E

Bernays Project: Text No. 5

Probleme der theoretischen Logik† (1927)

Problems of Theoretical Logic

(*Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaft* XXXIII, S. 369–377;
repr. in *Abhandlungen*, S. 1–16)

369/A1 | Das Thema des Vortrages und dieser Benennung ist im Sinne Hilberts gewählt worden. Als theoretische Logik wird hier das bezeichnet, was man gewöhnlich symbolische Logik, mathematische Logik, Algebra der Logik oder Logik-Kalkul nennt. Es soll der Zweck der folgenden Ausführungen sein, dieses Forschungsgebiet unter einem solchen Aspekt erscheinen zu lassen, welcher die Bezeichnung als theoretische Logik rechtfertigt.

In dem allgemeinen Fall ist die *mathematische* Logik wenig beliebt. Sie wird meist für eine müßige Spielerei gehalten, die weder für das praktische Schließen zweckmäßig ist, noch auch zur Förderung unserer logischen Einsicht etwas Erhebliches beiträgt.

Was zunächst den Vorwurf des Spielerischen betrifft, so hat dieser wohl gegenüber der anfänglichen Behandlungsweise der mathematischen Logik seine Berechtigung; man legte anfangs den Hauptwert auf die formale Analogie zur Algebra und betrachtete deren Verfolgung vielfach als Selbstzweck. Aber dieser Stand der Dinge liegt schon um Jahrzehnte zurück, und heute sind

†The full title reads (with the first two lines in bold face):

Forschung und Schule
Probleme der theoretischen Logik
Vortrag gehalten auf der 56. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in Göttingen.
Von Professor Dr. Bernays in Göttingen.

die Probleme der mathematischen Logik unlöslich verflochten mit den Fragen, welche die Grundlagen der exakten Wissenschaften betreffen, so daß von einem bloß spielerischen Charakter keine Rede mehr ist.

Was zweitens die Anwendung auf das praktische Schließen anbelangt, so ist zunächst zu sagen, daß man sich von einem symbolischen Kalkul nur dann einen Vorteil versprechen kann, wenn man in seiner Handhabung hinreichende Übung besitzt. Außerdem ist aber zu bedenken, daß im Unterschied von den meisten Arten der Symbolik, welche doch Abkürzung und Zusammenziehung von Operationen zum Zweck haben, die Aufgabe des logischen Kalkuls doch in erster Linie darin besteht, die Schlüsse in ihre letzten Bestandteile zu zerlegen und jeden einzelnen Schritt äußerlich ersichtlich zu machen und dadurch der Beachtung zuzuführen. Das Interesse, welches sich mit der Anwendung des logischen Kalkuls verbindet, ist also in der Hauptsache kein technisches, sondern ein theoretisches und prinzipielles.

A2 | Damit komme ich zu dem dritten Vorwurf, nämlich demjenigen, daß durch die mathematische Logik unsere logische Einsicht nicht wesentlich gefördert werde. Diese Meinung steht in Verbindung mit der Ansicht, die Kant in der zweiten Vorrede zur Kritik der reinen Vernunft über die Logik geäußert hat; er sagt da: „Merkwürdig ist noch an ihr (der Logik), daß sie auch bis jetzt keinen Schritt vorwärts hat tun können, und also allem Ansehen nach geschlossen und vollendet zu sein scheint.“*a*KrV B VII.

Es ist meine Absicht, zu zeigen, daß dieser Standpunkt irrig ist. Allerdings: daß die Aufstellung der obersten Prinzipien des Schließens und ihrer nächsten Folgerungen, so wie sie durch Aristoteles geschah, eine der bedeutsamsten geistigen Leistungen bildet, und auch zu dem ganz wenigen gehört, was als dauernder gesicherter Besitzstand im Bereiche der philosophischen Erkenntnis vorliegt, diese Tatsache soll ihre volle Würdigung behalten. Dies hindert aber nicht festzustellen, daß die traditionelle Logik in ihrer Problemstellung wesentlich unabgeschlossen ist und daß sie in ihrer Anordnung der Tatsachen weder den Bedürfnissen der systematischen Übersicht, noch auch denjenigen der methodischen und erkenntniskritischen Einsicht genügend angepaßt ist. Erst die neuere Logik, wie sie sich unter dem Namen der Algebra der Logik oder der mathematischen Logik entwickelt hat, brachte diejenigen Begriffsbildungen und einen solchen Ansatz der formalen Logik, welche es ermöglichen, jenen Bedürfnissen der Systematik und der Philosophie zu entsprechen.

Das Reich der logischen Gesetze, die Welt der abstrakten Relationen ist damit in ihrer formalen Struktur überhaupt erst vor uns enthüllt worden, und

das Verhältnis von Mathematik und Logik ist auf neue Weise beleuchtet wor-
370 den. Ich möchte ver|suchen, von dieser Wandlung und von den Ergebnissen, die sie zutage gefördert hat, in Kürze einen Begriff zu geben.

Dabei soll es mir nicht darauf ankommen, den historischen Gang der Entwicklung und die verschiedenen Formen, in denen die mathematische Logik ausgebildet worden ist, vorzuführen, sondern ich will eine solche Darstellung der neuen Logik wählen, welche die Anknüpfung an die traditionelle Logik und den Vergleich mit ihr möglichst erleichtert. Hinsichtlich der logischen Zeichen werde ich mich an diejenige Symbolik anschließen, die Hilbert jetzt in seinen Vorlesungen und Publikationen verwendet.

