Das Befriedigende des gewonnenen Standpunktes darf uns nun nicht zu der Meinung verführen, wir hätten für das Problem der Grundlegung der Mathematik bereits alle erforderlichen grundsätzlichen Einsichten erlangt. Tatsächlich haben wir bisher erst die Vorfrage behandelt, über die wir uns zuerst klar werden wollten, nämlich worin das Spezifische der mathematischen Erkenntnis zu sehen ist. Jetzt aber müssen wir uns demjenigen Problem zuwenden, welches die hauptsächlichen Schwierigkeiten in der Grundlegung der
A33 Mathematik verursacht, dem Problem des Unendlichen. |

Teil II
Das Problem des Unendlichen und die mathematischen Ideenbildungen

1 Die Postulate der Theorie des Unendlichen – Die Unmöglichkeit ihrer Begründung durch die Anschauung – Der finite Standpunkt

Die mathematische Theorie des Unendlichen ist die Analysis (Infinitesimalrechnung) und ihre Erweiterung durch die allgemeine Mengenlehre. Wir können uns hier auf die Betrachtung der Infinitesimalrechnung beschränken, da der Schritt von dieser zur allgemeinen Mengenlehre zwar eine Hinzunahme von Voraussetzungen, aber keine grundsätzliche Modifikation der philosophischen Auffassung erfordert.

Die Begründung der Infinitesimalrechnung durch Cantor, Dedekind und Weierstraß zeigt, daß der strenge Aufbau dieser Theorie gelingt, wenn zu den elementaren Schlußweisen der Mathematik zweierlei hinzugenommen wird:

1. Die Anwendung der Methode des existentialen Schließens auf die ganzen Zahlen, d. h. die Zugrundelegung des *Systems* der ganzen Zahlen nach Art eines Gegenstandsbereiches einer axiomatischen Theorie – wie sie explizite in dem *Peanoschen Axiomensystem der Zahlentheorie* zum Ausdruck gebracht wird.

2. Die Vorstellung des Inbegriffs aller Mengen von ganzen Zahlen als einer kombinatorisch überblickbaren Mannigfaltigkeit. Eine Menge von ganzen Zahlen ist bestimmt durch eine Verteilung der Werte 0 und 1
342 auf die Stellen | der Zahlenreihe. Die Zahl n gehört zu der Menge oder nicht, je nachdem an der n-ten Stelle der Verteilung 1 oder 0 steht. So wie nun für eine endliche Stellenzahl, z. B. für fünf Stellen, die Gesamtheit der möglichen Verteilung der Werte 0, 1 vollkommen übersehbar ist, so wird dieses nach Analogie auch für die gesamte Zahlenreihe angenommen.

Aus dieser Analogie ergibt sich insbesondere auch die Gültigkeit des *Zermeloschen Auswahlprinzips* für Gesamtheiten von Zahlenmengen. Die Erörterung dieses Prinzips wollen wir jedoch vorerst noch beiseite lassen; sie wird sich an einer späteren Stelle ungezwungen einfügen.

Betrachten wir nun diese Anforderungen vom Standpunkt unserer allgemeinen Charakterisierung der mathematischen Erkenntnis, so scheint es zunächst, daß für ihre Begründung durch mathematische Erkenntnis keinerlei grundsätzliche Schwierigkeit besteht. Denn sowohl bei der Zahlenreihe wie bei den aus ihr abgeleiteten Mengenbildungen handelt es sich um *Strukturen*, welche sich von den in der elementaren Mathematik behandelten Strukturen
A34 nur dadurch unterscheiden, daß | es Strukturen von unendlichen Mannigfaltigkeiten sind. Auch scheint das existentiale Schließen in Anwendung auf die Zahlen durch den Gegenstands-Charakter der Zahlen als formaler Objekte, deren Existenz doch nicht von den Zufälligkeiten der faktischen Zahlvorstellungen abhängen kann, gerechtfertigt zu sein.

Gegen diese Argumentation ist aber zu bemerken, daß es voreilig ist, aus dem Charakter der formalen Objekte, d. h. aus der in ihnen vorliegenden Loslösung von den empirischen Zufälligkeiten, zu schließen, daß die formalen Gegenstände auf einen Bereich des existierenden Formalen bezogen sein müßten. Wir könnten als Argument gegen diese Auffassung die mengentheoretischen Paradoxien anführen; doch ist es einfacher, direkt darauf hinzuweisen, daß in der primitiven mathematischen Evidenz eine Setzung eines solchen Bereiches der existierenden formalen Gegenstände nicht vorliegt, daß vielmehr die Anknüpfung an das tatsächlich Vorgestellte als Ausgangspunkt für die formale Abstraktion wesentlich ist. Es gilt in diesem Sinne der Kantische Satz, daß die reine Anschauung die Form der empirischen Anschauung ist.

Dem entspricht es auch, daß in den Disziplinen, die aus der elementaren mathematischen Evidenz hervorgehen, die Existenzaussagen nur eine uneigentliche Bedeutung haben. Insbesondere in der elementaren Zahlentheorie haben wir es nur mit solchen Existenzaussagen zu tun, die sich auf eine ganz bestimmte, vorweisbare Gesamtheit von Zahlen oder einen bestimmten, anschaulich vorführbaren Prozeß oder auf beides gemeinsam, d. h. auf eine durch einen vorführbaren Prozeß zu gewinnende Gesamtheit von Zahlen beziehen.

343 | Beispiele derartiger Existenzbehauptungen sind: „Zwischen 5 und 10 gibt es eine Primzahl“; nämlich 7 ist eine Primzahl.

„Zu jeder Zahl gibt es eine größere“; nämlich wenn n eine Zahl ist, so bilde man $n+1$; diese Zahl ist größer als n.

„Zu jeder Primzahl gibt es eine größere“; nämlich: ist eine Primzahl p gegeben, so bilde man das Produkt dieser Primzahl mit allen kleineren Primzahlen und addiere 1; sei k die so erhaltene Zahl, so ist unter den Zahlen von $p+1$ bis k jedenfalls eine Primzahl vorhanden.

In jedem dieser Fälle wird die Existenzaussage durch eine nähere Angabe präzisiert; die Existenzbehauptung hält sich an die in der anschaulichen Vorstellung vollziehbaren Bildungsprozesse und nimmt nicht Bezug auf eine Mannigfaltigkeit aller Zahlen. Diese elementare, an die Bedingungen der grundsätzlichen Vorstellbarkeit sich bindende Betrachtungsweise wollen wir nach Hilbert als den *finiten* Standpunkt bezeichnen und im gleichen Sinne von finiten Methoden, finiter Überlegung und finiten Schlüssen sprechen.

A35 | Es ist nun leicht festzustellen, daß das existentiale Schließen den finiten Standpunkt überschreitet. Eine solche Überschreitung findet bereits bei jedem Existenzsatze statt, der ohne nähere Präzisierung der Existenzbehauptung aufgestellt wird, wie z. B. bei dem Satz, daß jede unbegrenzte arithmetische Reihe

$$a \cdot n + b \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

worin a, b teilerfremde Zahlen sind, mindestens eine Primzahl enthält.

Ein besonders häufiger und wichtiger Fall des Hinausgehens über den finiten Standpunkt ist der Schluß von dem Nichtbestehen der Allgemeingültigkeit eines Satzes (für alle Zahlen) auf die Existenz eines Gegenbeispiels, oder mit mit anderen Worten das Prinzip, wonach für jedes Zahlen-Prädikat $P(n)$ die Alternative besteht: entweder gilt der allgemeine Satz, daß $P(n)$ auf alle Zahlen n zutrifft, oder es gibt eine Zahl n, auf welche $P(n)$ nicht zutrifft. Dieses Prinzip ergibt sich vom Standpunkt des existentialen Schließens als eine unmittelbare Anwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, d. h.

aus dem Sinn der Negation. Daß für den finiten Standpunkt diese logische Konsequenz nicht besteht, liegt daran, daß hier die Behauptung des Zutreffens von $P(n)$ für alle Zahlen den rein hypothetischen Sinn des Zutreffens für jede vorgelegte Zahl hat, so daß die Negation dieser Behauptung nicht den positiven Sinn einer Existenzaussage ergibt. –

Hiermit ist aber die Erörterung der Möglichkeiten einer einsichtigen mathematischen Begründung der Voraussetzungen der Analysis noch nicht abgeschlossen: zugegeben, daß die Zugrundelegung eines Gesamtbereiches der formalen Objekte nicht dem Standpunkt der primitiven mathematischen Evi-
344 denz entspricht, so | könnten doch die Anforderungen der Infinitesimalrechnung dadurch motiviert werden, daß es sich bei den Gesamtheiten von Zahlen und Zahlenmengen um *Strukturen von unendlichen Mengen* handelt. Insbesondere würde hiernach die Anwendung des existentialen Schließens auf die Zahlen nicht zu entnehmen sein aus der Vorstellung des Inbegriffs der Zahlen im Reiche der formalen Objekte, sondern aus der Betrachtung der Struktur der Zahlenreihe, in welcher die einzelnen Zahlen als Reihenglieder auftreten. In der Tat sind wir auf jenes schon genannte Argument, daß doch die mathematische Erkenntnis auch Strukturen von unendlichen Mannigfaltigkeiten betreffen könnte, noch nicht eingegangen.

Wir kommen hiermit zu der Frage des *Aktual-Unendlichen*. Denn das Unendliche, um das es sich bei den unendlichen Mannigfaltigkeiten handelt, ist das eigentliche Aktual-Unendliche im Unterschiede von dem „Potentiell-Unendlichen“, womit nicht ein unendlicher Gegenstand gemeint ist, sondern
A36 bloß die Unbegrenztheit im Fortschreiten von End|lichem zu immer neuem Endlichen, wie sie z. B. auch vom finiten Standpunkt für die Zahlen besteht, insofern man zu jeder Zahl noch eine größere bilden kann.

Die Frage, die wir hier zunächst in betreff des Aktual-Unendlichen zu stellen haben, bezieht sich darauf, ob das Aktual-Unendliche uns als Gegenstand anschaulicher mathematischer Erkenntnis gegeben ist.

Man könnte im Einklang mit unsern bisherigen Feststellungen der Meinung sein, daß wir tatsächlich einer anschaulichen Erkenntnis des Aktual-Unendlichen fähig sind. Denn wenngleich es sicher ist, daß wir eine konkrete Vorstellung nur von endlichen Objekten haben, so könnte doch eine Leistung der formalen Abstraktion gerade darin bestehen, daß sie sich von der Beschränkung auf das Endliche loslöst und daß sie an gewissen, beliebig weit fortsetzbaren Prozessen gleichsam den Grenzübergang vollzieht. Insbesondere wird man versucht sein, auf die geometrische Anschauung zu verweisen und aus dem Gebiet der geometrischen Objekte Beispiele von anschaulich gegebenen unendlichen Mannigfaltigkeiten anzuführen.