Die traditionelle Logik teilt ihre Probleme ein in die Untersuchung der Begriffsbildung, des Urteils und des Schließens. Es ist nicht vorteilhaft, mit
A3 der Begriffsbildung zu beginnen, weil die wesentlichen | Formen der Begriffsbildung nicht elementar sind, sondern sich bereits auf das Urteil stützen. Beginnen wir also mit dem Urteil.

Hier bringt nun gleich die neuere Logik ein wesentliches Moment der Neueinstellung, indem sie an die Stelle der Klassifikationen das Aufsuchen der logischen Elementaroperationen setzt. Man spricht hier nicht von dem kategorischen, dem hypothetischen, dem negativen Urteil, sondern von der kategorischen, hypothetischen Verknüpfung und von der Negation als logischer Operation. Ebenso teilt man nicht ein in allgemeine und partikuläre Urteile, sondern führt für die Allgemeinheit und Partikularität logische Operatoren ein.

Dieses Verfahren ist aus dem Grunde sachgemäßer als das der Einteilung, weil in den Urteilen die verschiedenen logischen Prozesse im allgemeinen kombiniert auftreten, so daß eine eindeutige Charakterisierung danach gar nicht möglich ist.

Betrachten wir zunächst das *kategorische* Verhältnis, d. h. dasjenige von Subjekt und Prädikat. Wir haben hier einen Gegenstand und eine Aussage über ihn. Die symbolische Darstellung dafür ist

$$P(x),$$

zu lesen:

„x hat die Eigenschaft P“.

Die Beziehung des Prädikates auf einen Gegenstand wird hier explizite durch die Variable zum Ausdruck gebracht. Doch das ist nur eine deutlichere Art der Schreibweise. Wesentlich ist aber die Bemerkung, daß *mehrere Gegenstände*

Subjekte einer Aussage sein können. Man spricht dann von einer *Beziehung* (Relation) zwischen mehreren Gegenständen. Die Schreibweise dafür ist

$$R(x, y), \text{ bzw. } R(x, y, z) \text{ usw.}$$

Im sprachlichen Ausdruck werden zur Bezeichnung der verschiedenen Glieder von Relationen teils die Kasus, teils Präpositionen angewandt.

Durch die Berücksichtigung der Relationen erfährt die Logik gegenüber ihrer traditionellen Form eine wesentliche Erweiterung. Auf die Bedeutsamkeit dieser Erweiterung werde ich bei der Lehre von den Schlüssen zu sprechen kommen.

An das kategorische Verhältnis knüpfen sich die Formen der Allgemeinheit und des Partikulären. Die Allgemeinheit stellen wir symbolisch dar durch

$$(x)P(x)$$

„alle x haben die Eigenschaft P“.

Die Variable x tritt hier als „gebundene Variable“ auf; die Aussage hängt nicht von x ab, – entsprechend wie der Wert eines Integrals nicht von der Integrationsvariablen abhängt.

A4 An dem partikulären Urteil nehmen wir zunächst die Verschärfung | vor, daß wir an die Stelle der etwas unbestimmten Aussage „einige x haben die Eigenschaft P“ das existenziale Urteil setzen:

„es gibt ein x von der Eigenschaft P“,

symbolisch geschrieben:

$$(Ex)P(x).$$

Durch Hinzunahme der *Negation* ergeben sich die vier Urteilsarten, die in der Aristotelischen Logik durch die Buchstaben „a, e, i, o“ bezeichnet werden.

Indem wir die Negation durch Überstreichen des zu negierenden Ausdrucks darstellen, erhalten wir für jene vier Urteilsarten folgende Darstellungen:

$$\begin{array}{rll} \text{a:} & (x) & P(x) \\ \text{e:} & (x) & \overline{P(x)} \\ \text{i:} & (Ex) & P(x) \\ \text{o:} & (Ex) & \overline{P(x)}. \end{array}$$

Hier, in der Lehre von der „Opposition“, erweist sich bereits die Trennung der Operationen für die Auffassung als nützlich; so erkennen wir z. B., daß der Unterschied zwischen kontradiktorischem und konträrem Gegenteil darin
371 besteht, daß | einmal die ganze Aussage, z. B. $(x)P(x)$, das andere Mal nur das Prädikat $P(x)$ negiert wird.

Wenden wir uns nun zu dem *hypothetischen Verhältnis.*

$$A \to B \quad \text{„wenn } A\text{, so } B\text{“.}$$

Dieses enthält eine Verknüpfung *zweier* Aussagen (Prädikationen). Die Glieder der Verknüpfung haben also hier bereits die Form von Aussagen, und das hypothetische Verhältnis bezieht sich auf diese Aussagen als *ungetrenntes Ganzes*. Das Letztere gilt auch schon von der Negation $\overline{A}$.

Nun gibt es aber noch anderweitige solche Aussagenverknüpfungen, insbesondere:

das *Zusammenbestehen* von A mit B: $A \,\&\, B$,

ferner die *disjunktive Verknüpfung*; wir haben da zu unterscheiden zwischen dem ausschließenden „Oder“, im Sinne des Lateinischen „aut-aut“ und dem „Oder“ im Sinne von „vel“. Diese letztere Verknüpfung stellen wir, gemäß der Bezeichnung von Russell, durch $A \vee B$ dar.

In der Sprache werden solche Aussagenverknüpfungen mit Hilfe der Konjunktionen ausgedrückt.