Nun sind zunächst einmal die geometrischen Beispiele nicht beweisend. Man täuscht sich hier leicht dadurch, daß man das Anschaulich-Räumliche im Sinne einer existentialen Auffassung interpretiert. Eine Strecke z. B. ist ja anschaulich nicht als eine geordnete Mannigfaltigkeit von Punkten, sondern als ein einheitliches Ganzes gegeben, allerdings als ein ausgedehntes Ganzes, innerhalb dessen *Stellen* unterscheidbar sind. Die Vorstellung einer Stelle auf der Strecke ist eine anschauliche, aber die Gesamtheit *aller Stellen* auf der
345 Strecke ist nur ein gedanklicher Inbegriff. Anschaulich kommen wir hier nur | zum Potentiell-Unendlichen, indem jeder Stelle auf der Strecke eine Zerlegung in zwei Teilstrecken entspricht, bei der jede Teilstrecke ihrerseits wieder in Teilstrecken zerlegbar ist.

Was ferner die unendlich ausgedehnten Gebilde betrifft, wie die unendliche Gerade, die unendliche Ebene, den unendlichen Raum, so sind diese als Gegenstände eines anschaulichen Vorstellens nicht aufweisbar. Insbesondere ist der Raum als Ganzes uns nicht in der Anschauung gegeben. Wir stellen zwar jedes räumliche Gebilde als im Raum befindlich vor. Aber diese Beziehung des einzelnen Räumlichen zum Raumganzen ist nur insoweit in der Anschauung gegenständlich, als mit jedem räumlichen Gegenstande zugleich auch eine räumliche Umgebung anschaulich vorgestellt wird. Darüber hinaus ist die Einordnung in den Gesamtraum – wir müssen dieses im Gegensatz zu Kant behaupten – *nur gedanklich* faßbar.

A37 Das Hauptargument, welches Kant zugunsten des anschaulichen | Charakters unserer Vorstellung vom Raum als Ganzen anführt, beweist tatsächlich nur, daß man durch bloße generalisierende Abstraktion nicht zum Begriff des einen umfassenden Raumes gelangen kann. Aber das soll auch gar nicht mit der Behauptung der bloß gedanklichen Zugänglichkeit unserer Vorstellung vom Raumganzen gesagt sein, daß wir es hier etwa mit einem bloßen Allgemeinbegriff zu tun hätten.

Gemeint ist vielmehr ein komplizierterer Sachverhalt, daß nämlich in der Vorstellung des Raumganzen zweierlei verschiedene Gedankenbildungen vorliegen, die beide sowohl über den Standpunkt der Anschauung wie auch über den der reflektierenden Logik hinausgehen. Die eine beruht auf dem Gedanken der Verknüpfung der Dinge zum Weltganzen, sie entspringt also unserm Wirklichkeitsglauben. Die andere ist eine *mathematische Ideenbildung*, welche zwar an die Anschauung anknüpft, aber doch nicht im Bereiche des anschaulich Vorstellbaren verbleibt, es ist die Vorstellung des Raumes als einer den

Gesetzen der Geometrie unterworfenen Punktmannigfaltigkeit.[5]

In diesen beiden Arten, den Raum als Ganzes vorzustellen, wird diese Totalität nicht als vorhanden erkannt, sondern nur versuchsweise *angesetzt*. Die Vorstellung von dem physikalischen Raumganzen ist grundsätzlich
346 proble|matisch; immerhin besteht gerade vom Standpunkt der heutigen Physik die Möglichkeit, diesem zunächst sehr vagen Gedanken eine engere, präzisere Fassung zu geben, durch welche er der Forschung zugänglich und systematisch bedeutsam werden kann. Die geometrischen Ideenbildungen von räumlichen Mannigfaltigkeiten sind zwar von vornherein präzise, bedürfen aber eines Nachweises ihrer Widerspruchsfreiheit.

So haben wir also keinen Grund zu der Annahme, daß wir eine anschauliche Vorstellung vom Raum als Ganzem besitzen. Direkt können wir eine solche Vorstellung nicht aufweisen, und eine Notwendigkeit, jene Annahme als Erklärungsgrund einzuführen, besteht auch nicht. Leugnen wir aber die Anschaulichkeit des Raumganzen, so werden wir auch nicht behaupten, daß unendlich ausgedehnte Raumgebilde anschaulich vorstellbar seien.

A38 | Zu beachten ist auch, daß die ursprüngliche anschauliche Auffassung der elementaren Euklidischen Geometrie eine Vorstellung von unendlichen Gebilden gar nicht erfordert. Wir haben es da immer nur mit endlich ausgedehnten Figuren zu tun. Auch treten unendliche Punktmannigfaltigkeiten nirgends auf, da keine allgemeinen Existenzannahmen zu Grunde gelegt sind, sondern jede Existenzbehauptung in der Konstatierung einer möglichen geometrischen Konstruktion besteht. Z. B., daß jede Strecke einen Mittelpunkt hat, besagt von diesem Standpunkt nichts anderes, als daß zu jeder Strecke ein Mittelpunkt konstruiert werden kann.[6]

Somit erweist sich der Anschein der Aufzeigbarkeit des Aktual-Unendlichen im Bereich der Gegenstände geometrischer Anschauung als trügerisch. Wir können uns aber auch in allgemeinerer Weise klarmachen, daß von ei-

[5] In der Naturansicht der Newtonschen Physik sind diese beiden Vorstellungen vom Raum miteinander vereinigt und heben sich noch nicht deutlich voneinander ab. Die Euklidische Geometrie bildet hier das Gesetz für die räumliche Verknüpfung der Dinge im Weltganzen. Erst durch die seitherige Entwicklung der Geometrie und der Physik tritt die Notwendigkeit hervor, zwischen dem Raum als etwas Physikalischem und dem Raum als einer ideellen, durch geometrische Gesetze bestimmten Mannigfaltigkeit zu unterscheiden.

[6] In den Axiomen Euklids ist allerdings dieser Standpunkt insofern nicht ganz konsequent durchgeführt, als hier der Begriff der *hinreichend weiten Verlängerung* einer Strecke auftritt. Dieser Begriff läßt sich tatsächlich vermeiden; man muß nur dem Parallelen-Axiom eine andere Fassung geben.

nem Abstreifen der Bedingung des Endlichen durch die formale Abstraktion, wie dieses zur Anschauung des Aktual-Unendlichen erforderlich wäre, nicht die Rede sein kann. Die Bedingung der Endlichkeit ist ja keine zufällige empirische Beschränkung, sondern ein wesentliches Charakteristikum eines formalen Objekts.

Die empirische Beschränkung liegt noch innerhalb des Bereiches des Endlichen, wo die formale Abstraktion uns über die Grenzen der faktischen Vorstellungskraft hinweghelfen muß. Ein deutliches Beispiel hierfür haben wir an der unbegrenzten Teilbarkeit einer Strecke. Unser tatsächliches Vorstellungsvermögen versagt hier bereits, wenn die Teilung einen gewissen Grad der Feinheit überschreitet. Diese Grenze ist physikalisch zufällig, und wir können
347 | durch Zuhilfenahme von optischen Apparaten über sie hinauskommen. Von einem gewissen Maße der Kleinheit an versagen aber alle optischen Apparate, und schließlich werden überhaupt unsere räumlich-metrischen Vorstellungen physikalisch sinnlos. Mit der Vorstellung der unbegrenzten Teilbarkeit abstrahieren wir also bereits von den Bedingungen des faktischen Vorstellens wie auch von denjenigen der physikalischen Wirklichkeit.

Analog verhält es sich mit der Vorstellung des unbegrenzten Addierens in der Zahlentheorie. Auch hier bestehen Grenzen für die Vollziehbarkeit der Wiederholungen sowohl im Sinne der wirklichen Vorstellbarkeit wie auch im Sinne der physikalischen Realisierung. Betrachten wir beispielsweise die Zahl
A39 $10^{(10^{1000})}$. Zu dieser können | wir auf finitem Wege folgendermaßen gelangen: Wir gehen aus von der Zahl 10, die wir gemäß der einen von unsern früher angegebenen Normierungen durch die Figur

$$1111111111$$

repräsentieren. Sei nun z irgendeine Zahl, die durch eine entsprechende Figur repräsentiert wird. Ersetzen wir in der vorigen Figur jede 1 durch die Figur z, so entsteht, wie wir uns anschaulich klarmachen können, wieder eine Zahlfigur, die zur Mitteilung mit „$10 \times z$“ bezeichnet wird.[7] Wir erhalten so den Prozeß der Verzehnfachung einer Zahl. Aus diesem gewinnen wir den Prozeß des Überganges von einer Zahl a zu 10^a, indem wir der ersten 1 in a die Zahl 10 und jeweils jeder angehängten 1 den Prozeß der Verzehnfachung entsprechen lassen und hierin so weit gehen, bis wir mit der Figur a am Ende sind. Die durch den letzten Prozeß der Verzehnfachung gewonnene Zahl bezeichnen wir mit 10^a.

[7]Hier handelt es sich um ein Zeichen „mit Bedeutung“.

Dieses Verfahren bietet für die anschauliche Einstellung grundsätzlich keinerlei Schwierigkeit. Wollen wir aber den Prozeß im einzelnen uns vergegenwärtigen, so versagt unsere Vorstellung schon bei ziemlich kleinen Zahlen. Wir können uns hier wieder ein Stück weit mit Apparaten behelfen oder mit Heranziehung von Gegenständen der äußeren Natur, in denen sehr große Anzahlbestimmungen auftreten. Aber auch mit alledem kommen wir bald an eine Grenze: Die Zahl 20 können wir leicht in der Vorstellung fassen, 10^{20} übersteigt bei weitem unsere wirkliche Vorstellungskraft, liegt aber durchaus in dem Bereich der physikalischen Realisierbarkeit; von der Zahl $10^{(10^{20})}$ endlich ist es höchst fraglich, ob sie in irgendeiner Weise als Größenverhältnis oder als Anzahlbestimmung in der physikalischen Wirklichkeit auftritt.

An solche Grenzen für die Möglichkeit der Verwirklichung kehrt sich aber
die anschauliche Abstraktion nicht. Denn diese Grenzen sind vom Stand-
348 punkt | der formalen Betrachtung zufällig. Die formale Abstraktion findet
sozusagen keine frühere Stelle für eine prinzipielle Abgrenzung als bei dem
Unterschied des Endlichen und Unendlichen.