Es liegt nun nahe, hier eine analoge Betrachtung wie in der Lehre von der Opposition anzustellen: wir kombinieren die zweigliedrigen Aussagenverknüpfungen mit der Negation, was auf zwei Weisen geschehen kann, indem
A5 wir entweder die einzelnen Glieder der Verknüpfung oder | diese als Ganzes negieren, und nun sehen wir zu, was sich für Abhängigkeitsbeziehungen ergeben.

Um anzugeben, daß zwei Verknüpfungen sachlich gleichbedeutend („äquivalent“) sind, will ich zwischen die betreffenden Verknüpfungen „aeq“ schreiben (was aber kein Zeichen unserer logischen Symbolik ist). Es ergeben sich insbesondere folgende Verknüpfungen und Äquivalenzen:

$$
\begin{array}{rl}
\overline{A} \mathbin{\&} \overline{B}\colon & \text{„weder A noch B“} \\
\overline{A \mathbin{\&} B}\colon & \text{„A und B schließen einander aus“} \\
\overline{A \mathbin{\&} B}\colon & \text{aeq } \overline{A} \vee \overline{B} \\
 & \text{aeq } A \to \overline{B} \\
 & \text{aeq } B \to \overline{A} \\
\overline{A} \to B & \text{aeq } A \vee B \\
\overline{\overline{B}} & \text{aeq } B
\end{array}
$$

(doppelte Verneinung ist gleichbedeutend mit Bejahung).

Hieraus ergibt sich weiter:

$$
\begin{array}{rl}
A \to B & \text{aeq } \overline{A \mathbin{\&} \overline{B}} \\
 & \text{aeq } \overline{A} \vee B \\
\overline{A \vee B} & \text{aeq } \overline{\overline{A} \to B} \\
 & \text{aeq } \overline{A} \mathbin{\&} \overline{B}.
\end{array}
$$

Auf Grund dieser Äquivalenzen ergibt sich die Möglichkeit, von den durch

$$\overline{}, \to, \&, \vee$$

bezeichneten logischen Verknüpfungen einen Teil durch die übrigen auszudrucken. In der Tat läßt sich gemäß den obigen Äquivalenzen

$$
\begin{array}{c}
\to \text{ durch } \vee \text{ und } \overline{} \\
\vee \text{ durch } \& \text{ und } \overline{} \\
\& \text{ durch } \to \text{ und } \overline{}
\end{array}
$$

ausdrücken, so daß als Grundverknüpfungen

$$
\begin{array}{c}
\& \text{ und } \overline{} \\
\text{bzw. } \vee \text{ und } \overline{} \\
\text{bzw. } \to \text{ und } \overline{}
\end{array}
$$

je allein schon ausreichen. Man kann sogar mit einer einzigen Grundverknüpfung auskommen, freilich keiner von denen, für die wir bereits ein eigenes Zeichen haben. Führen wir nämlich für die Verknüpfung des Ausschließens $\overline{A \& B}$ das Zeichen $A|B$ ein, so bestehen die Äquivalenzen:

$$
\begin{array}{rll}
A|A & \text{aeq} & \overline{A} \\
A|\overline{B} & \text{aeq} & \overline{A \mathbin{\&} \overline{B}} \\
 & \text{aeq} & A \to B,
\end{array}
$$

A6 | woraus hervorgeht, daß man mit Hilfe dieser Verknüpfung sowohl die Negation wie auch $\rightarrow$ und mithin auch die übrigen Verknüpfungen darstellen kann.
372 Ebenso wie die Beziehung des Ausschließens kann auch die Verknüpfung |

$$\text{„weder – noch“} \quad \overline{A} \mathbin{\&} \overline{B}$$

als einzige Grundverknüpfung genommen werden. Schreiben wir nämlich für diese

$$A \parallel B,$$

so gilt

$$\begin{array}{lll} A \parallel A & \text{aeq} & \overline{A} \\ \overline{A} \parallel \overline{B} & \text{aeq} & A \mathbin{\&} B, \end{array}$$

so daß sowohl die Negation wie & durch diese Verknüpfung ausdrückbar ist.

Diese Überlegungen grenzen schon etwas ans Spielerische. Immerhin ist es doch merkwürdig, daß die Entdeckung einer so einfachen Tatsache wie die der Zurückführbarkeit aller Aussagenverknüpfungen auf eine einzige dem 20. Jahrhundert vorbehalten geblieben ist. Überhaupt sind die Äquivalenzen zwischen Aussagenverknüpfungen in der alten Logik nicht systematisch betrachtet worden.[1] Es finden sich da nur einzelne Bemerkungen, wie z. B. die der Äquivalenz von

$$A \rightarrow \overline{B} \text{ mit } B \rightarrow \overline{A},$$

auf welcher der Schluß durch „Kontraposition“ beruht. Das systematische Aufsuchen der Äquivalenzen ist aber um so lohnender, als man hier zu einem in sich geschlossenen und vollkommen überblickbaren Teilgebiet der Logik gelangt, dem sogenannten *Aussagenkalkul*. Worin der Wert dieses Kalkuls für das Schließen besteht, will ich etwas näher auseinandersetzen.