Dieser Unterschied ist in der Tat ein grundsätzlicher. Wenn wir uns ge-
nauer besinnen, wie denn überhaupt eine unendliche Mannigfaltigkeit als
solche charakterisiert sein kann, so finden wir, daß dieses gar nicht nach
der Art einer anschaulichen Aufweisung möglich ist, sondern nur auf dem
Wege der Behauptung (bzw. der Annahme oder der Feststellung) einer ge-
setzlichen Beziehung. Unendliche Mannigfaltigkeiten sind uns demnach nur
A40 durch das *Denken* zugänglich. Dieses Denken ist | zwar auch eine Art des
Vorstellens, aber es wird dadurch nicht die Mannigfaltigkeit als Gegenstand
vorgestellt, sondern es werden Bedingungen vorgestellt, denen eine Mannig-
faltigkeit genügt (bzw. zu genügen hat).

Die wesentliche Gebundenheit der formalen Abstraktion an das Moment der Endlichkeit macht sich insbesondere dadurch geltend, daß bei den Betrachtungen von Gesamtheiten und von Figuren die Eigenschaft der Endlichkeit für den Standpunkt der anschaulichen Evidenz gar kein besonderes beschränkendes Merkmal bildet. Die Beschränkung auf das Endliche wird von diesem Standpunkt aus ganz ohne weiteres, sozusagen *stillschweigend* vollzogen. Wir brauchen hier keine besondere Definition der Endlichkeit, denn die Endlichkeit der Objekte versteht sich für die formale Abstraktion ganz von selbst. So paßt z. B. die anschaulich-strukturelle Einführung der Zahlen nur für die *endlichen* Zahlen. „Wiederholung“ ist eben vom Standpunkt der anschaulich-formalen Betrachtung *eo ipso* endliche Wiederholung.

Diese in der formalen Einstellung implizite mitgegebene Vorstellung des

Endlichen enthält den Erkenntnisgrund für das Prinzip der vollständigen Induktion und für die Zulässigkeit der rekursiven Definition, beide Verfahren in ihrer elementaren Form als „finite Induktion“ und „finite Rekursion“ verstanden.

Diese Heranziehung der Vorstellung des Endlichen gehört freilich nicht mehr zu demjenigen, was von der anschaulichen Evidenz notwendig in das logische Schließen eingeht. Sie entspricht vielmehr einem Standpunkt, bei dem man bereits auf die allgemeinen Charakterzüge der anschaulichen Objekte *reflektiert*. Auch läßt sich für die Zahlentheorie die Anwendung der anschaulichen Vorstellung des Endlichen vermeiden, wenn man darauf verzichtet, diese Theorie in elementarer Weise zu behandeln. Zwangsmäßig aber stellt sich die anschauliche Endlichkeitsvorstellung ein, sobald man einen Formalismus selbst zum Gegenstand der Betrachtung macht, insbesondere also
349 in der systema|tischen Theorie der logischen Schlüsse. Es kommt hierin zum Ausdruck, daß die Endlichkeit ein wesentliches Moment an den Gebilden eines jeden Formalismus ist. Die Grenzen des Formalismus sind aber keine anderen als die der Vorstellbarkeit überhaupt von anschaulichen Zusammensetzungen.

So fällt also unsere Antwort auf die Frage nach der anschaulichen Erkennbarkeit des Aktual-Unendlichen verneinend aus. Es ergibt sich damit auch, daß die Methode der finiten Betrachtung für den Standpunkt der anschaulichen mathematischen Erkenntnis die angemessene ist.

A41 | Auf diesem Wege aber gelangen wir nicht dazu, die genannten Voraussetzungen für die Infinitesimalrechnung zu verifizieren.

2 Der Intuitionismus – Die Arithmetik als theoretischer Rahmen

Wie sollen wir uns nun angesichts dieses Tatbestandes verhalten? In der Stellungnahme zu dieser Frage sind die Auffassungen geteilt. Es findet hier ein ähnlicher Widerstreit der Ansichten statt, wie wir ihn bei der Frage der Charakterisierung der mathematischen Erkenntnis angetroffen haben. Die Vertreter des Standpunktes der primitiven Anschaulichkeit ziehen aus dem Umstande, daß die Analysis und die Mengenlehre durch ihre Postulate den finiten Standpunkt überschreitet, ohne weiteres die Folgerung, daß diese mathematischen Theorien in ihrer heutigen Form fallengelassen werden und von Grund auf revidiert werden müssen. Die Anhänger des Standpunktes der theoretischen Logik dagegen suchen entweder jene Postulate der Theorie des Unendlichen durch die Logik zu begründen, oder aber sie bestreiten überhaupt das Problematische an den Postulaten, indem sie dem Unterschied zwischen Endlichem und Unendlichem überhaupt keine grundsätzliche Bedeutung zumessen.

Die erstgenannte Auffassung wurde schon zur Zeit des ersten Aufkommens der Methode des existentialen Schließens von Kronecker vertreten, der wohl zuerst den methodischen Standpunkt, den wir den finiten nennen, scharf ins Auge gefaßt und nachdrücklich zur Geltung gebracht hat. Seine Ansätze zur Erfüllung dieser methodischen Anforderung im Gebiete der Analysis blieben jedoch fragmentarisch, auch fehlte es an einer genaueren philosophischen Darlegung des Standpunktes. So ist insbesondere der oft zitierte Ausspruch Kroneckers, die ganzen Zahlen habe Gott geschaffen, alles andere sei Menschenwerk, zur Motivierung der von Kronecker vertretenen Anforderungen gar nicht geeignet:[8] Wenn die ganzen Zahlen von Gott geschaffen sind, so
350 sollte man doch denken, | daß das existentiale Schließen in Anwendung auf die Zahlen zulässig ist, während doch Kronecker gerade die existentiale Betrachtungsweise schon bei den ganzen Zahlen ausschließt.

Brouwer hat den Standpunkt Kroneckers nach zwei Richtungen weiter-
A42 geführt: einerseits in Hinsicht auf die philosophische Motivierung, | durch die Aufstellung seiner Theorie des „Intuitionismus“,[9] andererseits dadurch, daß er gezeigt hat, wie man im Gebiete der Analysis und der Mengenlehre den finiten Standpunkt zur Anwendung bringen und, durch eine Umgestaltung der Begriffsbildungen und der Schlußweisen von Grund auf, diese Theorien wenigstens zu einem beträchtlichen Teil auf finitem Wege begründen kann.

Das Ergebnis dieser Untersuchung hat freilich seine negative Seite, indem sich herausstellt, daß man bei diesem Verfahren der finiten Behandlung der Analysis und der Mengenlehre nicht nur erhebliche Komplikationen, sondern auch starke Einbußen an Systematik in Kauf nehmen muß.

Die Komplikationen stellen sich bereits bei den ersten Begriffen der In-

[8]Der diesem Ausspruch angemessene methodische Standpunkt ist derjenige, den Weyl in seiner Schrift *Das Kontinuum* (*vide* [**?**])eingenommen hat.

[9]Es scheint mir im Interesse der Klärung der Diskussion angezeigt, den Ausdruck „Intuitionismus“ als Bezeichnung einer philosophischen Ansicht zu gebrauchen, im Unterschied von dem Terminus „finit“, der eine bestimmte Art des Schließens und der Begriffsbildung bezeichnet.

finitesimalrechnung ein, wie dem der Beschränktheit, dem der Konvergenz einer Zahlenfolge, dem Unterschiede zwischen rational und irrational. Nehmen wir z. B. den Begriff der Beschränktheit einer Folge von ganzen Zahlen. Nach der üblichen Auffassung besteht die Alternative: entweder übersteigt die Folge jede Schranke, sie ist dann unbeschränkt, oder alle Zahlen der Folge liegen unterhalb einer Schranke, dann ist die Folge beschränkt. Um hier eine finite Begriffsbestimmung zu erhalten, müssen wir die Definition der Beschränktheit und der Unbeschränktheit folgendermaßen verschärfen: Eine Folge heiße beschränkt, wenn wir eine Schranke für die Zahlen der Folge entweder direkt oder durch Angabe eines Verfahrens aufzeigen können; sie heiße unbeschränkt, wenn ein Gesetz besteht, wonach notwendig jede Schranke von der Folge überschritten wird, wenn also die Annahme einer Schranke für die Folge auf eine Absurdität führt.

Durch diese Fassung der Begriffe ist nun zwar der finite Charakter der Definitionen erreicht, aber wir haben jetzt keine vollständige Disjunktion zwischen dem Fall der Beschränktheit und dem der Unbeschränktheit. Wir können daher aus einem Beweise, welcher die Annahme der Unbeschränktheit einer Folge als unzulässig widerlegt, noch nicht die Beschränktheit der Folge entnehmen, und ebensowenig kann ein Satz, der einerseits unter der Annah-
351 me der Be|schränktheit einer gewissen Zahlenfolge, andererseits unter der Annahme ihrer Unbeschränktheit bewiesen ist, damit schon als erwiesen gelten.

A43 | Zu derartigen Komplikationen, welche die gesamte Theorie durchziehen, tritt noch als wesentlicherer Nachteil, daß die allgemeinen Theoreme, durch welche die Mathematik ihre systematische Übersichtlichkeit erhält, zum grossen Teil hinfällig werden. So gilt zum Beispiel in der Brouwerschen Analysis nicht einmal der Satz, daß jede stetige Funktion in einem endlichen, abgeschlossenen Intervall einen Maximalwert besitzt.

Es erscheint als eine unberechtigte Zumutung von Seiten der Philosophie an die Mathematik, daß sie ihre einfachere und leistungsfähigere Methode zugunsten einer beschwerlichen und an Systematik zurückstehenden Methode aufgeben solle, ohne durch eine innere Nötigung dazu veranlaßt zu sein. Durch dieses Ansinnen wird uns der Standpunkt des Intuitionismus verdächtig.

Sehen wir zu, worin die Hauptpunkte dieser von Brouwer entwickelten philosophischen Ansicht bestehen. Diese enthält zunächst eine Charakterisierung der mathematischen Evidenz. Mit dieser Charakterisierung befinden sich unsere vorangegangenen Ausführungen über die formale Abstraktion in wesentlichen Punkten im Einklang, insbesondere in der Anknüpfung an

Kants Lehre von der reinen Anschauung.

Eine Abweichung besteht freilich insofern, als nach der Auffassung Brouwers das Moment des Zeitlichen wesentlich zu der mathematischen Gegenständlichkeit gehört. Wir brauchen uns aber hier auf eine Diskussion über diesen Punkt nicht einzulassen, da es auf die Stellung der Methodenfrage der Mathematik keinen Einfluß hat, wie wir uns hierüber entscheiden: was sich für Brouwer als Konsequenz aus der Zeit-Gebundenheit des Mathematischen ergibt, ist nichts anderes, als was wir aus der Gebundenheit der formalen Abstraktion an den konkret-anschaulichen Ausgangspunkt entnommen haben, nämlich eben die methodische Begrenzung des finiten Verfahrens.