Überlegen wir uns, was der Sinn der Äquivalenz ist. Wenn ich sage

$$\overline{A \mathbin{\&} B} \text{ aeq } \overline{A} \vee \overline{B},$$

A7 | so behaupte ich nicht, daß die beiden Aussagenverknüpfungen sinnesgleich

[1] Diese historischen Bemerkungen bedürfen heute der Korrektur. Erstens wurde die Zurückführbarkeit aller Aussagenverknüpfungen auf eine einzige bereits im 19. Jahrhundert von C. S. Peirce entdeckt – was freilich erst durch die Herausgabe seiner gesammelten Werke 1933 allgemeiner bekannt wurde. Ferner trifft es nicht zu, daß die Äquivalenzen

sind, sondern nur, daß sie *wahrheitsgleich* sind, d. h. daß, wie auch die einzelnen Aussagen A, B gewählt werden, immer $\overline{A} \vee \overline{B}$ zugleich mit $\overline{A \& B}$ wahr und zugleich damit falsch ist, so daß diese beiden Ausdrücke einander in Hinsicht auf die Wahrheit vertreten können.

Es kann überhaupt jede Aussagenverknüpfung von A und B aufgefaßt werden als eine mathematische Funktion, welche jedem Aussagenpaar A, B einen der Werte „wahr“, „falsch“ zuordnet. Und zwar kommt es dabei gar nicht auf den genaueren Inhalt der Aussagen, A, B an, sondern vielmehr nur darauf, ob A wahr oder falsch und ob B wahr oder falsch ist. Wir haben es also zu tun mit *Wahrheitsfunktionen*: einem Paar von Wahrheitswerten wird wieder ein solcher Wert zugeordnet.

Eine jede solche Funktion läßt sich durch ein Schema darstellen, indem man die vier möglichen Kombinationen zweier (den Aussagen A, B zugehörigen) Wahrheitswerte durch vier Felder repräsentiert und in jedes von diesen den zugehörigen Wahrheitswert der Funktion („wahr“ bzw. „falsch“) hineinschreibt.

Es seien hier die Schemata für $A \mathbin{\&} B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$ angegeben.

$A \mathbin{\&} B$:

	A	
B	wahr	falsch
wahr	wahr	falsch
falsch	falsch	falsch

$A \vee B$:

	A	
B	wahr	falsch
wahr	wahr	wahr
falsch	wahr	falsch

$A \rightarrow B$:

	A	
B	wahr	falsch
wahr	wahr	wahr
falsch	falsch	wahr

zwischen Aussagenverknüpfungen in der alten Logik nicht systematisch betrachtet worden sind – freilich nicht in der Aristotelischen Logik, wohl aber in anderen griechischen Philosophenschulen. (Siehe hierüber in dem Buche *Formale Logik* (*vide* [**?**]).)

Bemerkung: Diese Fußnote sowie die weiteren drei sind nachträgliche Hinzufügungen anläßlich der neuen Publikation des Vertrages.

373/A8 | Man kann sich leicht ausrechnen, daß es genau 16 verschiedene solcher Funktionen gibt. Entsprechend ist die Anzahl der verschiedenen Funktionen von n Wahrheitswerten

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

gleich $2^{(2^n)}$.

Jeder Funktion von zwei oder mehr Wahrheitswerten entspricht eine Klasse von untereinander ersetzbaren Aussagenverknüpfungen.b *Vide* [**?**], pp. 47–48: „Um uns kurz ausdrücken zu können wollen wir zwei Aussagenverknüpfungen durch einander ‚ersetzbar' nennen, wenn sie dieselbe Wahrheitsfunktion darstellen." Unter diesen ist eine Klasse ausgezeichnet; diese wird gebildet von denjenigen Verknüpfungen, die immer wahr sind.

Diese Verknüpfungen stellen alle diejenigen allgemein gültigen logischen Sätze dar, in denen die einzelnen Aussagen nur als ungetrenntes Ganzes auftreten. Wir wollen die Ausdrücke allgemein gültiger Sätze als *allgemeingültige Formeln* bezeichnen.c *Vide* ■ für die Unterscheidung zwischen „allgemein gültig" und „allgemeingültig."

Wir beherrschen die Aussagenlogik, wenn wir die allgemeingültigen Formeln (im Bereich der Aussagenverknüpfungen) kennen, bzw. wenn wir von einer vorgelegten Aussagenverknüpfung entscheiden können, ob sie allgemeingültig ist oder nicht. Denn eine Aufgabe für das Schließen in der Aussagenlogik wird doch so lauten:

Es sind gewisse Verknüpfungen

$$V_1, V_2, \ldots, V_k$$

vorgelegt, die sich aus Elementaraussagen $A, B, \ldots$ zusammensetzen, und die bei einer bestimmten Deutung der Elementaraussagen wahre Sätze darstellen. Es fragt sich, ob eine weitere gegebene Verknüpfung W dieser Elementaraussagen aus der Gültigkeit von $V_1, V_2, \ldots, V_k$ logisch folgt, und zwar ohne Berücksichtigung des genaueren Inhalts der Aussagen $A, B, \ldots$.

Diese Frage ist dann und nur dann mit „ja" zu beantworten, wenn

$$(V_1 \ \& \ V_2 \ \& \ \ldots \ \& \ V_k) \ \rightarrow \ W,$$

ausgedrückt durch $A, B, \ldots$, eine allgemeingültige Formel darstellt.

Nun ist grundsätzlich die Entscheidung über die Allgemeingültigkeit einer Aussagenverknüpfung immer dadurch zu erzielen, daß man alle in Betracht kommenden Wahrheitswerte durchprobiert. Die Methode der Betrachtung der Äquivalenzen liefert aber ein bequemeres Verfahren. Man kann nämlich durch äquivalente Umformungen jede Formel auf eine gewisse *Normalform* bringen, worin von den logischen Zeichen nur &, $\vee$, – auftreten, und an dieser Normalform kann man direkt ablesen, ob eine allgemeingültige Formel vorliegt oder nicht.

Die Regeln der Umformung sind auch sehr einfach. Insbesondere kann mit & und $\vee$ ganz analog gerechnet werden, wie mit $+$ und $\cdot$ in der Algebra; ja es liegt hier insofern noch einfacher, als & und $\vee$ ganz symmetrisch behandelt werden können.

A9 | Mit der Betrachtung der Äquivalenzen haben wir uns, wie schon bemerkt, bereits in das Gebiet der Schlüsse begeben. Diese haben wir aber hier sozusagen naiv ausgeführt, auf Grund der Bedeutung der logischen Verknüpfungen, und die Aufgabe des Schließens haben wir in ein Entscheidungsproblem umgeformt.

Es bleibt aber für die Logik die Aufgabe, die Regeln des Schließens *systematisch* darzustellen.

Die Aristotelische Logik stellt folgende Prinzipien des Schließens auf:

1. Regel des kategorischen Schließens: das „dictum de omni et nullo": was allgemein gilt, das gilt in jedem Einzelfall.

2. Regel des hypothetischen Schließens: wenn der Grund gesetzt ist, so ist die Folge gesetzt, d. h. wenn A und wenn $A \to B$, so B.

3. Gesetze der Negation: Satz vom Widerspruch und Satz vom ausgeschlossenen Dritten: A und $\overline{A}$ können nicht beide zutreffen, und eine der beiden Aussagen trifft jedenfalls zu.

4. Regel des disjunktiven Schließens: wenn mindestens einer der Fälle A, B vorliegt und wenn sowohl $A \to C$ wie $B \to C$, so gilt C.

Man kann sagen, daß jedes dieser Gesetze die implizite Definition für einen logischen Prozeß darstellt: 1. für die Allgemeinheit, 2. für die hypothetische Beziehung, 3. für die Negation, 4. für die Disjunktion ($\vee$).

Diese Gesetze enthalten nun tatsächlich das Wesentliche, was beim Schließen zur Geltung kommt. Aber für den Zweck einer restlosen Analyse der Schlüsse genügt das nicht. Hierzu verlangen wir, daß, nachdem einmal die Prinzipien des Schließens genannt sind, nun nichts mehr überlegt zu werden braucht. Die Regeln des Schließens müssen so beschaffen sein, daß sie das logische Denken eliminieren. Andernfalls müßten wir ja erst wieder logische Regeln dafür haben, wie jene Regeln anzuwenden sind.

374 | Dieser Forderung der Austreibung des Geistes kann nun wirklich genügt werden. Der Aufbau der Schlußlehre, den man so erhält, ist analog dem axiomatischen Aufbau einer Theorie. Den Axiomen entsprechen hier gewisse als Formeln aufgeschriebene logische Gesetze, und dem inhaltlichen Schließen, durch welches man sonst von den Axiomen zu den Lehrsätzen gelangt, entspricht ein äußeres Handeln nach bestimmten Regeln, durch deren Anwendung man von den Ausgangsformeln zu weiteren Formeln gelangt.

Jede Formel, die auf solche Weise abgeleitet werden kann, stellt einen allgemeingültigen logischen Satz dar.

A10 Es empfiehlt sich hier nun wieder, die *Aussagenlogik*, die auf den | Prinzipien 2., 3., 4. beruht, abzusondern. Hier brauchen wir als Regeln nur folgende: wir stellen die Elementaraussagen durch Variable dar

$$X, Y, \ldots$$

Die erste Regel besagt nun: für jede solche Variable kann irgendeine Aussagenverknüpfung eingesetzt werden (Einsetzungsregel).

Die zweite Regel besteht in dem Schlußschema

$$\frac{\begin{matrix}\mathfrak{S} \\ \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{T}\end{matrix}}{\mathfrak{T}}$$

wonach aus zwei Formeln $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{T}$ die Formel $\mathfrak{T}$ erhalten wird.

Die Wahl der Ausgangsformeln kann auf sehr verschiedene Weise getroffen werden. Man hat sich besonders darum bemüht, mit einer möglichst geringen Zahl von Axiomen auszukommen, und hat hierin in der Tat die Grenze des Möglichen erreicht. Den Zwecken der logischen Untersuchung wird aber besser gedient, wenn wir, entsprechend wie in der Axiomatik der Geometrie, verschiedene *Axiomgruppen* voneinander sondern, derart, daß jede von ihnen die Rolle einer logischen Operation zum Ausdruck bringt. Es ergibt sich so folgende Aufstellung:

I	Axiome der Folge
IIa)	Axiome für &
IIb)	Axiome für $\vee$
III	Axiome der Negation.

Dieses System von Axiomen liefert nun durch Anwendung der Regeln *sämtliche* allgemeingültigen Formeln der Aussagenlogik.[2] Diese Eigenschaft der *Vollständigkeit* des Axiomensystems läßt sich noch schärfer durch folgende Tatsachen kennzeichnen: nehmen wir noch irgendeine nichtableitbare Formel zu den Axiomen hinzu, so können wir mit Hilfe der Regeln jede beliebige Aussagenformel ableiten.