Die entscheidenden Konsequenzen des Intuitionismus ergeben sich nun erst aus der weiteren Behauptung, daß jedwedes mathematische Denken, das wissenschaftliche Geltung soll beanspruchen können, sich anhand der mathematischen Evidenz vollziehen müsse, daß also die Grenzen der mathematischen Evidenz zugleich Grenzen für das mathematische Denken überhaupt seien.

Diese Forderung der Beschränkung des mathematischen Denkens auf das anschaulich Evidente erscheint zunächst als vollkommen berechtigt. Sie entspricht ja der uns vertrauten Auffassung von der mathematischen Gewißheit. Wir müssen jedoch bedenken, daß diese uns geläufige Auffassung von der
352 Mathe|matik ursprünglich zusammengehörte mit einer philosophischen An-
A44 sicht, für welche die anschauliche Evidenz der | Grundlagen der Infinitesimal-
rechnung nicht in Frage stand. Von einer solchen Ansicht sind wir ja aber abgegangen, da wir fanden, daß die Postulate der Analysis sich nicht durch die Anschauung verifizieren lassen, daß nämlich die von der Analysis zu Grunde gelegte Vorstellung von unendlichen Gesamtheiten nicht in der Anschauung, sondern nur im Sinne einer *Ideenbildung* faßbar ist.

Wir können nun nicht erwarten, daß diese neue Ansicht von den Grenzen der anschaulichen Evidenz sich ohne weiteres mit der überkommenen Auffassung von dem Erkenntnischarakter der Mathematik verträgt, vielmehr liegt auf Grund unserer Feststellungen die Vermutung nahe, daß die landläufige Auffassung von der Mathematik den Sachverhalt zu simpel darstellt, und daß wir dem, was in der Mathematik vorliegt, von dem Standpunkt der Evidenz allein nicht gerecht werden können, sondern hier *dem Denken noch eine eigene Rolle zuerkennen* müssen.

Wir kommen so zu einer Unterscheidung zwischen dem elementar-mathematischen Standpunkt und einem darüber hinausgehenden systematischen Standpunkt. Diese Unterscheidung ist keineswegs künstlich und etwa bloß

ad hoc getroffen, vielmehr entspricht sie der Zweiheit der Ausgangspunkte, von denen aus man zu der Arithmetik geführt wird, nämlich einerseits der kombinatorischen Beschäftigung mit Verhältnissen im Diskreten, und andererseits der theoretischen Anforderung, welche von Seiten der Geometrie und der Physik an die Mathematik gestellt wird.[10] Das System der Arithmetik entspringt ja keineswegs nur einer konstruierenden und anschaulich betrachtenden Tätigkeit, sondern zum erheblicheren Teil der Aufgabe, die geometrischen und physikalischen Vorstellungen von Menge, Flächeninhalt, Berührung, Geschwindigkeit usw. begrifflich genau zu fassen und theoretisch
A45 zu beherrschen. Die Methode der Arithmetisierung ist ein Mittel zu | diesem
Zweck. Um aber diesem Zweck zu dienen, muß die Arithmetik ihren methodischen Standpunkt von dem ursprünglichen elementaren Standpunkt der
353 Zahlenlehre *zu einer syste|matischen Einstellung* im Sinne der besprochenen
Postulate *erweitern.*

Die Arithmetik, welche den großen Rahmen bildet, in welchen die geometrischen und physikalischen Disziplinen eingeordnet werden, besteht nicht einfach in dem elementar-anschaulichen Umgehen mit den Zahlen, sondern sie hat selbst den Charakter einer *Theorie*, indem sie die Vorstellung der Zahlengesamtheit als eines Systems von Dingen sowie auch der Gesamtheit der Zahlenmengen zu Grunde legt. Diese systematische Arithmetik erfüllt ihre Aufgabe aufs allerbeste, und es liegt in ihrem Verfahren kein Grund des Anstoßes vor, sofern wir uns nur darüber klar sind, daß wir hier nicht den Standpunkt der elementaren Anschaulichkeit, sondern den einer Gedankenbildung einnehmen, d. h. denjenigen Standpunkt, welchen Hilbert als den *axiomatischen* bezeichnet.

Gegen dieses axiomatische Vorgehen besteht auch nicht etwa der Vorwurf der Willkürlichkeit zu Recht, denn wir haben es bei den Grundlagen der systematischen Arithmetik nicht mit einem beliebigen, nach Bedarf zu-

[10] Bemerkenswert ist, daß bereits Jakob Friedrich Fries, der noch der mathematischen Evidenz einen weit über das Finite hinausgehenden Bereich zuschrieb – insbesondere ist nach seiner Ansicht die „stetige Reihe des Größeren und Kleineren“ in reiner Anschauung gegeben –, dennoch einen methodischen Unterschied machte zwischen der „Arithmetik als einer Theorie“, welche die anschauliche Vorstellung der Größe auf Begriffe bringt und wissenschaftlich ausbildet, und der „Kombinationslehre oder Syntaktik“, welche einzig auf dem Postulat der willkürlichen Anordnung gegebener Elemente und ihrer willkürlichen Wiederholung beruht und die keiner Axiome bedarf, da ihre Operationen „für sich unmittelbar verständlich“ sind. (Vgl. Fries: *Mathematische Naturphilosophie*, *vide* [**?**], S. ■ .)

sammengestellten Axiomensystem zu tun, sondern mit einer *naturgemäßen systematischen Extrapolation der elementaren Zahlenlehre*, und die auf dieser Grundlage sich entwickelnde Analysis und Mengenlehre bildet eine schon *rein gedanklich ausgezeichnete* Theorie, welche geeignet ist, als die Theorie $\kappa\alpha\tau$' ■ '$\varepsilon\xi o\chi\tilde{\eta}\nu$ genommen zu werden, in welche wir die Lehrgebäude und die theoretischen Ansätze der Geometrie und der Physik einordnen.

Wir können somit das Veto, das der Intuitionismus gegen das Verfahren der Analysis richtet, nicht anerkennen. Die Feststellung, mit der wir dem Intuitionismus zustimmen, daß das Unendliche uns nicht anschaulich gegeben ist, nötigt uns wohl zu einer Modifikation unserer philosophischen Auffassung von der Mathematik, nicht aber zu einer Umgestaltung der Mathematik selbst.

Allerdings kehrt nun das Problem des Unendlichen wieder. Denn indem wir eine Gedankenbildung als Ausgangspunkt der Arithmetik nehmen, haben wir etwas Problematisches eingeführt. Ein gedanklicher Ansatz, mag er noch so plausibel und vom systematischen Gesichtspunkt aus naturgemäß sein, enthält an sich noch nicht die Gewähr seiner widerspruchsfreien Durchführbarkeit. Indem wir die Idee der unendlichen Gesamtheit der Zahlen und der Zahlenmengen fassen, ist damit noch nicht ausgeschlossen, daß diese Idee etwa in
354 ihren Konsequenzen auf einen Widerspruch führte. Es bleibt also die Frage |
A46 der $|_A$ Widerspruchsfreiheit, der „Konsistenz"[11] des Systems der Arithmetik zu untersuchen.

Der Intuitionismus will uns diese Aufgabe ersparen, indem er die Mathematik auf den Bereich der finiten Betrachtung einschränkt; diese Ausschaltung der Problematik geschieht aber um einen zu hohen Preis: Das Problem fällt weg, aber es geht auch die systematische Einfachheit und Übersichtlichkeit der Analysis verloren.

[11]Es mag hier angeregt sein, diesen von Cantor speziell in Bezug auf Mengenbildungen gebrauchten Ausdruck allgemein mit Bezug auf irgendwelche theoretischen Ansätze zu verwenden.

3 Die Problematik der logistischen Theorie – Wert der logistischen Einordnung der Arithmetik

In ganz anderer Weise glauben die Vertreter des logistischen Standpunktes sich mit diesem Problem abfinden zu können. Mit der Erörterung dieses Standpunktes knüpfen wir an unsere früheren Betrachtungen über die Logistik an. Dort kam es darauf an, zu erkennen, daß in die deduktive Logik bereits auschauliche Evidenz eingeht, und daß die logischen Anzahl-Definitionen nicht etwa die Anzahlbegriffe als solche von spezifisch logischer Natur (als reine Reflexionsbegriffe) erweisen, sondern vielmehr nur logische Normierungen elementarer Strukturbegriffe sind.

Diese Überlegungen betreffen die Abgrenzung des Logischen im engeren Sinne von dem Formalen. Aber mit der Anerkennung des formalen Elementes in der Logik ist die Methodenfrage der Logistik noch keineswegs abgeschlossen. Die Logistik begnügt sich ja nicht mit der theoretischen Entwicklung der Lehre von den Schlüssen, sondern, wie schon erwähnt ist, macht sie sich überdies zur Aufgabe, die gesamte Arithmetik in den logischen Formalismus einzuordnen. Diese Einordnung findet in der Weise statt, daß man zunächst in der früher beschriebenen Weise die Anzahlen als Eigenschaften von Prädikaten einführt und ferner – wie hier nicht genauer ausgeführt werden soll – die Bildungsweise der Zahlenmengen mit den Mitteln des logischen Formalismus zum Ausdruck bringt, wobei man eine jede Menge durch ein sie definierendes Prädikat ersetzt. An die Stelle der Gesamtheit aller Zahlen-Mengen tritt so die Gesamtheit der Zahlen-Prädikate.

Es gelingt auf diese Weise in der Tat, jedem arithmetischen Satz einen
A47 Satz aus dem Bereiche der theoretischen Logik zuzuordnen, in welchem | ausser den Variablen nur „logische Konstanten“, d. h. logische Grundoperationen wie die Konjunktion, die Negation, die Form der Allheit usw. auftreten.
355 | Nun ist klar, daß allein durch diese Übersetzung der Arithmetik in den logischen Formalismus das Problem des Unendlichen noch nicht gelöst werden kann. Wenn die theoretische Logik das System der Arithmetik deduktiv gewinnt, so müssen in ihrem Verfahren entweder ausgesprochenermaßen oder verdeckt Voraussetzungen enthalten sein, durch welche die Einführung des Aktual-Unendlichen zustande kommt.

Die Rechenschafts-Ablegung über diese Voraussetzungen und die Stellungnahme zu ihnen bildete von Anbeginn den schwachen Punkt der Logistik.

So waren Frege und Dedekind, deren Beweisführungen und Überlegungen sonst überall durch äußerste Präzision und Strenge ausgezeichnet sind, ganz unbedenklich in dem, was sie als vermeintlich selbstverständliche Voraussetzung dem Standpunkt der allgemeinen Logik zu Grunde legten, nämlich in der Vorstellung von einer abgeschlossenen Gesamtheit aller überhaupt denkbaren logischen Objekte.

Diese Vorstellung würde freilich, wenn sie sich halten ließe, systematisch noch befriedigender sein als die spezielleren Postulate der Arithmetik. Bekanntermaßen mußte sie auf Grund der Widersprüche, zu denen man durch sie geführt wurde, fallengelassen werden. Die Logistik verzichtet seither darauf, die Existenz einer unendlichen Gesamtheit zu beweisen und stellt vielmehr ausdrücklich ein *Unendlichkeitsaxiom* auf.

Dieses Unendlichkeitsaxiom reicht aber als Voraussetzung zur Gewinnung der logisch gefaßten Arithmetik noch nicht aus. Wir würden damit nur dasjenige erhalten, was sich aus der Anwendung unseres ersten Postulates, der Zulässigkeit des existentialen Schließens in bezug auf die ganzen Zahlen ergibt. Um auch unserem zweiten Postulat zu entsprechen, wird noch etwas Weiteres erfordert, nämlich die Anwendung des existentialen Schließens *in Bezug auf Prädikate*. Die Berechtigung dieses Verfahrens kann zunächst als logisch selbstverständlich erscheinen, und für die Auffassung, die Frege und Dedekind zu Grunde legten, steht sie in der Tat ganz außer Frage. Mit der Preisgabe der Vorstellung von der Gesamtheit aller logischen Gegenstände wird aber auch die Vorstellung von der Gesamtheit aller Prädikate problematisch, und bei näherem Zusehen zeigt sich hierin eine besondere grundsätzliche Schwierigkeit.

Nämlich dem eigentlich logischen Standpunkt entspricht es, daß wir die
Gesamtheit der Prädikate als eine solche auffassen, welche zum wesentli-
A48 chen Teil erst im Rahmen des Systems der Logik zustande | kommt, in der
Weise, daß auf gewisse vorlogische, etwa aus der Anschauung entnommene
Ausgangs-Prädikate die logischen Bildungsprozesse angewandt werden. Es
356 werden nun | durch die Bezugnahme auf die Gesamtheit der Prädikate wie-
derum Prädikate gewonnen. Ein Beispiel hierfür bildet die früher erwähnte
Fregesche Definition der endlichen Zahl: „Eine Zahl n heißt endlich, wenn auf
n jedes Prädikat zutrifft, welches auf die Zahl 0 zutrifft, und welches, wenn es
auf eine Zahl a zutrifft, auch auf die nächstfolgende Zahl zutrifft.“ Hier wird
das Prädikat der Endlichkeit definiert mit Bezugnahme auf die Gesamtheit
aller Prädikate.

Derartige Definitionen – man nennt sie *imprädikativ*[12] – treten allenthalben in der Grundlegung der Arithmetik, und zwar gerade an entscheidenden Stellen auf.

Nun ist an sich gar nichts dagegen einzuwenden, daß man ein Ding aus einer Gesamtheit durch eine Eigenschaft bestimmt, welche sich auf diese Gesamtheit bezieht. So ist z. B. in der Gesamtheit der Zahlen eine bestimmte Zahl durch die Eigenschaft definiert, daß sie die größte unter allen den Primzahlen ist, deren 1000-faches größer ist als das 1001-fache der vorangehenden Primzahl.[13]

Aber Voraussetzung ist dabei, daß die betreffende Gesamtheit *unabhängig* von den auf sie Bezug nehmenden Definitionen bestimmt ist; sonst geraten wir in einen fehlerhaften Zirkel.

Diese Vorbedingung kann jedoch gerade beim Fall der Gesamtheit der Prädikate und der auf sie bezogenen imprädikativen Definitionen nicht ohne weiteres als erfüllt gelten, denn der Umkreis der Prädikate bestimmt sich ja –
A49 gemäß der hier erörterten Auffassung – durch die | logischen Bildungsgesetze, und zu diesen gehören auch die imprädikativen Definitionen.

Zur Vermeidung des fehlerhaften Zirkels würde es allerdings genügen, wenn sich zeigen ließe, daß jedes durch eine imprädikative Definition eingeführte Prädikat auch anderweitig „prädikativ" definiert werden kann. Ja, man würde sogar mit einem schwächeren Satz auskommen. Da nämlich bei
357 der | logischen Grundlegung der Arithmetik ein Prädikat immer nur seinem Umfange nach betrachtet wird, d. h. in Hinsicht auf die Menge der Dinge, auf die es zutrifft, so brauchten wir nur zu wissen, daß ein jedes durch eine imprädikative Definition eingeführte Prädikat *umfangsgleich* ist mit einem prädikativ definierten Prädikat.

[12]Der Terminus rührt von Poincaré her, der im Unterschiede von den andern Kritikern der Mengenlehre, welche fast alle nur das Auswahlaxiom im Auge hatten, den Gesichtspunkt der imprädikativen Definition in die Diskussion brachte, und auf diesen das Gewicht legte. Seine Kritik war jedoch insofern anfechtbar, als er den Gebrauch der imprädikativen Definitionen als eine von der Mengenlehre eingeführte Neuerung hinstellte. Zermelo konnte ihm entgegenhalten, daß bereits in den üblichen, von Poincaré durchaus anerkannten Schlußweisen der Analysis die imprädikativen Definitionen wesentlich auftreten.

Seitdem haben insbesondere Russell und Weyl die Rolle der imprädikativen Definition in der Analysis eingehend erörtert und zur vollen Deutlichkeit gebracht.

[13]Das Beispiel ist so gewählt, daß die Bezugnahme auf die Gesamtheit der Zahlen nicht ohne weiteres eliminiert werden kann, wie dieses bei den meisten einfacheren Beispielen der Fall ist.

Dieses Postulat wurde von Russell, welcher die in den imprädikativen Definitionen vorliegende Schwierigkeit mit aller Deutlichkeit erkannte, als neben das Unendlichkeitsaxiom gestellt.

Wie aber haben wir dieses Axiom der Reduzibilität aufzufassen? Aus seiner Formulierung geht nicht hervor, ob damit ein logisches Gesetz oder eine außerlogische Annahme ausgesprochen sein soll.

Im ersten Fall, wenn das Reduzibilitäts-Axiom der Ausdruck eines logischen Gesetzes wäre, müßte seine Geltung unabhängig davon sein, was für ein Bereich von vorlogischen Ausgangsprädikaten zu Grunde gelegt wird, – vorausgesetzt wenigstens, daß dieser Bereich dem Unendlichkeitsaxiom genügt. Das würde aber besagen, daß eine axiomatische Theorie, in welcher die Formen des allgemeinen und des existentialen Urteils (das existentiale Schließen) nur auf die Gegenstände, nicht aber auf die Prädikate angewendet werden, keiner Erweiterung ihres Prädikatenbereiches durch Einführung von imprädikativen Definitionen fähig ist, sofern nur das Axiomensystem so beschaffen ist, daß es zu seiner Erfüllung ein unendliches System von Gegenständen erfordert.

Von der Gültigkeit eines solchen Satzes ist aber keine Rede. Man kann sich leicht Beispiele konstruieren, welche diese Behauptung widerlegen.

Ein solches Beispiel liefert insbesondere die *Dedekindsche Einführung des Zahlenbegriffs*. Dedekind geht aus von einem System, worin ein Ding 0 ausgezeichnet ist und welches eine umkehrbar eindeutige Abbildung auf eine Teilmenge gestattet, zu der jenes Ding 0 nicht gehört. Stellen wir nun diese Abbildung durch ein Prädikat mit 2 Subjekten dar und formulieren wir die verlangten Eigenschaften dieses Prädikates als Axiome, so erhalten wir
A50 damit ein elementares Axiomensystem, welches in seinen Axiomen keine Bezug|nahme auf die Gesamtheit der Prädikate enthält und das ferner nur durch ein unendliches System von Gegenständen erfüllt werden kann. Betrachten wir nun den Dedekindschen Begriff der Zahl; seine Definition läßt sich, indem wir sie aus der Sprache der Mengentheorie in die der Prädikatentheorie übersetzen, ganz analog zu Freges Definition der endlichen Zahl formulieren: „ein Ding n unseres Systems ist eine Zahl, wenn auf n jedes Prädikat zutrifft, das auf 0 zutrifft und das, wenn es auf ein Ding a unseres Systems zutrifft, auch auf dasjenige Ding zutrifft, welches dem Ding a bei der umkehrbar eindeutigen Abbildung zugeordnet ist.“ Diese Definition ist imprädikativ; und man kann sich überlegen, daß es nicht möglich ist, zu dem hierdurch definierten Begriff „Zahl-Sein“ ein umfangsgleiches Prädikat durch
358 eine prädikative Definition aus den Grundelementen der Theorie zu gewinnen.[14] |

[14] Ein anderes Beispiel hat Waismann (in einer Note über „Die Natur des Reduzibilitäts-

Wir finden somit, daß für das Reduzibilitäts-Axiom nur die zweite Deutung in Betracht kommt, wonach es eine *Anforderung an den Ausgangsbereich der vorlogischen Prädikate* zum Ausdruck bringt.

Mit der Einführung einer solchen Voraussetzung verzichtet man aber auf die Auffassung, daß der Bereich der Prädikate durch die logischen Prozesse erzeugt wird. Die Absicht einer eigentlich logischen Prädikaten-Theorie wird damit aufgegeben.

Entschließt man sich einmal hierzu, so erscheint es natürlicher und angemessener, zu derjenigen Vorstellung von der *logischen Funktion* zurückzukehren, die dem Standpunkt von Schröder entspricht: man denkt sich eine logische Funktion als eine Verteilung der Werte „wahr" und „falsch" auf die Dinge des Individuumbereiches. Ein jedes Prädikat definiert eine solche Verteilung; aber die Gesamtheit der Wertverteilungen wird als eine *unabhängig von den begrifflichen Definitionen bestehende kombinatorische Mannigfaltigkeit*, nach Analogie zum Endlichen, gedacht.

Durch diese Auffassung wird das Zirkelhafte bei den imprädikativen Definitionen der theoretischen Logik beseitigt; wir brauchen nur eine jede Aussage über die Gesamtheit der Prädikate zu ersetzen durch die entsprechende Aussage über die Gesamtheit der logischen Funktionen. Das Axiom der Reduzibilität wird somit entbehrlich.