Ein besonderer Vorteil, den die Trennung der Axiomgruppen gewährt, besteht darin, daß sie die Absonderung der *positiven Logik* ermöglicht. Hierunter verstehen wir das System derjenigen Aussagenverknüpfungen, die allgemeingültig sind, ohne die Voraussetzung der Existenz eines Gegenteils,*d Vide* [?], p. 67: "Die '*positive Logik*' ..., d. h. die Formalisierung derjenigen logischen Schlüsse, welche unabhängig sind von der Voraussetzung, daß zu jeder Aussage ein Gegenteil existiert." wie z. B.

$$(A \mathbin{\&} B) \to A$$
$$(A \mathbin{\&} (A \to B)) \to B.$$

A11 | Das System dieser Formeln stellt sich in unserer Axiomatik dar als die Gesamtheit derjenigen Formeln, die ohne Benutzung der Axiomgruppe III ableitbar sind. Dieses System ist bei weitem nicht so übersichtlich wie das Totalsystem der allgemeingültigen Formel. Man kennt auch kein Entscheidungsverfahren, durch welches nach einer eindeutigen Vorschrift die Zugehörigkeit einer Formel zu diesem System festgestellt werden kann.[3] Insbesondere trifft es nicht etwa zu, daß jede durch $\to$, &, $\vee$ ausdrückbare Formel, die allgemeingültig, also auf Grund von I–III ableitbar ist, auch schon aus I–II ableitbar ist. Man kann streng beweisen, daß dies nicht der Fall ist.

Ein Beispiel liefert die Formel

$$A \vee (A \to B).$$

Diese geht auf Grund der Darstellung von $\vee$ durch $\to$ und $\overline{}$ über in

$$A \vee (\overline{A} \vee B),$$

[2]Gemeint sind hier nur diejenigen Formeln, die sich mit den Operationen $\to, \&, \vee$ und der Negation bilden lassen. Nimmt man weitere Operationssymbole hinzu, so können diese durch Ersetzungsregeln eingeführt werden. Man ist freilich nicht an diese Art der Auszeichnung der vier genannten Operationen gebunden.

[3]Seither sind für die positive Logik Entscheidungsverfahren von G. Gentzen und M. Wajsberg angegeben worden.

und diese Darstellung läßt sofort die Allgemeingültigkeit der Formel erkennen. Jedoch ist die Formel innerhalb der positiven Logik, d. h. auf Grund der Axiome I–II nicht ableitbar, wie man zeigen kann; sie stellt also kein Gesetz der positiven Logik dar.

Wir erkennen hier ganz deutlich, daß die Rolle der Negation diejenige eines *idealen Elementes* ist, dessen Einführung den Sinn hat, das logische System zu einer Gesamtheit von einfacherer Struktur abzurunden, gerade so wie das System der reellen Zahl durch die Einführung des Imaginären zu einer übersichtlicheren Gesamtheit erweitert wird, und wie die gewöhnliche Ebene durch die Hinzunahme der unendlich fernen Elemente zu einer Man-
375 nigfaltigkeit ergänzt wird, die in Bezug | auf die projektive Beschaffenheit einfacher ist. Diese für die Wissenschaft fundamentale Methode der idealen Elemente tritt uns also hier bereits in der Logik entgegen, wenn wir uns auch dieser ihrer Bedeutung zumeist nicht bewußt sind.

Ein spezieller Teil der positiven Logik ist die Lehre von den *Kettenschlüssen*, welche ja bereits in der Aristotelischen Logik erörtert worden ist. Auch auf diesem Gebiet gibt es naturgemäße Problemstellungen und einfache Resultate, welche der traditionellen Logik nicht bekannt waren, und die wiederum die Heranziehung spezifisch mathematischer Betrachtungen erfordern. Ich denke da an die Untersuchungen von P. Hertz über Satzsysteme. —

Die bisherige Axiomatik bezieht sich auf diejenigen Schlüsse, welche allein
A12 auf den Regeln des hypothetischen, des disjunktiven Schließens | und der Negation beruhen. Nun bleibt uns noch die Aufgabe, das *kategorische Schließen* in unsere Axiomatik einzubeziehen. Wie dies geschieht, will ich hier nur kurz schildern.

Wir brauchen von dem dictum de omni et nullo auch die Umkehrung: „was in jedem einzelnen Fall gilt, das gilt auch allgemein“. Ferner müssen wir das partikuläre Urteil berücksichtigen. Es gilt entsprechend:

> „Wenn eine Aussage $A(x)$ auf irgendein Ding x zutrifft, so gibt es ein Ding, auf welches sie zutrifft, und umgekehrt.“

Wir erhalten so vier Prinzipien des Schließens, die sich für die Axiomatik durch zwei neue Ausgangsformeln und zwei Regeln darstellen. Dazu kommt noch eine Einsetzungsregel für die Gegenstandsvariablen $x, y, \ldots$.

Außerdem muß die Einsetzungsregel für die Aussagenvariablen $X, Y, \ldots$ jetzt so erweitert werden, daß die Formeln der Aussagenlogik auch auf solche Ausdrücke anwendbar sind, welche Gegenstandsvariable enthalten.

Sehen wir uns nun zunächst einmal an, wie sich von diesem Standpunkt die typischen Aristotelischen Schlüsse gestalten. Hierzu ist es nötig, erst etwas über die Deutung des allgemeinen Urteils „alle S sind P“ zu sagen.

Nach der Aristotelischen Auffassung wird in einem solchen Urteil schon vorausgesetzt, daß es gewisse Dinge von der Eigenschaft S gibt, und von diesen Dingen wird dann ausgesagt, daß sie alle die Eigenschaft P besitzen. Diese Deutung des allgemeinen Urteils, gegen die sich von philosophischer Seite insbesondere Franz Brentano gewandt hat, ist zwar in sich ganz korrekt, aber sowohl für die Zwecke der theoretischen Wissenschaft wie auch für die Formalisierung der Logik ungeeignet, da die implizite Voraussetzung eine unnötige Komplikation mit sich bringt. Wir werden daher den Inhalt des Urteils „alle S sind P“ auf die Behauptung beschränken: „ein Ding, das die Eigenschaft S hat, hat auch die Eigenschaft P“.