Diesen Schritt hat nun tatsächlich die logistische Schule auf Anregung von Wittgenstein und Ramsey vollzogen, von denen insbesondere geltend gemacht wird, daß man zur Vermeidung der Widersprüche, welche mit dem Be-
A51 griff der Menge aller mathematischen | Gegenstände zusammenhängen, nicht nötig hat, eine Unterscheidung der Prädikate nach der Art ihrer Definition vorzunehmen, wie es Whitehead und Russell in den *Principia Mathematica* getan haben, sondern daß es genügt, die Definitionsbereiche der Prädikate deutlich abzugrenzen, so daß man unterscheidet zwischen den Prädikaten von Individuen, den Prädikaten der Prädikate, den Prädikaten der Prädikate von Prädikaten usw.

So ist man von der Stufentheorie der *Principia Mathematica* zu den einfacheren Auffassungen von Cantor und Schröder zurückgekehrt.

Man darf sich nun aber nicht darüber täuschen, daß man sich hiermit von dem Standpunkt der logischen Selbstverständlichkeit weit entfernt hat. Die Voraussetzungen, welche so der theoretischen Logik zu Grunde gelegt

Axioms" (*vide* [**?**])) angegeben. Dieses bedarf jedoch einer Modifikation.

359 werden, sind | prinzipiell von ganz derselben Art wie die Grundpostulate der Analysis und diesen auch inhaltlich vollkommen analog: der Vorstellung der Zahlenreihe als unendlicher Gesamtheit entspricht in der logischen Theorie das Unendlichkeitsaxiom, und anstatt des Inbegriffs aller Zahlenmengen wird hier der Inbegriff aller (auf den „Individuenbereich“ oder auf einen bestimmten Prädikatenbereich bezogenen) logischen Funktionen postuliert.

Es wird also bei der Einordnung der Arithmetik in das System der theoretischen Logik an Voraussetzungen nichts gespart. Diese Einordnung hat gar nicht, wie man zunächst meinen sollte, die Bedeutung einer Zurückführung der Postulate der Arithmetik auf geringere Voraussetzungen; ihr Wert liegt vielmehr darin, daß die mathematische Theorie durch ihre Vereinigung mit dem logischen Formalismus auf eine breitere Basis gestellt wird.

Die Theorie gewinnt hierdurch zunächst einen höheren Grad von methodischer Auszeichnung, indem sich zeigt, daß ihre Voraussetzungen nicht nur aus der anschaulichen Zahlenlehre durch eine naturgemäße Extrapolation erhalten werden, sondern sich gleichermaßen auch ergeben, indem wir die *Umfangslogik* im Sinne einer Ausdehnung auf unendliche Gesamtheiten *extrapolieren.*

Außerdem aber bekommen wir durch den Anschluß der Arithmetik an die theoretische Logik einen Einblick in den Zusammenhang der Prozesse der Mengenbildung mit den logischen Grundoperationen, und die logische Struktur der Begriffsbildung und der Schlüsse tritt deutlicher hervor.

So wird insbesondere der Sinn des *Auswahlprinzips* erst an Hand des logischen Formalismus vollkommen verständlich. Wir können das Prinzip in folgender Form aussprechen: Wenn $B(x, y)$ ein (in einem bestimmten Berei-
A52 che definiertes) Prädikat mit zwei Subjekten ist und | wenn es zu jedem Ding x des Definitionsbereiches mindestens ein Ding y dieses Bereiches gibt, für welches $B(x, y)$ zutrifft, so gibt es (mindestens) eine Funktion $y = f(x)$ von der Beschaffenheit, daß für jedes Ding x des Definitionsbereiches von $B(x, y)$ der Wert $f(x)$ wieder ein Ding dieses Bereiches ist, und zwar ein solches, für das $B(x, f(x))$ zutrifft.

Überlegt man sich, was diese Behauptung für den speziellen Fall eines zweizahligen Subjektbereiches besagt, dessen Dinge wir durch die Zahlen $0, 1$ repräsentieren können und bei dem überhaupt nur vier verschiedene Wertverläufe von Funktionen $y = f(x)$ in Betracht kommen, so findet man, daß die Behauptung sich als eine einfache Anwendung des einen von den *distributiven Gesetzen* ergibt, welche für die Beziehung zwischen Konjunktion und Disjunktion gelten, nämlich des folgenden elementar-logischen Satzes: „Wenn

360 A | besteht und wenn außerdem B oder C besteht, so besteht entweder A und B, oder es besteht A und C.“[15]

Auch im Falle irgendeiner bestimmten endlichen Anzahl von Dingen des Subjektbereiches folgt die Behauptung des Auswahlprinzips aus diesem distributiven Gesetz. Die allgemeine Behauptung des Auswahlprinzips ist also nichts anderes als die Ausdehnung eines elementar-logischen Gesetzes für die Konjunktion und Disjunktion auf unendliche Gesamtheiten, und das Auswahlprinzip bildet somit eine Ergänzung zu den logischen Regeln, welche das allgemeine und das existentiale Urteil betreffen, d. h. der Regeln des existentialen Schließens, deren Anwendung auf unendliche Gesamtheiten ja ebenfalls die Bedeutung hat, daß gewisse elementare Gesetze für die Konjunktion und Disjunktion auf das Unendliche übertragen werden.

Gegenüber diesen Regeln des existentialen Schließens kommt dem Auswahlprinzip nur insofern eine Sonderstellung zu, als es zu seiner Formulierung den *Funktions-Begriff* erfordert, der seinerseits auch durch das Auswahlprinzip erst seine hinlängliche implizite Charakterisierung erhält.

Dieser Funktionsbegriff entspricht dem Begriff der logischen Funktion, nur mit dem Unterschiede, daß als Funktionswerte nicht „wahr“ und „falsch“, sondern die Dinge des Subjektbereiches genommen werden. Die Gesamtheit der Funktionen, um die es sich hier handelt, ist also die Gesamtheit aller möglichen „Selbstbelegungen“ des Subjektbereiches.

A53 | Im Sinne dieses Funktionsbegriffes bedeutet die Existenz einer Funktion von der Eigenschaft E noch keineswegs, daß eine Begriffsbildung existiert, durch welche eine bestimmte Funktion von der Eigenschaft E eindeutig festgelegt wird. Mit der Beachtung dieses Umstandes werden die üblichen Einwendungen gegen das Auswahlprinzip hinfällig, die zumeist darauf beruhen, daß man durch den Namen „Auswahlprinzip“ zu der Meinung verführt wird, als ob mit diesem Prinzip die Möglichkeit einer Auswahl behauptet sei.

Zugleich erkennen wir, daß die Voraussetzung, die in dem Auswahlprinzip ihren Ausdruck findet, grundsätzlich nicht hinausgeht über die Auffassung, die wir auch sonst schon dem Verfahren der theoretischen Logik zu Grunde legen müssen, um es ohne die Einführung eines Reduzibilitäts-Axioms zirkelfrei deuten zu können.

Dieser Feststellung können wir freilich auch die entgegengesetzte Betonung geben: Die Strittigkeit des Auswahlprinzips, dessen Aufstellung im Sin-

[15]Das „oder“ ist hier beidemal nicht im Sinne des ausschließenden „oder“, sondern des lateinischen „vel“ gemeint. Der Satz gilt allerdings auch für das ausschließende „oder“.

ne der konsequenten Ausgestaltung des Standpunktes der theoretischen Logik
361 liegt, | bringt uns das Problematische dieses Standpunktes besonders nachdrücklich zum Bewußtsein.

Das ist ja auch das Ergebnis, zu dem uns die Betrachtung der logistischen Grundlegung der Arithmetik geführt hat, daß dieses Verfahren der Einordnung der Arithmetik in die theoretische Logik zwar wohl eine breitere Grundlage für die arithmetische Theorie schafft und zur inhaltlichen Motivierung ihrer Voraussetzungen beiträgt, daß es aber nicht hinausführt über den methodischen Standpunkt des ideellen Ansatzes, d. h. über den Standpunkt der Axiomatik.

Das Problem des Unendlichen wird auf diese Weise zwar formuliert, aber nicht gelöst. Denn es bleibt eben dahingestellt, ob die als Voraussetzung für den Aufbau der Analysis und Mengenlehre postulierten Analogien zwischen dem Endlichen und dem Unendlichen einen zulässigen, d. h. widerspruchsfrei durchführbaren Gedankenansatz bilden.

Diese Frage, welche der Intuitionismus durch die Ausschaltung der problematischen Voraussetzungen vermeiden will, und deren Berechtigung die Logisten zumeist bestreiten, indem sie einen grundsätzlichen Unterschied zwischen dem Endlichen und dem Unendlichen überhaupt nicht anerkennen, wird durch die *Hilbertsche Beweistheorie* positiv in Angriff genommen.

4 Die Hilbertsche Beweistheorie

Um die Leitgedanken der Beweistheorie besser aufzufassen, wollen wir uns
A54 zunächst noch einmal vergegenwärtigen, welcher Art die hier | zu lösende Aufgabe ist. Es handelt sich darum, die mathematische Ideenbildung, auf welcher das Lehrgebäude der Arithmetik beruht, als widerspruchsfrei zu erweisen.

Man hat von philosophischer Seite mehrfach die Frage aufgeworfen, ob es denn zur Rechtfertigung dieser Ideenbildung mit dem Nachweise der Widerspruchsfreiheit allein getan sei. Diese Fragestellung ist aber irreführend; sie trägt nicht der Tatsache Rechnung, daß die wissenschaftliche Motivierung des theoretischen Ansatzes der Arithmetik zum wesentlichen Teil bereits durch die Wissenschaft geleistet ist, und daß der Nachweis der Widerspruchsfreiheit gerade eben dasjenige Desiderat ist, dessen Erfüllung allein noch aussteht.

Das Gebäude der Arithmetik ist auf der Grundlage von Gedanken errichtet, welche für die wissenschaftliche Systematik überhaupt von maßgebender Bedeutung sind, nämlich dem Prinzip der *Erhaltung („Permanenz“) der Gesetzlichkeiten*, welches hier als das Postulat der unbeschränkten Anwendbarkeit der üblichen logischen Formen des Urteilens und Schließens auftritt, und der Forderung einer rein *objektiven* Fassung der Theorie, durch welche diese losgelöst wird von jeder Bezugnahme auf unser *Erkennen*.

362 | In der grundsätzlichen methodischen Bedeutung dieser Anforderungen liegt die *innere* Motivierung und Auszeichnung des Ansatzes der arithmetischen Theorie.

Zu dieser inneren Motivierung tritt die glänzende Bewährung des Gedankensystems der Arithmetik im Sinne seiner deduktiven Fruchtbarkeit, seines systematischen Erfolges und der Einhelligkeit seiner Konsequenzen. Die Eignung dieses Gedankensystems zur Beherrschung der Anzahl- und der Größenverhältnisse ist eklatant. Die Systematik des großartigen Lehrgebäudes, welches durch die Vereinigung der Funktionentheorie mit der Zahlentheorie und der Algebra zustande kommt, hat nicht ihresgleichen. Und als umfassender Begriffsapparat für die naturwissenschaftlichen Theorien-Bildungen erweist sich die Arithmetik nicht nur als geeignet zur Formulierung und Entwicklung der Gesetze, sondern sie wird auch mit großem Erfolge, in einem früher ungeahnten Ausmaße, zum Aufsuchen der Gesetze herangezogen.