Hiernach ist ein solches Urteil zugleich allgemein und hypothetisch; es stellt sich dar in der Form

$$(x)(S(x) \to P(x)).$$

Infolgedessen enthalten auch die sogenannten kategorischen Schlüsse eine Vereinigung kategorischer und hypothetischer Schlußweisen. Ich will dies erläutern an dem alten Schulbeispiel:

> „Alle Menschen sind sterblich, Cajus ist ein Mensch, also ist Cajus sterblich.“

A13 Stellen wir nach der Art unserer Schreibweise die Prädikate „x ist ein | Mensch“, „x ist sterblich“ bezüglich durch $M(x)$, $Stb(x)$ dar, so lauten die Prämissen

$$(x)(M(x) \to Stb(x)),$$
$$M(Cajus),$$

und der Schlußsatz lautet: $Stb(Cajus)$.

Die Ableitung geschieht so, daß zuerst, gemäß dem Schluß vom Allgemeinen aufs Besondere, aus

$$(x)(M(x) \to Stb(x))$$

abgeleitet wird:

$$M(Cajus) \to Stb(Cajus),$$

und diese Aussage in Verbindung mit

$$M(\mathit{Cajus})$$

ergibt, gemäß dem Schema des hypothetischen Schlusses:

$$\mathit{Stb}(\mathit{Cajus}).$$

An dieser Darstellung des Schlusses ist charakteristisch, daß in ihr von jeglicher quantitativen Deutung des kategorischen Urteils (im Sinne der Subsumption) abgesehen wird. Man erkennt hier besonders deutlich, daß die mathematische Logik keineswegs darauf angewiesen ist, eine Umfangs-Logik zu sein.

Unsere Regeln und Ausgangsformeln gestatten nun, alle die bekannten Aristotelischen Schluß-Modi, soweit sie unserer Deutung des allgemeinen Urteils entsprechen – es bleiben danach nur noch 15 – abzuleiten. Man erkennt dabei, daß es sich eigentlich nur um ganz wenige wirklich voneinander ver-
376 schiedene Schluß|arten handelt. Außerdem aber gewinnt man den Eindruck, daß die Problemstellung, die hier zu Grunde liegt, sehr willkürlich abgegrenzt ist.

Ein allgemeiner gefaßtes Problem, das auch in der mathematischen Logik gelöst ist, besteht darin, ein Verfahren der Entscheidung zu finden, durch welches man von einer Prädikatenformel feststellen kann, ob sie allgemeingültig ist oder nicht. Damit beherrscht man dann wieder das Schließen im Gebiete der Prädikate, entsprechend wie man es nach dem früher erwähnten Entscheidungsverfahren für die Aussagenlogik beherrscht.

Aber unsere Schlußregeln gehen noch viel weiter. Die eigentliche Fülle der logischen Zusammenhänge eröffnet sich erst, wenn wir die *Relationen* (Prädikate mit mehreren Subjekten) betrachten. Dadurch wird es erst möglich, die *mathematischen Beweisführungen* restlos logisch zu verfolgen.

Allerdings wird man hier veranlaßt, noch verschiedene *Erweiterungen* vorzunehmen, die uns auch durch die Sprache nahegelegt sind.

A14 Die erste Erweiterung besteht in der Einführung eines formalen | Ausdruckes dafür, daß „x dasselbe Ding ist wie y“, bzw. „ein anderes Ding ist als y“. Dazu muß die „*Identität* von x und y“ formal als eine bestimmte Relation dargestellt werden, deren Eigenschaften als Axiome zu formulieren sind.

Zweitens brauchen wir eine symbolische Darstellung für diejenige logische Beziehung, die wir sprachlich mit Hilfe des Genetivs oder des Relativpronomens in Wendungen wie „der Sohn des Herrn X“ oder „dasjenige Ding, welches“ zum Ausdruck bringen, und auf der in der Mathematik der *Funktionsbegriff* beruht. Es kommt hier darauf an, daß ein Ding, das als einziges eine gewisse Eigenschaft besitzt, bzw. eine gewisse Relation zu bestimmten Dingen erfüllt, durch diese Eigenschaft oder Relation charakterisiert wird.

Die bedeutsamste Erweiterung aber kommt dadurch zustande, daß wir uns veranlaßt sehen, die Prädikate und Relationen selbst als Gegenstände zu betrachten, wie es ja auch in der Sprache geschieht, z. B. wenn wir sagen: „Geduld ist eine Tugend“. Wir können Eigenschaften von Prädikaten und Relationen, ferner auch Beziehungen zwischen Prädikaten sowie zwischen Relationen konstatieren. Auch die Formen des Allgemeinen und Partikulären lassen sich mit Bezug auf Prädikate und Relationen anwenden. Wir gelangen auf diese Weise zu einer *zweiten Stufe* der Logik, für deren formale Durchführung die Gesetze des kategorischen Schließens in sinngemäßer Weise auf den Gegenstandsbereich der Prädikate und Relationen auszudehnen sind.