Was ferner die Einhelligkeit der Konsequenzen betrifft, so ist diese durch die intensive theoretische Durcharbeitung und die vielfache numerische Anwendung der Analysis aufs beste erprobt.

Woran es hier noch fehlt, das ist nur, daß an Stelle des bloß empirischen, durch mannigfaches Ausprobieren gewonnenen Vertrauens auf die Konsistenz der arithmetischen Theorie, d. h. auf die durchgängige Einstimmigkeit ihrer
A55 Ergebnisse, eine wirkliche Einsicht in diese | Konsistenz erlangt werde, und dieses zu bewirken ist die Aufgabe des Nachweises der Widerspruchsfreiheit.

Die Situation ist also nicht etwa derart, daß durch den Nachweis der Widerspruchsfreiheit das Gedankensystem der Arithmetik überhaupt erst etabliert werden müßte, sondern die Aufgabe dieses Nachweises besteht ausschließlich darin, uns in betreff dieses schon durch innere Gründe der Systematik motivierten und in seiner Handhabung als geistiges Rüstzeug aufs beste bewährten Gedankensystems die volle, einsichtige Gewißheit zu verschaffen, daß es nicht durch eine Unstimmigkeit seiner Konsequenzen zu Falle kommen kann.

Wenn dieses gelingt, so wissen wir, daß die Idee des abgeschlossenen Unendlichen sich in konsequenter Weise durchführen läßt. Und wir können uns

dann auf die Ergebnisse der Anwendung der arithmetischen Grundpostulate gerade so verlassen, wie wenn wir in der Lage wären, diese anschaulich zu verifizieren. Denn indem wir die Widerspruchsfreiheit der Anwendung dieser Postulate erkennen, ergibt sich zugleich, daß ein aus ihnen gefolgerter, anschaulich, d. h. im finiten Sinne deutbarer Satz niemals einer anschaulich erkennbaren Tatsache widersprechen kann. Bei einem finiten Satz ist aber die
363 | Feststellung seiner Unwiderleglichkeit gleichbedeutend mit der Feststellung seiner Wahrheit.

Aus dieser Betrachtung über das Erfordernis und den Zweck des Nachweises der Widerspruchsfreiheit geht nun insbesondere hervor, daß es bei diesem Nachweis auf nichts anderes ankommt, als im buchstäblichen Sinne des Wortes die Widerspruchsfreiheit der arithmetischen Theorie, d. h. die *Unmöglichkeit ihrer immanenten Widerlegung* einzusehen.

Es war das Neue an Hilberts Vorgehen, daß er sich auf diese Problemstellung beschränkte, während man vordem einen Beweis für die Widerspruchsfreiheit einer axiomatischen Theorie immer in dem Sinne geführt hatte, daß man damit zugleich positiv die Erfüllung der Axiome durch gewisse Objekte aufzeigte. Für diese Methode der Aufweisung bietet sich beim Fall der Arithmetik keine Handhabe, insbesondere führt der Fregesche Gedanke, die aufzuweisenden Objekte aus dem Gebiete der Logik zu entnehmen, deshalb nicht zum Ziel, weil, wie wir uns klargemacht haben, die Anwendung der üblichen Logik auf das Unendliche ebenso problematisch ist wie die als widerspruchsfrei zu erweisende Arithmetik. Die Grundpostulate der arithmetischen Theorie betreffen ja gerade die erweiterte Anwendung der üblichen Formen des Urteilens und Schließens.

A56 Indem wir uns diesen Umstand vergegenwärtigen, werden wir | geradewegs auf das *erste Leitprinzip der Hilbertschen Beweistheorie* geführt: Dieses besagt, daß wir beim Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik die Gesetze der Logik, so wie sie in der Arithmetik angewandt werden, in den Bereich des als widerspruchsfrei zu Erweisenden einzubeziehen haben, so daß sich der Nachweis der Widerspruchsfreiheit *gemeinsam auf Logik und Arithmetik* erstreckt.

Zur Durchführung dieses Gedankens ist nun bereits durch die Einordnung der Arithmetik in das System der theoretischen Logik der erste wesentliche Schritt getan. Auf Grund dieser Einordnung kommt die Aufgabe des Nachweises der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik darauf hinaus, die theoretische Logik als widerspruchsfrei zu erkennen, oder mit anderen Worten, die Widerspruchsfreiheit des Unendlichkeitsaxioms, der imprädikativen

Definition und des Auswahlprinzips festzustellen.

Es empfiehlt sich hierbei, an die Stelle des Russellschen Unendlichkeitsaxioms die Dedekindsche Charakterisierung des Unendlichen zu setzen.

Das Russellsche Unendlichkeitsaxiom fordert für jede endliche Zahl n (im Sinne der Fregeschen Definition der endlichen Anzahl) die Existenz eines n-zahligen Prädikates, womit implizite auch die Unendlichkeit des Individuenbereiches (des Ausgangsbereiches der Dinge) gefordert ist. Nun ist es eine unnötige und auch vom grundsätzlichen Standpunkte zu beanstandende Komplikation, daß hier drei Unendlichkeiten in verschiedenen Schichten
364 neben|einanderlaufen: die der unendlich vielen Dinge des Individuenbereiches, ferner die der unendlich vielen Prädikate und dann die daraus sich ergebende der unendlich vielen Anzahlen, welche ja als Prädikate von Prädikaten definiert werden.

Diese Vielfältigkeit können wir vermeiden, indem wir die Unendlichkeit des Individuenbereiches, anstatt durch eine unendliche Reihe von Prädikaten mit einem Subjekt, durch ein einziges Prädikat mit zwei Subjekten festlegen, nämlich ein solches, das eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Individuenbereiches auf einen echten (d. h. mindestens ein Ding ausschließenden) Teilbereich liefert. Die Einführung dieser Dedekindschen Charakterisierung des Unendlichen gestaltet sich am einfachsten und elementarsten, wenn wir die umkehrbar eindeutige Abbildung nicht durch ein Existenzaxiom postulieren, sondern gleich explizite einführen, indem wir ein Ausgangsding und einen Grundprozeß als Grundelemente der Theorie nehmen.

Auf diese Weise wird erreicht, daß die Zahlen nicht erst als Prädikate von Prädikaten, sondern schon als Dinge des Individuenbereiches auftreten.

Doch diese Erwägung bezieht sich bereits auf die besondere Art der Ausführung des systematischen Aufbaues, in betreff dessen mehrere We-
A57 ge offenstehen. Wir müssen uns aber noch ganz allgemein darüber | orientieren, wie denn überhaupt ein Nachweis der Widerspruchsfreiheit in dem gewünschten Sinne geführt werden kann. Diese Möglichkeit ist nicht ohne weiteres ersichtlich. Denn wie sollen alle möglichen Schlußfolgerungen überblickt werden, die sich aus den Voraussetzungen der Arithmetik bzw. der theoretischen Logik ergeben?

Hier kommt nun die Untersuchung der mathematischen Beweise mit Hilfe des logischen Kalküls entscheidend zur Geltung. Dieser hat gezeigt, daß die Begriffsbildungen und Schlußweisen, die in den Theorien der Analysis und der Mengenlehre angewandt werden, auf eine begrenzte Anzahl von Prozessen und Regeln zurückführbar sind, so daß es gelingt, diese Theorien im Rahmen einer genau abgegrenzten Symbolik restlos zu formalisieren.

Aus der Möglichkeit dieser Formalisierung, die ursprünglich nur zum Zweck der genaueren logischen Analyse der Beweise betrieben wurde, hat nun Hilbert die Folgerung gezogen – dieses ist der *zweite Leitgedanke seiner Beweistheorie* –, daß die Aufgabe des Nachweises der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik ein *finites Problem* ist.

Ein Widerspruch in der inhaltlichen Theorie muß sich nämlich an Hand der Formalisierung in der Weise geltend machen, daß gemäß den Regeln des Formalismus zwei Formeln ableitbar sind, von denen die eine aus der andern durch denjenigen Prozeß hervorgeht, welcher das formale Abbild der Negation bildet. Die Behauptung der Widerspruchsfreiheit ist daher gleichbedeutend mit der Behauptung, daß zwei Formeln, die in der genannten Beziehung stehen, nicht beide nach den Regeln des Formalismus abgeleitet
365 werden können. Diese | Aussage hat aber grundsätzlich denselben Charakter wie irgendein allgemeiner Satz der finiten Zahlenlehre, z. B. der Satz, daß es unmöglich ist, drei ganze (von 0 verschiedene) Zahlen a, b, c anzugeben, zwischen denen die Beziehung $a^3 + b^3 = c^3$ besteht.

Der Nachweis der Widerspruchsfreiheit für die Arithmetik kommt somit in der Tat auf ein finites Problem der Schlußlehre hinaus. Die finite Untersuchung, welche die formalisierten Theorien der Mathematik zum Gegenstand hat, wird von Hilbert als *Metamathematik* bezeichnet. Die Aufgabe, welche der Metamathematik gegenüber dem System der Mathematik zufällt, ist analog der, welche Kant der Vernunftkritik gegenüber dem System der Philosophie zugewiesen hat.

Im Sinne dieses methodischen Programms ist die Beweistheorie bereits
A58 ein beträchtliches Stück weit durchgeführt,[16] doch sind noch | erhebliche mathematische Schwierigkeiten zu überwinden. Durch die von Ackermann und v. Neumann geführten Beweise ist die Widerspruchsfreiheit für das erste Postulat der Arithmetik, d. h. die Anwendbarkeit des existentialen Schließens auf die ganzen Zahlen sichergestellt. Für das weitere Problem der Widerspruchsfreiheit des Allgemeinbegriffs der Zahlenmenge (bzw. der Zahlenfunktion) einschließlich des zugehörigen Auswahlprinzips liegt ein weitgeführter Ansatz von Ackermann vor.

[16]Einen ersten Entwurf einer Beweistheorie gab Hilbert schon 1904 in seinem Heidelberger Vortrag „Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik“ (*vide* [**?**]). Hier ist bereits der erste Leitgedanke der gemeinsamen Behandlung von Logik und Arithmetik ausdrücklich formuliert; das methodische Prinzip des finiten Standpunktes ist gleichfalls intendiert, aber noch nicht explizite ausgesprochen. – Zwischen diesen Vortrag und Hilberts neuere Publikationen über die Beweistheorie fällt die Untersuchung von Julius Koenig *Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre* (*vide* [**?**]), welche dem Standpunkt Hilberts sehr nahekommt und in der bereits ein Beweis für Widerspruchsfreiheit ganz im Sinne der Beweistheorie geführt ist. Dieser betrifft freilich nur einen ganz engen Bereich des formalen Operierens, so daß seine Bedeutung nur eine methodische ist.

Mit der Lösung dieses Problems würde schon fast der ganze Bereich der bestehenden mathematischen Theorien als widerspruchsfrei erwiesen sein.[17] Insbesondere würde dieser Nachweis ausreichen, um die geometrischen und physikalischen Theorien als widerspruchsfrei zu erkennen.

Man kann nun in der Problemstellung noch weiter gehen und für umfassendere Systeme, etwa für die axiomatische Mengenlehre, die Widerspruchsfreiheit untersuchen. Die axiomatische Mengenlehre, wie sie zuerst von Zer-
366 melo aufgestellt und durch Fraenkel und v. Neumann ergänzt und | erweitert ist, reicht mit ihren Bildungsprozessen schon weit hinaus über all das, was faktisch in der Mathematik gebraucht wird, und mit der Feststellung ihrer Widerspruchsfreiheit würde auch das System der theoretischen Logik als widerspruchsfrei erwiesen sein.

Ein absoluter Abschluß der Begriffsbildung wird aber auch hiermit nicht erreicht. Denn die formalisierte Mengenlehre gibt wieder Anlaß zu einer metamathematischen Betrachtung, welche die formalen Bildungen der Mengenlehre zum Gegenstand hat und dadurch auch über diese Bildungen hinausgeht.[18]
A59 | Ungeachtet dieser Möglichkeit der Erweiterung der Begriffsbildung kann dennoch eine formalisierte Theorie den Charakter der Abgeschlossenheit haben, wenn nämlich mit Hilfe der Erweiterung der Begriffsbildung keine neuen Ergebnisse im Bereiche der durch die Begriffe der Theorie formulierbaren Gesetze zustande kommen.

Diese Bedingung ist jedenfalls dann erfüllt, wenn die Theorie überhaupt *deduktiv abgeschlossen* ist, d. h. wenn es unmöglich ist, zu ihr ein neues, nicht schon ableitbares, in den Begriffen der Theorie ausdrückbares Axiom hinzuzufügen, ohne daß dadurch ein Widerspruch entsteht –, oder was auf dasselbe hinauskommt: wenn jeder im Rahmen der Theorie formulierbare Satz entweder beweisbar oder widerlegbar ist.[19]

[17] Auch die Cantorsche Theorie der Zahlen der zweiten Zahlklasse ist hier inbegriffen.

[18] Die näheren Erörterungen dieses Sachverhaltes knüpfen an das *Richardsche Paradoxon* an, welches in neuerer Zeit durch Skolem eine schärfere Fassung erhalten hat. Diese Überlegungen besitzen insofern keinen abschließenden Charakter, als sie sich im Rahmen einer nicht-finiten Metamathematik vollziehen. Eine endgültige Klärung der hier diskutierten Frage würde erst bewirkt sein, wenn es etwa gelänge, in finiter Weise eine Zahlenmenge anzugeben, von der sich zeigen ließe, daß sie in der axiomatischen Mengenlehre nicht vorkommt.

[19] Man beachte, daß diese Forderung der deduktiven Abgeschlossenheit noch nicht so weit geht wie die Forderung der *Entscheidbarkeit* einer jeden Frage der Theorie, welche besagt, daß es ein Verfahren geben soll, um von jedem beliebig vorgelegten Paar zweier

Von der Zahlentheorie, wie sie durch die Peanoschen Axiome, mit Hinzunahme der rekursiven Definition, abgegrenzt wird, glauben wir, daß sie in diesem Sinne deduktiv abgeschlossen ist; die Aufgabe eines wirklichen Nachweises hierfür ist aber noch völlig ungelöst. Noch schwieriger wird die Frage, wenn wir, über den Bereich der Zahlentheorie hinaus, zu der Analysis und den weiteren mengentheoretischen Begriffsbildungen aufsteigen.

Im Gebiete dieser und verwandter Fragen liegt noch ein beträchtliches Feld der Problematik offen. Diese Problematik ist aber nicht von der Art, daß sie eine Einwendung gegen den von uns eingenommenen Standpunkt
367 darstellt. | Wir müssen uns nur gegenwärtig halten, daß der Formalismus der Sätze und Beweise, mit denen wir unsere Ideenbildung zur Darstellung bringen, nicht zusammenfällt mit dem Formalismus derjenigen Struktur, die wir in der Gedankenbildung intendieren. Der Formalismus reicht aus, um unsere Ideen von unendlichen Mannigfaltigkeiten zu formulieren und aus diesen die logischen Konsequenzen zu ziehen, aber er vermag im allgemeinen nicht, die Mannigfaltigkeit gleichsam aus sich kombinatorisch zu erzeugen.

A60 | Die Ansicht, zu der wir in betreff der Theorie des Unendlichen gelangt sind, kann als eine Art der Philosophie des „als ob“ angesehen werden. Sie unterscheidet sich jedoch von der so benannten Philosophie Vaihingers grundsätzlich dadurch, daß sie auf die Widerspruchsfreiheit und die Beständigkeit der Ideenbildung das Gewicht legt, während Vaihinger die Forderung der Widerspruchsfreiheit für ein Vorurteil hält und geradezu erklärt, die Widersprüche in der Infinitesimalrechnung seien „nicht bloß nicht wegzuleugnen, sondern … selbst gerade das Mittel, durch welches der Fortschritt erreicht worden ist.“[20]

Vaihingers Betrachtung ist ausschließlich auf die wissenschaftliche *Heuristik* eingestellt. Er kennt nur „Fiktionen“, die als bloß vorübergehende Hilfsmittel des Denkens auftreten, bei deren Einführung das Denken sich Gewalt antut und deren widerspruchsvoller Charakter (wenn es sich um „echte Fiktionen“ handelt) nur durch geschickte Kompensation der Widersprüche unschädlich gemacht wird.

Die Ideenbildungen in unserem Sinne sind bleibendes Eigentum des Geistes. Sie sind ausgezeichnete Formen der systematischen Extrapolation und der idealisierenden Annäherung an das Tatsächliche. Sie sind auch keineswegs

der Theorie angehöriger, einander kontradiktorisch entgegengesetzter Behauptungen zu entscheiden, welche von beiden beweisbar („richtig“) ist.

[20]Vaihinger, *Die Philosophie des Als-Ob*, 2. Auflage, Kapitel XII (*vide* [?], S. ■).

etwas Willkürliches noch auch dem Denken Aufgezwungenes; im Gegenteil: sie bilden eine Welt, in der sich unser Denken heimisch fühlt und aus welcher der Menschengeist, der sich in sie versenkt, Befriedigung und Freude schöpft.

Nachtrag

Auf Grund verschiedener Einsichten, die sich seit dem Erscheinen der vorstehenden Abhandlung ergeben haben, ist einiges darin Geäußerte zu korrigieren.

Zunächst, was den Intuitionismus betrifft, so meinte man anfangs, daß die Methodik des intuitionistischen Beweisens mit derjenigen des Hilbertschen „finiten Standpunktes" übereinstimme. Jedoch hat sich gezeigt, daß die Methoden des Intuitionismus über die von Hilbert intendierten finiten Beweisverfahren hinausgehen. Insbesondere verwendet Brouwer den Allgemeinbegriff des inhaltlichen Beweises, mit dem auch der Begriff der „Absurdität" zusammenhängt, von dem aber beim finiten Schließen kein Gebrauch gemacht wird.

Was sodann die Hilbertsche Beweistheorie betrifft, so ist die Meinung,
A61 daß der Nachweis der Widerspruchsfreiheit für die Arithmetik | auf ein finites Problem hinauskomme, nur in dem Sinne begründet, daß die Behauptung der Widerspruchsfreiheit sich im finiten Sinne formulieren läßt. Daraus aber ergibt sich noch keineswegs, daß das Problem mit finiten Methoden lösbar ist. Auf Grund eines Theorems von Gödel wurde die Möglichkeit einer finiten Lösung sogar schon für die Zahlentheorie, wenn nicht direkt ausgeschlossen, so doch höchst unplausibel gemacht, und es zeigte sich überdies, daß die erwähnten damals vorliegenden Widerspruchsfreiheitsbeweise nicht für den Gesamtformalismus der Zahlentheorie ausreichten. Man hat daraufhin den methodischen Standpunkt der Beweistheorie erweitert, und es sind verschiedene Widerspruchsfreiheitsbeweise, zunächst für die formalisierte Zahlentheorie und dann auch für formale Systeme der Analysis geführt worden, deren Beweismethode sich zwar nicht auf die finite, d. h. elementar kombinatorische Betrachtung beschränkt, die aber doch nicht die üblichen Methoden des existentialen Schließens und andererseits auch nicht den Allgemeinbegriff eines inhaltlichen Beweises erfordern.

Im Zusammenhang mit dem erwähnten Gödelschen Theorem hat sich überdies ergeben, daß die Annahme, daß die axiomatisch abgegrenzte und formalisierte Zahlentheorie deduktiv abgeschlossen sei, unzutreffend ist. Allgemeiner noch wurde von Gödel gezeigt, daß formalisierte Theorien, welche gewissen sehr allgemeinen Bedingungen der Ausdrucksfähigkeit sowie der Schärfe der Formalisierung genügen, sofern sie widerspruchsfrei sind, nicht deduktiv abgeschlossen sein können.

Im Ganzen ist die Situation nun so, daß die Hilbertsche Beweistheorie, in Verbindung mit der Aufdeckung der Möglichkeiten der Formalisierung mathematischer Theorien, ein reiches Feld der Forschung geschaffen hat, daß jedoch die erkenntnistheoretischen Gesichtspunkte, von denen ihre Aufstellung ausging, problematisch geworden sind.

Dieses gibt Anlaß, die erkenntnistheoretischen Ausführungen der vorstehenden Abhandlung zu revidieren. Freilich, die positiven Ausführungen, insbesondere die Aufweisung des mathematischen Elements in der Logik und die Herausstellung der elementaren arithmetischen Evidenz, bedürfen wohl kaum der Revision. Jedoch, die scharfe Unterscheidung des Anschaulichen und des Nicht-Anschaulichen, wie sie bei der Behandlung des Problems des Unendlichen angewandt wird, ist anscheinend nicht so strikt durchführbar, und die Betrachtung der mathematischen Ideenbildungen bedarf wohl in dieser Hinsicht noch der näheren Ausarbeitung. Für eine solche sind in den folgenden Abhandlungen[a] verschiedene Überlegungen enthalten.

[a]Dieser Verweis bezieht sich auf die anderen Aufsätze in [**?**].