Für diesen durch die Einbeziehung der Relationen und die ferneren angegebenen Erweiterungen vergrößerten Umkreis der logischen Beziehung stellt die Lösung des Entscheidungsproblems – welches sich hier übrigens von selbst einem allgemeineren Probleme unterordnet – eine gewaltige Aufgabe dar. Seine Lösung würde bedeuten, daß wir ein Verfahren haben, wonach wir jedenfalls grundsätzlich von jedem vorgelegten mathematischen Satz entscheiden können, ob er aus einer gegebenen Reihe von Axiomen beweisbar ist oder nicht. In der Tat sind wir auch von einer Lösung dieser Aufgabe weit entfernt. Immerhin sind aber doch in diesem Problemgebiet, durch die Untersuchungen von Löwenheim und Behmann, verschiedene beträchtliche Ergebnisse von sehr allgemeinem Charakter erzielt worden; insbesondere ist es gelungen, das Entscheidungsproblem der *Prädikatenlogik* auch für die zweite Stufe der Logik zur vollständigen Lösung zu bringen.[4]

A15 | Wir sehen hier, wie die traditionelle Schlußlehre nur einen ganz winzigen Ausschnitt von dem bildet, was tatsächlich zu dem Bereiche des logischen Schließens gehört.

Nun habe ich noch gar nicht von der *Begriffsbildung* gesprochen. Ich kann auch darauf aus Mangel an Zeit nicht näher eingehen. Nur so viel will ich

[4]Man beachte, daß hier von „Prädikatenlogik“ im Sinne der Unterscheidung von Prädikaten und Relationen gesprochen wird. Mit „Prädikatenlogik“ ist also hier gemeint, was man gegenwärtig meist als Logik der einstelligen Prädikate bezeichnet. Die Logik der mehrstelligen Prädikate ist bereits für die erste Stufe nicht allgemein entscheidbar, wie von A. Church gezeigt wurde.

sagen, daß eine wirklich eingehende logische Analyse der Begriffsbildung erst auf Grund der Theorie der Relationen möglich wird. Man erkennt durch diese erst, welch komplizierte Zusammensetzungen von logischen Ausdrücken (Beziehungen, Existenzsätzen usw.) durch kurze Ausdrücke der Sprache verdeckt werden. Eine solche Analyse der Begriffsbildung ist, vor allem von Bertrand Russell, bereits weitgehend in Angriff genommen und hat zur Erkenntnis allgemeiner logischer Prozesse der Begriffsbildung geführt, durch deren Klarstellung das methodische Verständnis der Wissenschaften erheblich gefördert wird. –

Ich komme nun zum Schluß meiner Ausführungen. Ich habe zu zeigen gesucht, daß die Logik, und zwar die richtige alte Logik, so wie man sie immer gemeint hat, ihre wirkliche Abrundung, sachgemäße Entwicklung und systematische Vollständigkeit erst durch die mathematische Behandlung erreicht. Die mathematische Betrachtungsweise wird hier nicht etwa künstlich herangebracht, sondern stellt sich ganz von selbst bei der weiteren Verfolgung der Probleme ein.

377 | Der Widerstand, der gegenüber der mathematischen Logik, besonders auch bei Philosophen, verbreitet ist, hat außer den anfangs genannten Gründen auch noch einen prinzipiellen. Viele sind einverstanden damit, die Mathematik in Logik aufgehen zu lassen. Was man aber hier gewahr wird, ist das Umgekehrte, daß nämlich das System der Logik in Mathematik aufgeht. Die Logik erscheint hier gegenüber dem mathematischen Formalismus als eine spezielle Deutung und als Anwendung, ganz in demselben Verhältnis, wie etwa die Elektrizitätslehre zur mathematischen Analysis steht, wenn sie gemäß der Maxwellschen Theorie behandelt wird.

Das widerspricht nicht der Allgemeinheit der Logik, wohl aber der Meinung, daß diese Allgemeinheit derjenigen der Mathematik übergeordnet ist. Die Logik handelt von gewissen Inhalten, die auf jedwede Materie, sofern darüber gedacht wird, Anwendung finden. Andererseits handelt aber die Ma-
A16 thematik von den allgemeinsten Gesetzen jeglicher | Zusammensetzung. Dies ist auch eine Art von höchster Allgemeinheit, nämlich in Richtung auf das *Formale.* Ebenso wie jede Überlegung, auch die mathematische, den logischen Gesetzen untersteht, so muß jede Struktur, jede noch so primitive Mannigfaltigkeit, also auch die, welche in der Kombination von Sätzen oder von Satzteilen gegeben ist, der mathematischen Gesetzlichkeit unterliegen.

Wollten wir eine von Mathematik freie Logik, so würde gar keine Theorie übrigbleiben, sondern nur das reine Besinnen auf die einfachsten Bedeutungszusammenhänge. Solche rein inhaltlichen Überlegungen – man kann diese unter dem Namen der „philosophischen Logik“ zusammenfassen – sind in der Tat unerläßlich und für den Ansatz der logischen Theorie entscheidend, ebenso wie die rein physikalischen Überlegungen, die zum Ansatz einer physikalischen Theorie führen, für diese die grundlegende Gedankenleistung bilden. Aber solche Überlegungen machen doch nicht die Theorie selbst aus. Diese zu entwickeln erfordert den mathematischen Formalismus. Exakte systematische Theorie eines Gegenstandes ist eben mathematische Behandlung, und in diesem Sinne gilt Hilberts Ausspruch: „Alles was Gegenstand des wissenschaftlichen Denkens überhaupt sein kann, verfällt, sobald es zur Bildung einer Theorie reif ist, … der Mathematik.“e *Vide* [**?**], p. 156. Diesem Schicksal kann auch die Logik nicht entrinnen.